大专理科教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shulitongji

河南大学出版社

概率论与数理统计

李少辅　等

河南大学出版社

概率论与数理统计

编著　李少辅等
责任编辑　程　庆

河南大学出版社出版
河南省新华书店发行
山东东明印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：12.375　字数：238千字
1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷
印数：1—5,000
统一书号：13435.002　定价：2.05元

前　言

本书是在河南省教委的组织与领导下编写的，是师范专科学校的試用教材。编写本书的主要依据是教育部1982年頒发的师范专科学校二、三年制《概率论与数理统计》教学大纲。

根据师范专科学校教学的特点和培养目标的要求，在编写过程中我们注意到加強基本概念和基本理论，使教材内容具有科学性和先进性，同时也照顾到读者的接受程度。定义和概念的阐述力求深入浅出，对教学上的难点都作了浅显的说明。在内容和理论体系的处理上有些新的尝试。读者只须具备集合与微积分的知识，就可读懂全书。因而本书也可作为教育学院、函授大学等各类成人教育的教学用书或学习参考书。

为了使本书适合多层次需要，凡二年制师专不需要讲的章节都标有星号。本书最后三章是供学生选读的，不必讲授。习题分A、B两类。A类是基本题目，B类是稍难题目，可供不同程度的读者选作练习。书末附有答案和提示。

参加本书编写的人员有李少辅（緒论和第一章）、张惟明（第三、四章）、钟计春（第六、七章及各章习题）、李俊德（第八、九、十、十一、十二章）、杜明全（第五章）、赵希元（第二章），在编写过程中，征求了部分师专任课教师的意見，对初稿进行了反复讨论和多次修改，因此，这本书是集体成果。

本书的编写得到有关方面的大力支持。在此我们对给予帮助和支持的单位和个人表示感谢。鉴于编写成员的业务水平有限，书中定有不少谬误之处，望读者不吝指教。

《概率论与数理统计》编写组

1985．10．

绪　论

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

随机现象这个概念很早就被人们所注意。早在公元三世纪，我国的孙子算经一书中就提出如何判断孕妇生男或生女的问题，当时人们已经认识到生男生女是个随机现象。到了十七世纪中叶，人们从赌博这一随机现象中提出了一些当时还未能归入数学范围的问题，引起了一些数学家的注意。惠根斯（*Huygens*）、巴斯加（*Pascal*）、费尔马（*Fermat*）及贝努里（*J*、*Bernoulli*）等人对这些问题先后进行过研究，他们的工作成为概率论的起源。到了十八世纪，拉普拉斯（*Laplace*）总结前人的成果，明确规定了概率的古典定义，将古典概率论的研究化为对组合问题的研究。在此期间以概率论为基础的数理统计学也开始出现。贝叶斯（*Bayes*）的工作对以后统计思想的发展起了一定的作用。当时人们就估计到概率论与数理统计这门学科的重要性。拉普拉斯曾经予言："值得注意的是，从考虑赌博问题而起始的一门科学，将会成为人类知识宝库里最重要的主题。"

但历史的进程是曲折的，概率论的研究在整个十九世纪进展得很缓慢。尽管发现了布朗运动，使概率论的研究方法在统计物理学中得到应用，高斯（*C*、*F*、*Gauss*）创立了较完整的误差理论，但在概率论本身的理论上没有实质性的突破。其原因一方面是受到工农业生产发展水平的限制，另一方面是现代数学的理论基础尚未完全建立，使得概率论缺

少严谨的逻辑基础。1900年在巴黎举行的世界数学家大会上，希尔伯特（D、Hilbert）提出了很多著名的问题，其中就有概率论的公理化问题。他认为如果公理化问题解决了，这将是数学研究中的非常重要的发展。

二十世纪初完成的测度与积分理论，为概率论的严格公理化创造了条件。经过许多概率论学者的努力，最后由柯尔莫哥洛夫（А·Н·Коолмогров）集其大成，建立了概率的测度论定义和一套严密而有效的公理系统，从而奠定了现代概率论的理论基础。在此期间，皮尔逊（K·Pearson）和费歇（R·A·Fisher）的工作对现代数理统计学的形成和发展起了决定性作用。自此以后，由于科学技术的高速发展，对随机现象的研究更为迫切，因而促进了这门学科的蓬勃发展。

这门学科从一开始就分成两个大的分支：概率论、数理统计。概率论以研究随机现象自身的规律性为主，目前侧重于对随机过程的研究。它的主要研究内容大致可分为：极限理论、平稳过程、马尔可夫过程、随机过程的一般理论、随机微分方程等。而数理统计则是研究如何以有效方式收集、整理和分析受到随机性影响的数据，对考察的问题作出推断或预测，直至为采取决策和行动提供依据和建议。它的内容大致可分为：抽样理论、试验设计、统计推断、回归分析等。

