华章数学译丛

23

Analysis of Financial Time Series

金融时间序列分析

(美) Ruey S. Tsay 著
芝加哥大学

潘家柱 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书主要介绍了在计量经济学和统计学文献中出现的金融计量方法方面的最新进展，强调实例和数据分析．特别是包含当前的研究热点，如风险值、高频数据分析和马尔可夫链蒙特卡罗方法等．主要内容包括：金融时间序列数据的基本特征，神经网络，非线性方法，使用跳跃扩散方程进行衍生产品的定价，采用极值理论计算风险值，带时变相关系数的多元波动率模型，贝叶斯推断．

本书可作为金融等专业高年级本科生或研究生的时间序列分析教材，也可供相关专业研究人员参考．

Ruey S. Tsay：Analysis of Financial Time Series（ISBN 0-471-41544-8）.

Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons，Inc.

本书版权登记号：图字：01-2004-0893

图书在版编目（CIP）数据

金融时间序列分析/（美）蔡（Tsay，R. S.）著；潘家柱译．-北京：机械工业出版社，2006.4
（华章数学译丛）
书名原文：Analysis of Financial Time Series
ISBN 7-111-18386-X

Ⅰ．金…　Ⅱ．①蔡…　②潘…　Ⅲ．时间序列分析－应用－金融－分析　Ⅳ．F83

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 003941 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：王　玉
北京诚信伟业印刷有限公司印刷・新华书店北京发行所发行
2006 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1020mm 1/16・22.75 印张
定价：39.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：（010）68326294

译 者 序

时间序列分析在理论和经验上已成为金融市场研究的不可缺少的部分. 时间序列分析方法已是金融定量分析的主流方法之一. 近代计量经济和金融市场的许多研究成果都建立在时间序列分析的基础之上. Engle 和 Grange 因为他们的时间序列模型在经济金融中的广泛应用而获得 2003 年的诺贝尔经济学奖，就是时间序列分析方法的重要性在世界上被广泛认可的有力证明.

蔡瑞胸(Ruey S. Tsay)教授是美国芝加哥大学的计量经济与统计学的 H. G. B. 亚历山大(Alexander)教授. 他在计量经济学、统计学和金融市场的研究方面成果卓著. 他的这本《金融时间序列分析》涵盖了当前数理金融研究中最新的几个重要方面：风险值的计算、用显式表示的跳跃扩散过程进行期权定阶、高频金融数据的分析、带时变相关系数的多元波动率模型、马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)方法等. 本书从金融时间序列的基本特征出发，讨论一元金融时间序列的分析和应用、多个资产的收益率以及金融模型的贝叶斯推断等问题. 全书都在利用实例和实际的金融数据，来说明所述模型和方法的应用，并附有计算程序. 这是一本比较全面系统地介绍金融计量模型，及其在金融时间序列数据的建模和预测中的应用的好书，在国外已被广泛引用.

译者几年来在北京大学金融数学系开设"金融时间序列分析"的课程，深知在课程中既做到理论和实际相结合又做到深入浅出的难度. 蔡教授在本书中做到了理论与实际相结合，在叙述方式上深入浅出，而且结合了许多最新的金融计量学的研究成果和方法. 本书对学习金融经济学、统计学的本科生和研究生来说，是一本很好的教科书；对管理、金融方面的业内人士和研究人员是一本很好的参考书. 我相信本书中译本的出版对我国的金融计量学和统计学的教学、对现代金融计量方法在我国金融界的应用、对我国金融市场的量化研究工作都是有益的.

刘淑霞协助翻译了第 5～10 章，王辉、郭沁苗、肖业英和李宛朋也参与了部分翻译工作. 没有他们的帮助本书的翻译工作是不可能完成的. 对北京大学金融数学系的同事们的理解和支持，在此一并表示衷心的感谢. 由于时间仓促，本人的精力和水平有限，翻译的谬误之处一定不少，望同行们和读者们多多指正.

潘家柱

2005 年 12 月

前　言

本书由自 1999 年我在芝加哥大学商学院所教的 MBA(工商管理硕士)金融时间序列分析课程发展而来. 它也包含了过去几年我开设的时间序列分析博士生课程的内容. 这是一本引论性质的书，旨在对金融计量模型及其在金融时间序列数据建模和预测中的应用，进行系统的、综合的阐述. 目标是使读者了解金融数据的基本特征，懂得金融计量模型的应用，并获得分析金融时间序列的经验.

本书可作为金融专业 MBA 学生的时间序列分析教材，也适用于商学、经济学、数学和统计学专业对金融计量学感兴趣的研究生和高年级本科生. 它也可以作为要进行风险值(Value at Risk)的计算、波动率(Volatility)建模和对具有先后相关性的数据进行分析等工作的研究人员和业内人士的参考书.

