数学基础知识丛书

分式与根式

周锦辉　黄久征　孔馨逸

江苏人民出版社

分式与根式

周锦辉　黄久征　孔馨逸

江苏人民出版社

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分五个部分，第一部分是有理分式的性质和运算，第二部分是分式方程的解法，第三部分是部分分式，第四部分是根式运算，第五部分是根式方程的各种解法。

本书第一部分由孔馨逸同志编写，第二、三部分由黄久征同志编写，第四、五部分由周锦辉同志编写。

分 式 与 根 式

周锦辉　黄久征　孔馨逸

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
丹阳人民印刷厂印刷

1980年5月第1版
1980年5月第1次印刷
印数：1—54,500册

书号：13100.046　定价：0.65元

目　录

一、有理分式

§1 有理分式的概念

1. 有理式的概念

人们在改造客观世界的长期斗争中，创造了用字母代表数，为解决数量计算问题提供了有力的工具。

例如，要挖一条排水沟，如果沟的长、宽、深分别是 a（米）、b（米）、c（米），那么，挖出的土方就等于

$$a \cdot b \cdot c \text{（立方米）。}$$

若参加挖沟人数是 x，则平均每人要挖土方为

$$\frac{abc}{x} \text{（立方米）。}$$

又如，物体作匀速直线运动时，设速度为 v（米/秒），时间为 t（秒），距离为 s（米），那么，速度就等于

$$v = \frac{s}{t} \text{（米/秒）。}$$

可见，用字母表示数能把数量计算的规律概括地表示出来，这就更深刻、更完全地反映客观事物。

观察下列由数和表示数的字母所构成的式子：

$$\frac{1}{2},\quad a,\quad \frac{abc}{x},\quad \frac{s}{t},\quad \frac{y^2-1}{x+1}。$$

这些式子里的运算，仅限于加、减、乘（乘方）、除。运

算受到这种限制的式子，我们给出下面的定义：

凡有限次使用加、减、乘、（乘方）、除的运算符号，把字母和数联系在一起的式子叫做**有理代数式**，简称**有理式**。

在实际问题中，常常需要用数来代替有理式中的字母而计算出结果来。如以1900、1.25、1、1000分别代替有理式$\frac{abc}{x}$中的a、b、c、x进行计算，得：

$$\frac{1900\times1.25\times1}{1000}=2.375。$$

这个结果表明，1000人去挖长1900米，宽1.25米，深1米的排水沟，平均每人要挖土方2.375（立方米）。在计算时，必须考虑用哪些数去代替字母，才有意义。在这个实际问题中，字母x表示人数，只能允许取正整数，而a、b、c分别表示排水沟的长、宽、深，也只能允许取正数。由于有理式中用零来做除数是没有意义的，所以有理式中，分母只能取不等于零的数。

用数代替有理式中的字母，按照有理式的运算顺序进行计算的结果，叫做**有理式的值**。字母所允许取的值，叫做**字母的允许值**。允许值的全体所组成的一个集合，叫做**字母的允许值集**。

如上面排水沟的例题中，有理式$\frac{abc}{x}$中字母a、b、c的允许值是任何正数，x的允许值是任何正整数。2.375是有理式$\frac{abc}{x}$当$a=1900$，$b=1.25$，$c=1$，$x=1000$时的值。

考虑到以后的需要，我们确定在实数范围内来研究有理

式，即有理式中的字母所表示的数，都是实数。有理式里字母的允许值集，如果没有特别声明，都是指的使这个有理式有意义的一切实数的集合。

例1 在有理式$\frac{3+x}{4-x}$中，字母x的允许值集是除去4以外的一切实数的集合；因为当$x=4$时，有理式$\frac{3+x}{4-x}$无意义。

例2 在有理式$\frac{3-x}{(2-x)(3+x)}$中，字母x的允许值集是除去2和-3以外的一切实数的集合；因为当$x=2$或$x=-3$时，这个有理式失去意义。

例3 在有理式$\frac{1}{x^2-3}$中，字母x的允许值集是除去$\pm\sqrt{3}$以外的一切实数的集合；因为当$x=\pm\sqrt{3}$时，这个有理式失去意义。