这门学科的一个显著特点是它与生产实践和现代科学技术结合得很密切。在这种结合中又产生了许多边缘分支。如无线电通讯中的信息论，空间科学和自动化中的随机控制论，计算数学中的蒙特卡罗方法，服务系统中的排队论以及国民经济中的一些数学理论等。

概率论与数理统计的思想、理论和方法又广泛渗透到物理、化学、生物等许多自然科学以及心理学、人口学等社会科学中去。如物理学中的电子——光子的级联过程理论、天文学中银河亮度的起伏理论、化学反应动力学的随机模型、大气物理学的湍流理论、生物学中的群体增长理论等都要用到随机过程与随机场的理论。而生物统计学、心理统计学、医药统计学、数量遗传学、气象中的统计预报方法等又是数理统计在这些学科中的实际应用。概率论与数理统计的应用是如此的广泛，正如拉普拉斯所说的："生活中最重要的问题，其中占绝大多数实质上只是概率的问题。"

随着这门学科的发展，它的普及工作也引起了广泛的注意。目前许多国家不仅把它作为大学与专科学校的一门重要数学课程，而且也在中学的数学教育中加进了概率与统计的内容。在我国，由于党和政府的重视，这门学科的发展方兴未艾，也取得一些可喜的成果。可以预料，在社会主义建设中，这门学科将发挥越来越大的作用。

《概率论与数理统计》这本教材只是这门学科的一本入门书，它只介绍这门学科的基本概念、基本理论和基本思想方法。目的是使读者初步掌握研究随机现象的方法，培养解决某些实际问题的能力，为使读者胜任中学概率统计内容的教学和进一步学习这门学科创造必要的条件。

目　　录

第一章　事件与概率

§1　随机事件及其概率

一　随机现象

你做过掷钱币游戏吧！将一枚硬币随意投掷一次，可能出现正面，也可能出现反面，并且在投掷之前，不能断定要出现哪一面。这个简单游戏所反映的现象就是一种随机现象。一般说来，当观察某一现象或在一定条件下作某种试验时，所得的结果只是许多可能结果中的一个，并且事先不能确切断定要出现哪个结果。这种现象称为随机现象。

随机现象在各个领域中都广泛存在。例如在面积相等的土地上种植同一品种小麦，即使耕作条件一样，其产量却有高低；在同一台车床上生产的同一种零件，其尺寸也有差别；同一门炮在同样发射条件下射出的炮弹，其落点却不一样；同一个商店售同一种货物，每天的销售量却不相等。又如黄河每年的最高洪峰流量有大有小；太平洋每年形成的台风次数有多有少；无线电信号在空中传播会受到干扰；人造卫星在太空中飞行会随机摆动，所有这些都是随机现象。

随机现象在一次试验和观察中呈现偶然性，但在大量的试验和观察中却呈现某种规律性。例如：一个射手在一次射击中可能命中目标，也可能未命中目标，但在多次射击中却能

看出他的射击水平的高低。这种在大量的重复试验中呈现的规律性称为统计规律性。它是我们研究的主要对象。

二　样本空间

在一定条件下进行试验，如果这个试验具有如下特征：

1）　这种试验能够重复进行；

2）　每次试验只能出现一个结果，不同次试验可能出现不同结果，并且事先不能预料；

3）　能够明确指出这种试验可能出现的所有结果；

那么这种试验叫做**随机试验**，并简称为**试验**。

由于试验出现哪个结果不能事先断定，故呈现随机性。但因试验能重复进行，从而可以从大量的观测中寻求其统计规律。这一点很重要，它说明概率论中研究的随机现象并不是那种孤立的、不能再现的偶然现象。

定义 1　试验的可能结果叫做**样本点**，全体样本点构成的集合叫做**样本空间**。

我们用 ω或ω_1、$\omega_2\cdots$表示样本点；用Ω表示样本空间。

例 1　掷一个硬币，观察哪个面朝上。这个试验有两个可能结果：正面和反面。它们是样本点。若用ω_1表示正面，ω_2表示反面，则样本空间$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$。