对计量经济学和统计学文献中的金融计量方法方面的最新进展进行概述是本书的突出特点. 这些进展包括当前的研究热点，如风险值(VaR)、高频数据分析和马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)方法等. 特别是，包含一些在学术杂志上尚未发表的最新成果，请参阅第 6 章中关于使用有显式公式的跳跃扩散方程来进行衍生产品的定价，第 7 章中基于非齐次二维泊松(Poisson)过程的极值理论计算风险值(VaR)，以及第 9 章中带时变相关系数的多元波动率模型. 之所以介绍 MCMC 方法，是因为这类方法在金融计量中很有威力，并有大量的应用，而且将来的应用范围会更加广泛.

强调实例和数据分析是本书的另一个突出特点. 全书采用实际金融数据来说明所讨论模型和方法的应用. 使用多种计算机软件进行分析；建立线性时间序列模型用 SCA(Scientific Computing Associate，科学计算助手)；估计波动率模型用时间序列的回归分析(Regression Analysis for Time Series，RATS)；实现神经网络和绘制附图用 S-Plus. 运行这些软件所需的某些命令在各章后的附录中给出. 特别地，用来估计多元波动率模型的复杂的 RATS 程序在第 9 章附录 A 中给出. 我采用了一些自己和其他人编的 Fortran 程序来对简单的期权定价、估计极值模型、计算风险值和贝叶斯(Bayesian)方法进行分析. 一些数据集和程序可以在国际互联网上获得，网址为：http://www.gsb.uchicago.edu/fac/ruey.tsay/teaching/fts.

第 1 章描述金融时间序列数据的一些基本特征. 其他章分为三个部分：第一部分由第 2 章至第 7 章组成，讨论一元金融时间序列的分析和应用；第二部分包括第 8 章和第 9 章，是关于多个资产收益率序列的；最后一部分是第 10 章，介绍用 MCMC 方法进行金融中的贝叶斯推断.

要完全读懂本书需要具备基本的统计学概念和知识. 在每章中，当一个必要的统计学概念第一次出现时，我都要给一个简短的回顾. 即使这样，还是竭力推荐统计学或商业统计学的必备知识，包括概率分布、线性回归分析. 读懂全书中所讨论的应用还需要了解金融知识. 然

而，具备较好计量经济学和统计学背景的读者，也会在本书中发现多方面有趣的主题和带挑战性的问题.

作为MBA的课程，第2章和第3章可作为核心内容，再加上一些非线性方法(如第4章的神经网络及第5～7章和第10章中讨论的应用). 对贝叶斯推断感兴趣的读者可以从第10章前5节开始阅读.

金融时间序列分析的研究发展迅速，新成果不断出现. 虽然我已经力图覆盖较广的范围，但仍有许多主题没有涉及或只是一带而过.

我真诚地感谢我的老师和亲密的朋友刁锦寰先生，是他在这些年中给了我指导、鼓励和钻研统计应用的坚定信念. 感谢 Steve Quigley、Heather Haselkorn、Leslie Galen、Danielle LaCourciere 和 Amy Hendrickson，没有他们的帮助这本书是不可能出版的. 感谢 Richard Smith，他送给我极值理论的估计程序. 感谢 Bonnie K. Ray，他对本书的好几章都有非常有益的建议. 感谢 Steve Kou 送给我他的关于跳跃扩散模型论文的预印本. 感谢 Robert E. McCulloch 许多年来在 MCMC 方法上的合作. 感谢选修我的金融时间序列分析课程的许多学生的反馈和投入. 感谢 Jeffrey Russell 和 Michael Zhang 关于高频金融数据的深入讨论. 也感谢芝加哥大学商学院和美国国家科学基金会的支持. 最后，对我的妻子 Teresa 的一贯支持、鼓励和理解，对 Julie、Richard 和 Vicki 给我带来的快乐和灵感，对我的父母亲给我的关爱，表示衷心的谢意.

R. S. T.

芝加哥，伊利诺伊州

目 录

第 1 章　金融时间序列及其特征

金融时间序列分析研究的是资产价值随时间演变的理论与实践. 它是一个带有高度经验性的学科，但也像其他科学领域一样，理论是形成分析推断的基础. 然而，金融时间序列分析有一个区别于其他时间序列分析的主要特点：金融理论及其经验的时间序列都包含不确定因素. 例如，资产波动率有各种不同的定义，对一个股票收益率序列，波动率是不能直接观察到的. 正因为带有不确定性，统计理论和方法在金融时间序列分析中起重要作用.