如果同时研究两个或两个以上的有理式时，它们的允许值集是指它们的公共部分，就是这两个或两个以上的有理式同时有意义的一切实数的集合。

对于两个有理式，用它们所含字母的允许值集中的任何一组数去代替这些字母，如果两个有理式的值总是相等的，就把这两个有理式叫做**恒等**。

一个有理式用另一个与它恒等的有理式去代换时，这种变换叫做有理式的**恒等变换**或**恒等变形**。

2. 有理分式的概念

观察下列有理式：

$a+3x^2$，　　$(x-2)(x^2+4x+5)$，

$$3xy,\quad \frac{x^2y^2}{5},\quad \frac{abc}{x},\quad \frac{ax+by}{cx+d},$$

$$\frac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{ab}{x+y}}{a^2+b^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}}。$$

在这些式中，可分成二类：一类不包含以含有字母的式子来除的运算（前面三个）；另一类包含以含有字母的式子来除的运算（后面三个）。

凡不包含以含有字母的式子来除的运算的有理式叫做**整式或多项式。**

凡包含以含有字母的式子来除的运算的有理式叫做**分式。**

必须指出：有时研究某个整式，只考虑所有字母中的某些字母，那么就把这个整式称为关于某些字母的整式。例如对字母 x 来研究整式 ax^2+bx+c 时，就称它为关于字母 x 的整式。当指明整式是关于某些字母的整式时，其余的字母就看作确定的数。对于分式也是这样，例如对字母 x、y 来研究有理式 $\frac{x}{a^2+2}+y$ 就称它为关于字母 x、y 的整式，这时 a^2+2 看作一个确定的数；如果对全体字母来看，它就是分式。

如果 $P(x)$ 是关于字母 x 的一个多项式，$Q(x)$ 是关于字母 x 的一个非零多项式，那么，我们把这两个多项式的比：$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的有理式叫做**有理分式**，多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 分别叫做有理分式的**分子**和**分母**。

和整数可以看作分母是1的分数一样，任一多项式$P(x)$可以看作分母是1的有理分式：

$$P(x)=\frac{P(x)}{1}。$$

这样，多项式集合被包含在有理分式的集合中，而作为它的一部分。

必须注意，严格的说，分式的分子和分母都是多项式时才叫做有理分式，否则只是分式，而不是有理分式，例如

$\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{x+1}$与$\dfrac{1+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$都是分式但不是有理分式。为了叙述的方方便，本书有时也把有理分式简写为分式。

有理分式中：如果分子中的多项式的次数小于分母中多项式的次数，这个有理分式叫做**真分式**；如果分子中的多项式的次数不小于分母中多项式的次数，这个有理分式叫做**假分式**。

例如：$\dfrac{x-1}{x^2+1}$和$\dfrac{x^2-1}{x^3+x+1}$是真分式；

$\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$和$\dfrac{x^3-3}{x^2+1}$是假分式。

一个假分式可以化为整式与真分式的和，这个和称为**带分式**。

例如：$$\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2-\frac{1}{x^2+1};$$

$$\frac{x^3-3}{x^2+1}=x-\frac{x+3}{x^2+1};$$

$2-\frac{1}{x^2+1}$ 和 $x-\frac{x+3}{x^2+1}$ 都是带分式。

两个有理分式恒等，有下列定理（为了书写方便，常把P(x)简写为P，Q(x)简写为Q）。

定理1　两个有理分式$\frac{P}{Q}$与$\frac{P_1}{Q_1}$恒等

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1} \qquad (1)$$

的充分与必要条件是

$$P_1Q_1=PQ。\qquad (2)$$

证　先证充分条件，如果(2)成立，对于(1)式中的所有字母的值使$Q\neq0$，$Q_1\neq0$时，用$Q\cdot Q_1$除(2)式，就可以推导出$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}$的值也相等，由两个有理式恒等的定义，得到(1)式成立。

再证必要条件，如果(1)式成立，对于字母取$Q\neq0$和$Q_1\neq0$的一切数的值都相等。将等式(1)两边同乘以QQ_1后，由于所取字母x的数值有无限多个，而(2)式两端多项式的次数是有限的，这样，对于无限多个x的值(2)式两端均有相等的值，那么，(2)式成立。

推论　在$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}$中，**如果$P=P_1$，那么$Q=Q_1$。**

从定理1，可以较方便地判别两个有理分式是不是恒等，即只需要看它们的分子分母所构成的交叉乘积是不是恒等就可以了。

例4　有理分式$\frac{x^2+ax}{x^2-a^2}$和$\frac{x}{x-a}$是不是恒等？

解 因为$(x^2+ax)(x-a)=x^3-ax^2+ax^2-a^2x$

$$=x^3-a^2x,$$

又 $x(x^2-a^2)=x^3-a^2x$，

所以 $\dfrac{x^2+ax}{x^2-a^2}=\dfrac{x}{x-a}$。

例 5 求下列两式中的P和Q：

$$(1)\ \frac{P}{x^2+x}=\frac{1}{x};\qquad (2)\ \frac{1}{x-y}=\frac{Q}{x^3-y^3}。$$