例 2　对目标进行射击，直到击中目标为止。若用“0”表示未击中，“1”表示击中，来记录每次射击结果，则这个试验的可能结果有：

$$\omega_1=\text{“1”},\quad \text{（第一次射击就击中目标）}$$

$\omega_2 =$ "01"，（第一次未击中，第二次才击中）

………

$\omega_n =$ "$\overbrace{0\cdots0}^{n-1个}1$"，（前$n$-1次未击中，第$n$次才击中）

………

这个试验有无穷多个可能结果，样本空间

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\omega_n, \cdots\cdots\}。$$

例3 在区间［0，1］上随意取一点，这也是个试验。区间［0，1］上的每一个点都是此试验的一个可能结果。故样本空间$\Omega =$［0，1］。

例4 一门大炮在同一发射条件下进行射击，观察炮弹在地平面上的落点。这样地平面上的每一个点都是这个试验的可能结果。所以

$$\Omega = \{(x, y): x, y \in R\}。$$

应该注意，样本点与样本空间是根据试验进行的方式和条件而确定的。当试验的方式和条件改变时，应看作是另一个试验，所得到的是另一个样本空间。

例5 将一枚硬币投掷两次（或一次投掷两个硬币）。这个试验与例1不同，它的样本点是：

$$\omega_1 = (正，正)，\omega_2 = (正，反)，$$
$$\omega_3 = (反，正)，\omega_4 = (反，反)。$$

样本空间$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$。

例6 从数字1，2，3，4，5中任取两个数，但取的方式不一样：

1 ）如果取出的两个数不计次序，则其样本点有$C_5^2=10$个，它们是：

（1，2）（1，3）（1，4）（1，5）
（2，3）（2，4）（2，5）
（3，4）（3，5）
（4，5）

2）如果每次取一个数，取后不放回，连取两次（这叫做不放回的抽样），则除上面的样本点外，将其中每个样本点的两个数字交换位置，仍是样本点。例如（1，2）和（2，1）是两个样本点。故这个试验的样本空间有$P_5^2=20$个样本点。这里P_5^2表示从五个元素中选取两个元素的排列数。

3）如果每次取一个数，取后放回，连取两次（这叫做有放回的抽样）。则其样本点有$5^2=25$个。除了2）中的20个样本点外，还要加上：

（1，1）（2，2）（3，3）（4，4）
（5，5）。

三　随机事件

定义 2　样本空间Ω中，具有某种性质的样本点构成的集合称为**随机事件**，简称为**事件**

随机事件是样本空间的子集合，常用字母A、B、C、……表示。

例 7　在例5的试验中，设至少有一个正面的样本点构成的集合为事件A，简写为$A=$“至少有一个正面”，则

$$A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

同样，若$B=$“至少有一个反面”，则

$$B=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

又若$C=$“有两个正面”，则$C=\{\omega_1\}$，它只包含1个样本点。

类似地，在例1中，设事件$A=$“出现正面”，则$A=\{\omega_1\}$，它是个单点集合。注意符号$\{\omega_1\}$与ω_1是不同的，ω_1仅是个样本点，它不是事件。而单点集合$\{\omega_1\}$才是事件。

由一个样本点构成的事件称为**基本事件**。

例8 在例2中，对目标进行射击，直到命中为止，设$A=$“射击次数不超过n”则

$$A=\{\omega_1, \omega_2\cdots, \omega_n\}$$

设$B=$“命中前的失败次数不超过n”，则

$$B=\{\omega_1, \omega_2\cdots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$$

又设$C=$“射击偶数次”则

$$C=\{\omega_2, \omega_4, \cdots, \omega_{2n}, \cdots\}$$

例9 在区间〔0, 1〕上随意取一点（见例3），设$A=$“取出的点对应的实数小于$\frac{1}{2}$”，则$A=[0, \frac{1}{2})$设$B=$“取出的点是有理点”，则$B=[0,1]\cap Q$，其中Q是有理数集。事件A、B都是样本空间〔0, 1〕的子集。但是〔0, 1〕的子集很多，有些子集的构造极为复杂，不便于研究。我们通常只是把区间〔0, 1〕中那些能够度量（即能测量其长度）的子集才作为事件。

进行一次试验，必出现一个样本点，而且只出现一个样本点。一个事件可能包含许多个样本点。如果在一次试验中，事件A的样本点有一个出现了，就称事件A在这次试验

中发生了。例如，在例9中，如果取出的点是$\frac{1}{4}$，因$\frac{1}{4}\in A$，所以事件A在这次试验中发生了。又因$\frac{1}{4}$是有理数，故事件B在这次试验中也发生了。

任何一个样本空间Ω都有两个特殊子集，即空集ϕ和Ω自身。空集ϕ不包含任何样本点，它在任何一次试验中都不可能发生，因此称ϕ为不可能事件。而Ω包含一切样本点，它在每次试验中都必然发生，因此称Ω为必然事件。

四 概率

虽然我们不能断定随机事件在一次试验中是否发生，但是可以确定它发生的可能性有多大。“可能性”一词我们并不陌生，如神枪手射击，命中目标的可能性就很大，一个新手射击，命中目标的可能性就很小。可能性的大小常用介于0与1之间的一个实数来表达。例如，有一批产品，全部是合格品，其中有40%是一等品，60%是二等品。我们的试验是从这批产品中随意抽取一件产品。那么它是一等品的可能性就是0.4，是二等品的可能性就是0.6，由于它必然是合格品，故是合格品的可能性就是1。

定义3 对于样本空间Ω的每个事件A，都有一个实数$P(A)$作为刻划它发生的可能性大小的数量标志，并且

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,\quad P(\Omega)=1.$$

则实数$P(A)$称为事件A的**概率**。

人们经常谈到产品合格率，射击命中率、种子发芽率等概念，这些都是相应事件的概率。事件的概率和长度、面积、体积、质量等概念一样，是事件本身固有的属性，它是客观存在的。例如，掷一枚硬币，正面出现的概率是$\frac{1}{2}$，这