本书的目的是提供金融时间序列的一些知识，介绍一些对分析金融时间序列有用的统计工具，使读者获得各种经济计量方法在金融中应用的经验. 第 1 章引入资产收益率的基本概念，并简短介绍全书的内容. 第 2 章回顾一些线性时间序列分析中的基本概念，如平稳性、自相关函数，引入一些简单的模型来处理序列的先后相关性，讨论具有时间序列误差的回归模型、季节性、单位根非平稳性和长记忆过程等. 第 3 章集中讨论条件异方差性(即资产收益率的条件方差)的建模，讨论各种新近发展起来的描述资产收益率的波动率随时间演变的各种经济计量模型. 在第 4 章中我们讨论金融时间序列中的非线性性，引入能辨别非线性序列与线性序列的检验统计量，并讨论几个非线性模型. 这一章还介绍非参数估计方法、神经网络，展示非线性模型在金融中的各种应用. 第 5 章考虑高频金融数据的分析和这种分析在讨论市场微观结构中的应用，阐明不同步(或不同时)的交易和讨价还价的弹跳会产生股票收益的先后相关性，还研究不同交易之间时间持续的动态规律和一些分析交易数据的计量经济模型. 在第 6 章中，我们引入连续时间扩散模型和动态规律的伊藤(Ito)引理，导出 Black-Scholes 期权定价公式，用简单的、带跳跃的扩散模型来刻画期权市场常见的一些特征. 第 7 章讨论极值理论、厚尾分布及其在金融风险管理中的应用. 特别地，要讨论计算一个金融头寸风险值(VaR)的各种方法. 第 8 章集中讨论多元时间序列分析和简单的多元模型，研究时间序列之间的交叉延迟关系，讨论简化一个多元序列动态结构和降低维数的方法，引进协整(Co-integration)和门限协整(Threshold Co-integration)，并用来研究金融市场中的套利(Arbitrage)机会. 第 9 章介绍多元波动率模型，其中包括带时变相关系数的模型，讨论怎样对一个条件协方差阵重新进行参数化，使之满足正定性的限制，并降低波动率建模的复杂性. 最后，在第 10 章中，我们介绍统计文献中一些新近发展起来的蒙特卡罗马尔可夫链(MCMC)方法，并把这些方法应用于各种金融的研究问题，如随机波动率和马尔可夫转换模型的估计.

本书着重强调应用和经验数据分析，每章都有实际例子，很多时候是用金融时间序列的经验特征来作为产生经济计量模型的动机. 必要时，还提供用来分析数据的计算程序和命令. 有的程序在附录中给出. 各章的练习题中用到很多实际数据集.

1.1 资产收益率

多数金融研究是针对资产收益率而不是资产价格. Campbell, Lo 和 MacKinlay(1997)给出了两个使用收益率的主要理由：第一，对普通的投资者来说，资产收益率是投资机会的完全的、尺度自由的概括；第二，收益率序列比价格序列更容易处理，因为前者有更好的统计性质. 然而，资产收益率有多种定义.

设 P_t 是资产在 t 时刻的价格. 下面给出全书中要用的一些收益率的定义. 暂时假定资产不支付分红.

单周期简单收益率

若从第 $t-1$ 天到第 t 天(一个周期)持有某种资产，则简单毛收益率为

$$1+R_t=\frac{P_t}{P_{t-1}} \quad 或 \quad P_t=P_{t-1}(1+R_t), \tag{1.1}$$

对应的单周期简单净收益率或称简单收益率为

2

$$R_t=\frac{P_t}{P_{t-1}}-1=\frac{P_t-P_{t-1}}{P_{t-1}}. \tag{1.2}$$

多周期简单收益率

若从第 $t-k$ 天到第 t 天这 k 个周期内持有某种资产，则 k 周期简单毛收益率为

$$\begin{aligned}1+R_t[k]&=\frac{P_t}{P_{t-k}}=\frac{P_t}{P_{t-1}}\times\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\times\cdots\times\frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}\\&=(1+R_t)(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-k+1})\\&=\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j}).\end{aligned}$$

这样，k 周期简单毛收益率就是所包括的 k 个单周期简单毛收益率之乘积，称为复合收益率. k 周期简单净收益率是 $R_t[k]=(P_t-P_{t-k})/P_{t-k}$.

在实践中，实际的时间区间对讨论和比较收益率很重要(例如是月收益率还是年收益率). 若时间区间没有给出，那么隐含假定时间区间为一年. 如果持有资产的期限为 k 年，则年度化的(平均的)收益率定义为

$$年度化的\{R_t[k]\}=\left[\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})\right]^{1/k}-1.$$

这是由所包括的 k 个单周期简单毛收益率的几何平均得到的，它可以用下式计算：

$$年度化的\{R_t[k]\}=\exp\left[\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\ln(1+R_{t-j})\right]-1,$$

其中 $\exp(x)$ 表示指数函数，$\ln(x)$ 是正数 x 的自然对数. 因为计算算术平均值比计算几何平均值容易，并且单周期收益率一般很小，我们可以用一阶泰勒(Taylor)展开去近似年度化的收益率，得到

$$年度化的\{R_t[k]\}\approx\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}R_{t-j}. \tag{1.3}$$

然而，在有些场合，式(1.3)近似的程度并不好.