解 (1) $\because \dfrac{P}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}$,

$\therefore x\cdot P=1\cdot(x^2+x)$。

$\because 1\cdot(x^2+x)=x(x+1)$,

$\therefore x\cdot P=x(x+1)$。

所以 $P=x+1$。

(2) $\because \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{Q}{x^3-y^3}$,

$\therefore (x-y)\cdot Q=1\cdot(x^3-y^3)$。

$\because 1\cdot(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)$,

$\therefore (x-y)\cdot Q=(x-y)(x^2+xy+y^2)$。

所以 $Q=x^2+xy+y^2$。

习 题 一

1.指出下列各式中哪些是有理式？

$\dfrac{5}{x}$, $\dfrac{a}{100}$, $\dfrac{1}{3x+2y}$, $\sqrt{x^2+2y}$。

2.求下列各式中字母的允许值集：

(1) x^2+3x+2; (2) $a-2ab+3b^2-a+2$;

（3） $\dfrac{7x^2+9}{(x-1)(2x-3)}$；　　　（4） $\dfrac{ab}{(a-1)(b+2)}$；

（5） $\dfrac{x}{x+y}$；　　　（6） $\dfrac{2x}{x^2+x+1}$；

（7） $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$；　　　（8） $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$。

3.求下列各有理式的值：

（1） $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$，　　　$a=5$，　$b=4$；

（2） $xy-x-y+1$，　　　$x=2$，$y=3$；

（3） $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}$，　　　$x=4$，　$y=2$。

4.判断下列各组有理分式是否恒等？

（1） $\dfrac{x+1}{x^2+x}$和$\dfrac{1}{x}$；　　　（2） $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}$和$\dfrac{1}{1-x}$；

（3） $\dfrac{(x-y)^2}{x^3-y^3}$和$\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$。

5.求下列各有理式中的P和Q：

（1） $\dfrac{P}{1+x^3}=\dfrac{1}{x+1}$；　　　（2） $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{Q}{x^2-y^2}$；

（3） $\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{P}{x^2+2x-3}$；　　　（4） $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{Q}{x^4-y^4}$。

§2　有理分式的基本性质

1.　有理分式的基本性质

根据定理1可以推导出有理分式的基本性质：

定理2　有理分式的分子和分母都乘以不等于零的多项式，则有理分式的值不变。

证　设有理分式为$\dfrac{P}{Q}$，K是不等于零的多项式，

由于 $P\cdot Q\cdot K=P\cdot Q\cdot K$

多项式的乘法是满足交换律和结合律的，所以有

$$P\cdot(Q\cdot K)=Q\cdot(P\cdot K)。$$

因为Q和K都不是零多项式，

根据定理1就可以得到

$$\frac{P}{Q}=\frac{PK}{QK}。$$

定理2是约简有理分式及通分法则的理论根据。

下面运用定理2研究一下分子、分母的符号。

在运算过程中，有时需要改变有理分式的分子或分母的符号。例如，$\frac{-x^2+2xy-y^2}{x-y}$的分子上各项都改号，便可化为$(x-y)^2$，并容易看出分子和分母的公因式来。但是怎样改变符号，才能保持和原有理分式相等呢？下面分两种情况来讨论：

(1)有理分式的分子和分母都改变符号时对该式的影响。

设有理分式为$\frac{P}{Q}$，那么分子和分母都乘以-1时，有理分式的值不变，于是有

$$\frac{P}{Q}=\frac{(-1)P}{(-1)Q}=\frac{-P}{-Q}。$$

所以把有理分式的分子和分母都改变符号，和原来的有理分式相等。例如：

$$\frac{2-x}{1-x}=\frac{x-2}{x-1}，$$

$$\frac{-x^2+2x-1}{-y^2-2y-1}=\frac{x^2-2x+1}{y^2+2y+1};$$

$$\frac{d-c}{(a-b)(b-a)}=\frac{c-d}{(a-b)(a-b)}=\frac{c-d}{(a-b)^2}。$$

（2）分子或分母不同时改变符号对有理分式的影响。

设有理分式为$\frac{P}{Q}$，那么

$$\frac{-P}{Q}=(-P)\div Q=-(P\div Q)=-\frac{P}{Q},$$

$$\frac{P}{-Q}=P\div(-Q)=-(P\div Q)=-\frac{P}{Q}。$$

所以只改变分子或分母的符号，那么原有理分式的符号也要改变，反过来，如果把原有理分式改变符号，那么要把分子改变符号或者分母改变符号。例如，

$$\frac{-x^2+2xy-y^2}{a-b}=-\frac{x^2-2xy+y^2}{a-b},$$

$$-\frac{1}{y-x}=\frac{1}{x-y}。$$

以上两种情况可以归结为：分子、分母和有理分式本身的三个符号，如果改变其中的任何两个，那么，有理分式的值不变。

例1　把下列各有理分式的分子和分母的因式都写成 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 的形式。