连续复合

在引进连续复合的收益率之前，我们讨论一下复合的效果. 假定银行存款的年利率为10%，最初存款为1美元. 假如该银行每年支付一次利息，那么一年之后存款的额度变为1+ 3
0.1=1.1美元. 假如该银行半年付息一次，六个月的利息率是10%/2=5%，第一年之后额度是$1(1+0.1/2)^2=1.1025$. 一般地，如果银行一年付息m次，那么每次支付的利息率为$10\%/m$，一年后存款的额度变成$1(1+0.1/m)^m$美元. 表1-1给出一些常用的时间间隔下年利率为10%时存款1美元的结果. 可见，净值趋于$1.1052\approx\exp(0.1)$，这个值就是连续复合的结果. 我们可以清楚地看到复合的效果.

表1-1 复合效果的说明：期限为1年，年利率为10%

类型	支付次数	每周期的利率	净值(美元)
一年	1	0.1	1.100 00
半年	2	0.05	1.102 50
季度	4	0.025	1.103 81
月	12	0.008 3	1.104 71
周	52	$\frac{0.1}{52}$	1.105 06
天	365	$\frac{0.1}{365}$	1.105 16
连续地	∞		1.105 17

一般地，连续复合的净资产值A是

$$A = C\exp(r\times n), \tag{1.4}$$

其中r是年利率，C是初始资本，n是年数(可为小数——译者注). 由式(1.4)，我们有

$$C = A\exp(-r\times n). \tag{1.5}$$

这叫做n年后价值为A的资产的现值，这里我们假定连续复合的年利率为r.

连续复合收益率

资产的简单毛收益率的自然对数称为连续复合收益率或对数收益率(log-return)：

$$r_t = \ln(1+R_t) = \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1}, \tag{1.6}$$

其中$p_t=\ln P_t$. 连续复合收益率r_t与简单净收益率R_t相比有一些优点. 首先，对多周期收益率，我们有 4

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1+R_t[k]) = \ln[(1+R_t)(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1+R_t)+\ln(1+R_{t-1})+\cdots+\ln(1+R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}. \end{aligned}$$

这样，连续复合多周期收益率就是所连续包括的单周期收益率之和. 其次，对数收益率有更容易处理的统计性质.

资产组合收益率

由N个资产组成的一个资产组合的简单净收益率是它所包含的各个资产的简单净收益率

的加权平均，其中每个资产的权重是资产组合的总价值中该资产的价值所占的百分比．设 p 是一个资产组合，其在资产 i 上的权重为 w_i，那么 p 在 t 时刻的简单收益率 $R_{p,t}=\sum_{i=1}^{N} w_i R_{it}$，其中 R_{it} 是资产 i 的简单收益率．

然而，资产组合的连续复合收益率没有上述方便的性质．如果简单收益率 R_{it} 的绝对值都很小的话，我们有 $r_{p,t}\approx\sum_{i=1}^{N} w_i r_{it}$，其中 $r_{p,t}$ 是该组合在 t 时刻的连续复合收益率．这种近似经常被用来研究资产组合的收益率．

分红

如果一个资产周期性地支付分红，我们必须修改资产收益率的定义．设 D_t 是一个资产在第 $t-1$ 天和第 t 天之间的分红，P_t 是该资产在第 t 个周期末的价格．这样，分红是不包含在 P_t 中的．因此，t 时刻简单净收益率和连续复合收益率变成

$$R_t=\frac{P_t+D_t}{P_{t-1}}-1,\quad r_t=\ln(P_t+D_t)-\ln P_{t-1}.$$

超出收益率

一个资产的超出收益率是该资产的收益率与某个参考资产的收益率之差．这个参考资产通常是无风险的，如美国短期国债的收益率．简单超出收益率和对数超出收益率分别定义为

$$Z_t=R_t-R_{0t},\quad z_t=r_t-r_{0t},\tag{1.7}$$

其中 R_{0t} 和 r_{0t} 分别是该参考资产的简单收益率和对数收益率．在金融文献中，超出收益率被认为是一个套利投资的赢利，在这个投资组合中对某资产持多头头寸而对参考资产持空头头寸．

注释： 多头金融头寸意指持有某资产．空头头寸意指卖出不属自己的资产．这需通过从已购买该资产的投资者那里借入资产来完成．在之后的某天，卖空者有义务买进和借入时完全相同数量的股份偿还给借出者．因为偿还时要求的是相等数量股
5 份，而不是相等数量的美元，卖空者会由于该资产价格的下跌而获利．如果在空头持续期间对该资产有现金分红，则支付给做空买卖的买者．卖空者也必须从自己的资源里配备相应的现金分红来补偿借出者．换句话说，卖空者有义务支出所借资产的现金分红给借出者(见 Cox 和 Rubinstein (1985))．

关系总结

简单收益率 R_t 与连续复合(或对数)收益率 r_t 的关系是

$$r_t=\ln(1+R_t),\quad R_t=e^{r_t}-1.$$

收益率的时间累积产生

$$1+R_t[k]=(1+R_t)(1+R_{t-1})\cdots(1+R_{t-k+1}),$$
$$r_t[k]=r_t+r_{t-1}+\cdots+r_{t-k+1}.$$

如果连续复合年利率为 r，则资产的现值与资产的将来值的关系为

$$A=C\exp(r\times n),\quad C=A\exp(-r\times n).$$

1.2 收益率的分布性质

要研究资产收益率，最好是从它们的分布性质开始．目的是弄清不同资产、不同时间收益率的表现．考虑 N 个资产，持有这 N 个资产 T 个时间周期，如 $t=1$，…，T．对每个资产 i，r_{it} 表示它在 t 时刻的对数收益率．所要研究的对数收益率为$\{r_{it}; i=1, \cdots, N; t=1, \cdots, T\}$．也可以考虑简单收益率$\{R_{it}; i=1, \cdots, N; t=1, \cdots, T\}$和对数超出收益率$\{z_{it}; i=1, \cdots, N; t=1, \cdots, T\}$．

1.2.1 统计分布及其矩的回顾

我们简短地回顾一下统计分布的一些基本性质和随机变量的矩．R^k 表示 k 维欧几里得空间，$\boldsymbol{x}\in R^k$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 是 R^k 中的点，考虑两个随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, \cdots, X_k)'$和 $\boldsymbol{Y}=(Y_1, \cdots, Y_q)'$．$P(\boldsymbol{X}\in A, \boldsymbol{Y}\in B)$表示 $\boldsymbol{X}$ 在子空间 $A\subset R^k$ 中、$\boldsymbol{Y}$ 在子空间 $B\subset R^q$ 中的概率．本书的大部分场合，都假定两个随机向量是连续的． 6

联合分布

函数

$$F_{X,Y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})=P(\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}\leqslant\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{x}\in R^p,\boldsymbol{y}\in R^q$$

是带参数$\boldsymbol{\theta}$的 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的联合分布，其中不等号"$\leqslant$"是分量对分量的运算．$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的规律由 $F_{X,Y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta})$刻画．如果 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的联合概率密度函数 $f_{x,y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta})$存在，则

$$F_{X,Y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{x,y}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z};\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\mathrm{d}\boldsymbol{w}.$$

这时，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是连续随机向量．

边际分布

$\boldsymbol{X}$ 的边际分布是

$$F_X(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})=F_{X,Y}(\boldsymbol{x},\infty,\cdots,\infty;\boldsymbol{\theta}).$$

这样，$\boldsymbol{X}$ 的边际分布可通过对 $\boldsymbol{Y}$ 求和(求积分)得到．对 $\boldsymbol{Y}$ 的边际分布也可类似得到．

如果 $k=1$，X 是一个一元随机变量，其分布函数为

$$F_X(x)=P(X\leqslant x;\boldsymbol{\theta}),$$

称为 X 的积累分布函数(cumulative distribution function，CDF)．一个随机变量的 CDF 是不减的[即，对 $x_1\leqslant x_2$ 有 $F_X(x_1)\leqslant F_X(x_2)$，且 $F_X(-\infty)=0$，$F_X(\infty)=1$]．对给定的概率 p，使 $p\leqslant F_X(x_p)$的最小实数 x_p 叫做随机变量 X 的 p 分位点，即

$$x_p=\inf_x\{x\,|\,p\leqslant F_X(x)\}.$$

条件分布

给定 $\boldsymbol{Y}\leqslant\boldsymbol{y}$ 的条件下 $\boldsymbol{X}$ 的条件分布为

$$F_{X\mid Y\leqslant y}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})=\frac{P(\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}\leqslant\boldsymbol{y})}{P(\boldsymbol{Y}\leqslant\boldsymbol{y})}.$$

若所对应的概率密度函数存在，则给定 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}$ 的条件下，$\boldsymbol{X}$ 的条件密度为 7

$$f_{x|y}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})=\frac{f_{x,y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})}{f_y(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})},\tag{1.8}$$