（1）$\frac{(b-c)(b-a)}{(a-b)(a-c)}$；（2）$\frac{-a^2+2ab-b^2}{(a-b)(c-b)^2(a-c)}$。

解　（1）$\frac{(b-c)(b-a)}{(a-b)(a-c)}=\frac{-(a-b)(b-c)}{-(a-b)(c-a)}$

$$=\frac{(a-b)(b-c)}{(a-b)(c-a)};$$

$$(2)\ \frac{-a^2+2ab-b^2}{(a-b)(c-b)^2(a-c)}=\frac{-(a^2-2ab+b^2)}{(a-b)[-(b-c)]^2[-(c-a)]}$$

$$=\frac{-(a-b)^2}{-(a-b)(b-c)^2(c-a)}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)(b-c)^2(c-a)}。$$

2.约分

(1)最高公因式

(i)在分数里，如果一个分数的分子和分母有大于1的公约数，可以约去它们的最大公约数，使这个分数变为最简分数。

在有理分式里，我们也可以用类似的方法来处理。

整式x^3y^2、x^2y^3、xy^4，有公因式x、y、y^2、xy、xy^2，在这些公因式中，xy^2的次数最高。

为此，有以下定义：

几个多项式的公因式中，次数最高的公因式，叫做这几个多项式的最高公因式。

最高公因式可以用H.C.F.表示。

例如，xy^2是多项式x^3y^2、xy^3和x^2y^4的最高公因式；$x(x+y)^2(x-y)^2$是多项式$x(x+y)^2(x-y)^3$和$xy(x+y)^3(x-y)^2$的最高公因式。

由最高公因式的定义可以知道，求几个多项式的最高公因式，先把它们分解因式，再把各式中公因式的最低次幂相乘。如果各个多项式的数字因数都是整数，通常取它们的绝对值的最大公约数作为它们的最高公因式的数字因数。

例2. 求$a^5b^3c^2d$、$-a^3b^6c^4d^2$和$\frac{1}{3}a^3bc^4d$的H.C.F.

解 所求的H.C.F.是a^3bc^2d。

例3　求$6x^2yz$、$-9xy^2z$和$15xy^3$的H.C.F.

解　所求的H.C.F.是$3xy$。

例4　求x^2-4y^2、$x^2+xy-2y^2$和$x^2+3xy+2y^2$的H.C.F.

解
$$x^2-4y^2=(x-2y)(x+2y),$$
$$x^2+xy-2y^2=(x+2y)(x-y),$$
$$x^2+3xy+2y^2=(x+2y)(x+y)。$$

∴所求的H.C.F.是$x+2y$。

例5求　$4x^3+4x^2-x-1$和$4x^3-8x^2-x+2$的H.C.F.

解
$$4x^3+4x^2-x-1=(2x+1)(2x-1)(x+1),$$
$$4x^3-8x^2-x+2=(2x+1)(2x-1)(x-2)。$$

∴所求的H.C.F.是$4x^2-1$。

在例5中容易看出，$x^2-\frac{1}{4}$也是它们的最高公因式，它与$4x^2-1$只相差一个常数因子，即$\frac{1}{4}$，〔$\because x^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(4x^2-1)$〕，因而对于两个多项式$P(x)$与$Q(x)$，如果不计不等于零的常数因子，那么它们的最高公因式是唯一的。

如果两个多项式例如$2x+3y$与$3x^2-y^2$没有公因式，这时，引入以下定义：

如果多项式$P(X)$与$Q(X)$除常数公因子外，没有其它公因式，就说$P(X)$与$Q(X)$是互质多项式. 两个互质多项式的最高公因式规定为1。

例如$2x+3y$与$3x^2-y^2$便是互质多项式，它们的最高公因式是1，倒过来，如果1是两个多项式$P(x)$与$Q(x)$的最高公因式，那么这两个多项式互质。

对于两个以上的多项式$P_1(x)$、$P_2(x)$、$\cdots P_n(x)$，除常数公因子外，没有其它公因式，就称这一组多项式互质。