其中边际密度函数 $f_y(\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{\theta})$由下式得到

$$f_y(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})=\int_{-\infty}^{\infty}f_{x,y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

从式(1.8)看，联合分布、边际分布和条件分布之间的关系为

$$f_{x,y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})=f_{x|y}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})\times f_y(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}).\tag{1.9}$$

这个相等关系在时间序列分析中经常用到(如在进行最大似然估计时). 最后，$\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$是相互独立的随机向量，当且仅当 $f_{x|y}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\theta})=f_x(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\theta})$，这时$f_{x,y}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y};\ \boldsymbol{\theta})=f_x(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\theta})f_y(\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{\theta})$.

随机变量的矩

一个连续型随机变量 X 的 l 阶矩定义为

$$m'_l=E(X^l)=\int_{-\infty}^{\infty}x^lf(x)\mathrm{d}x,$$

其中"E"表示期望，$f(x)$是 X 的概率密度函数. 一阶矩称为 X 的均值(mean)或期望，它表示的是分布的中心位置，记为 μ_x. X 的 l 阶中心矩定义为

$$m_l=E[(X-\mu_x)^l]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^lf(x)\mathrm{d}x,$$

只要式中的积分是存在的. 二阶中心矩可度量 X 取值的变化程度，称为 X 的*方差*(variance)，记为 σ_x^2. 方差的正平方根 σ_x 称为 X 的*标准差*. 一个正态分布是由随机变量的头两阶矩唯一决定的. 对其他分布，可能要了解其更高阶矩.

三阶中心矩度量 X 关于其均值的对称性，而四阶中心矩度量 X 的尾部，在统计学中，标准化的三阶矩叫*偏度*(skewness)，标准化的四阶矩叫做*峰度*(kurtosis)，它们分别用来描述随机变量的对称程度和尾部厚度. 具体地，X 的偏度和峰度定义为

8

$$S(x)=E\left[\frac{(X-\mu_x)^3}{\sigma_x^3}\right],\quad K(x)=E\left[\frac{(X-\mu_x)^4}{\sigma_x^4}\right].$$

量 $K(x)-3$ 叫做*超出峰度*(excess kurtosis)，因为对一个正态分布，$K(x)=3$. 这样，正态随机变量的超出峰度为 0. 具有正的超出峰度的分布称具有厚尾性，意指该分布在其支撑(support)的尾部有比正态分布更多的"质量". 在实际中，这意味着来自于这样一个分布的随机样本会有更多的极端值.

在应用中，偏度和峰度可以由它们对应的样本偏度和样本峰度来估计. 设$\{x_1,\ \cdots,\ x_T\}$是 X 的 T 个观察值的随机样本，样本均值为

$$\hat{\mu}_x=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_t,\tag{1.10}$$

样本方差为

$$\hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\hat{\mu}_x)^2,\tag{1.11}$$

样本偏度为

$$\hat{S}(x)=\frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\hat{\mu}_x)^3, \tag{1.12}$$

样本峰度为

$$\hat{K}(x)-3=\frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\hat{\mu}_x)^4. \tag{1.13}$$

在正态分布假定下，$\hat{S}(x)$和$\hat{K}(x)$均渐近正态分布，均值为零，而方差分别是 $6/T$ 和 $24/T$，(见 Snedecor 和 Cochran(1980)，第 78 页).

1.2.2 收益率的分布

对数收益率$\{r_{it};\ i=1,\ \cdots,\ N;\ t=1,\ \cdots,\ T\}$的最一般的模型是它们的联合分布函数：

$$F_r(r_{11},\cdots,r_{N1};r_{12},\cdots,r_{N2};\cdots;r_{1T},\cdots,r_{NT};\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\theta}), \tag{1.14}$$

其中$\boldsymbol{Y}$是由一些变量组成的状态向量，这些变量描述了决定资产收益率的环境，$\boldsymbol{\theta}$是唯一决定分布函数$F_r(.)$的参数向量．概率分布$F_r(.)$刻画了收益率r_{it}和$\boldsymbol{Y}$的随机行为．在许多金融研
究中，状态向量$\boldsymbol{Y}$当作给定的，而主要关心的是给定$\boldsymbol{Y}$的条件下$\{r_{it}\}$的条件分布．因此，资 9
产收益率的实证分析是去估计未知参数$\boldsymbol{\theta}$，并在给定一些过去的对数收益率的条件下，对$\{r_{it}\}$的行为做出统计推断.

式(1.14)的模型太广了，以至于没有实际应用价值．然而，它提供了一个一般的框架，在这个框架中，可建立资产收益率r_{it}的适当的计量经济模型.

有些金融理论，比如 Sharpe 在 1964 年提出的资本资产定价模型(Capital Asset Pricing Model，CAPM)，考虑的是在单个时间点t上N个收益率的联合分布(即$\{r_{1t},\ \cdots,\ r_{Nt}\}$的分布)．另外一些理论则强调各个资产收益率的动态结构(即对一个给定的资产i，$\{r_{i1},\ \cdots,\ r_{iT}\}$的分布)．本书中，我们对这两个方面都很关心．在第 2 章至第 7 章的一元分析中，主要关心的是对资产i，$\{r_{it}\}_{t=1}^{T}$的联合分布．为此，把联合分布分解成如下形式

$$\begin{aligned}F(r_{i1},\cdots,r_{iT};\boldsymbol{\theta})&=F(r_{i1})F(r_{i2}\mid r_{1t})\cdots F(r_{iT}\mid r_{i,T-1},\cdots,r_{i1})\\&=F(r_{i1})\prod_{t=2}^{T}F(r_{it}\mid r_{i,t-1},\cdots,r_{i1}).\end{aligned} \tag{1.15}$$

这个分解式突出了对数收益率r_{it}在时间上的先后相依性．因此，主要问题就是条件分布$F(r_{it}\mid r_{i,t-1},\ \cdot)$的具体化；特别是条件分布是怎样随时间演变的．在金融中，不同的分布的具体化会导出不同的理论．例如，随机游动假定的一种形式就是条件分布$F(r_{it}\mid r_{i,t-1},\ \cdots,\ r_{i1})$等于边际分布$F(r_{it})$．这时，收益率在时间上是先后相互独立的，从而是不可预报的.

通常地，我们把资产收益率当作连续型随机变量对待，尤其是对低频计算出的指数收益率或股票收益率，用它们的概率密度函数．这时，利用等式(1.9)，我们把式(1.15)的分解写成

$$f(r_{i1},\cdots,r_{iT};\boldsymbol{\theta})=f(r_{i1};\boldsymbol{\theta})\prod_{t=2}^{T}f(r_{it}\mid r_{i,t-1},\cdots,r_{i1},\boldsymbol{\theta}). \tag{1.16}$$

对高频资产收益率，离散性就变成一个问题．例如，在纽约股票交易所(New York Stock

Exchange，NYSE)股票的价格是以一个微小量(tick size)的倍数变化的．这个微小量在 1997 年 7 月之前取为 1/8 美元，而在 1997 年 7 月至 2001 年 1 月是 1/16 美元．因此，NYSE 记录的个股的收益率不是连续型的．我们将在第 5 章讨论高频的股价变化和在价格发生变化之间的时间持续期．

10 **注释**：2000 年 8 月 28 日，纽约股票交易所开始了一项试验性的程序，对七支股票以十进制小数计价，而美国股票交易所(American Stock Exchange，AMEX)开始对六支股票和两种期权种类以十进制小数计价．在 2000 年 9 月 25 日和 12 月 4 日，NYSE 分别有 57 个股票和 94 个股票加入该程序．在 2001 年 1 月 29 日，所有在 NYSE 和 AMEX 交易的股票都开始以十进制进行交易．

式(1.16)启示我们在资产收益率的研究中条件分布比边际分布更常用．然而，边际分布仍然是需要关心的．特别是，利用过去的收益率数据，估计边际分布比估计条件分布容易．另外，有时通过实证看出资产收益率只有很弱的先后相关性，从而它们的边际分布与条件分布是很相近的．

在对资产收益率的边际分布研究的文献中，已经用到好几种统计分布，包括正态分布、对数正态分布、稳定分布和正态分布的尺度混合(scale-mixture)．下面我们简短讨论一下这几种分布．

正态分布

金融研究中传统的假设是：简单收益率$\{R_{it}|t=1,\cdots,T\}$是独立的，且都服从一个固定均值和方差的正态分布．这个假设使得资产收益率的统计性质变得可以处理，但它遇到几个麻烦：第一，简单资产收益率的下界为-1，而正态分布的支撑是没有下界的，实直线上的任何值都可能取到；第二，如果R_{it}是正态分布的，那么多周期的简单收益率$R_{it}[k]$就不是正态分布的，因为它是单周期收益率的乘积；第三，经验结果不支持正态性假设，很多资产收益率数据表明它具有正的超出峰度．

对数正态分布

另一个常用的假定是：资产的对数收益率r_t是相互独立的且都服从均值为μ，方差为σ^2的正态分布．那么，简单收益率是独立同分布的对数正态的随机变量，均值和方差分别为

$$E(R_t)=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)-1,\quad \mathrm{Var}(R_t)=\exp(2\mu+\sigma^2)[\exp(\sigma^2)-1]. \tag{1.17}$$

这两个式子在研究资产收益率时是有用的(如用给对数收益率所建立的模型进行预报时)．反之，假设简单收益率服从对数正态分布，均值为m_1，方差为m_2，则对应的对数收益率r_t的均值和方差分别为

$$E(r_t)=\ln\left[\frac{m_1+1}{\sqrt{1+\frac{m_2}{(1+m_1)^2}}}\right],\quad \mathrm{Var}(r_t)=\ln\left[1+\frac{m_2}{(1+m_1)^2}\right].$$

因为有限个独立同分布的正态随机变量之和仍服从正态分布，在$\{r_t\}$的正态假定下$r_t[k]$
11 也是正态的．另外，对r_t没有下界，并且从$1+R_t=\exp\{r_t\}$可见R_t的下界也能满足．然而，对数正态假定不是与历史股票收益率的所有性质都一致的，特别是很多股票收益率表现出正的超出峰度．

稳定分布

稳定分布是正态分布的自然推广，它们在加法运算下是稳定的，这一点符合连续复合收益率 r_t 的要求. 另外，稳定分布能刻画历史股票收益率所显示出来的超出峰度. 然而，非正态稳定分布没有有限方差，这一点与大部分金融理论相矛盾. 还有，用非正态的稳定分布进行统计建模是困难的. 非正态稳定分布的一个例子是柯西(Cauchy)分布，它关于它的中位数是对称的，但方差是无限的.

正态分布的尺度混合

股票收益率的新近研究中，倾向于利用正态分布的尺度混合或有限混合. 在正态分布的尺度混合的假定下，对数收益率 r_t 是服从均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布(即 $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$)，但是，$\sigma^2$ 是一个随机变量，它服从一个正的分布(如 σ^{-2} 服从一个伽马(Gamma)分布). 正态分布的有限混合的一个例子是

$$r_t \sim (1-X)N(\mu,\sigma_1^2) + XN(\mu,\sigma_2^2),$$

其中 X 是伯努利随机变量，$P(X=1)=\alpha$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，$\sigma_1^2$ 较小而 σ_2^2 较大. 例如，对 $\alpha=0.05$，有限混合指的是 95%的收益率服从 $N(\mu, \sigma_1^2)$，5%的收益率服从 $N(\mu, \sigma_2^2)$，σ_2^2 的较大值使混合把更多的“质量”放在分布的尾部. 来自于 $N(\mu, \sigma_2^2)$ 的收益率的百分比较低，说的是大多数收益率服从一个简单的正态分布. 正态分布混合的优点包括它们保持了正态分布的易操作性、有有限高阶矩，能抓住超出峰度. 但难以估计混合参数(如有限混合中的 α).

图 1-1 显示的是正态分布有限混合、柯西分布和标准正态分布的概率密度函数. 正态有限混合是 $(1-X)N(0, 1)+XN(0, 16)$，$\alpha=0.05$，混合密度是标准的. 柯西密度函数是

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

可见，柯西分布有比正态有限混合更厚的尾部，而正态有限混合有比标准正态更厚的尾部. 12

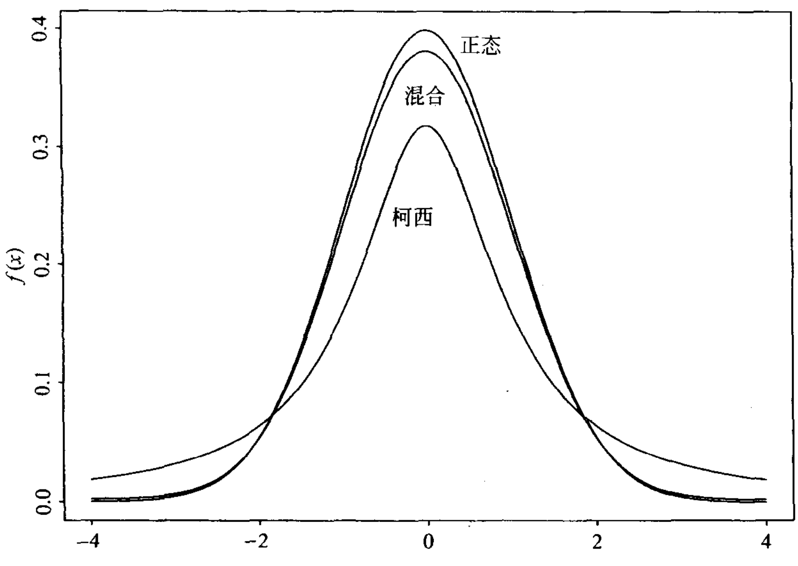

图 1-1 有限混合分布、稳定分布和标准正态分布密度函数的比较