

小学四年级

徐彪 主编

奥数训练

100类

举

一

反

三



南京大学出版社



组稿策划 高锦明 / 责任编辑 潘琳宁 / 责任校对 王 滨 / 装帧设计 曼 晓

做一题，解一类；
轻松搞定100招！

ISBN 7-305-04732-5/G · 940

定价：8.50元

ISBN 7-305-04732-5



9 787305 047329 >

小学四年级

潘小云 总主编
徐 伟

奥数训练

100类

举一反三

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学四年级奥数训练 100 类举一反三./ 徐彪主编.
南京:南京大学出版社,2006.5
ISBN 7-305-04732-5

I. 小... II. 徐... III. 数学课-小学-教学参考资料 IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 042420 号

书 名 小学四年级奥数训练 100 类举一反三
编 者 徐 彪
出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093
发行电话 025-83596923 025-83592317 传真 025-83328362
网 址 <http://press.nju.edu.cn>
电子邮件 nupress1@public1.ptt.js.cn
sales@press.nju.edu.cn(销售部)
印 刷 扬中市印刷有限公司
开 本 787×1092 1/16 印张 7.75 字数 190 千
版 次 2006 年 5 月第 1 版 2006 年 7 月第 3 次印刷
ISBN 7-305-04732-5/G·940
定 价 8.50 元

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

编 者 的 话

提高学生综合素质,发展学生的个性特长,不能靠突击速成,更不能脱离实际,拔苗助长。学生智力的发展和能力的提高是一个循序渐进、长期训练、螺旋上升的过程。

为了配合小学数学课外活动的开展,对学生进行长期、系统的奥林匹克数学内容的训练,我们组织一批有丰富经验的骨干教师编写了这套丛书,通过独特的一例三练的形式,帮助学生系统地、有效地掌握奥林匹克数学的经典内容,拓宽学生的知识视野,掌握解题方法和技巧,提高应试和参赛能力。

本丛书编写力求体现以下特点:

内容全面,螺旋上升。丛书按年级分解,每个年级设置100个专题,每个专题作为一个单元训练。100个专题基本概括了各年级奥林匹克数学的重要内容,并进行详细的归类。同时注意各个年级间的衔接,体现层次和梯度。

源于基础,着眼提高。各年级紧扣大纲,贴近教材。按照教学内容的编排顺序,从学生的知识结构和思维发展水平的实际出发设置专题,便于学生在掌握课本单元基础知识的前提下自学,进行拓展训练。

一例三练,举一反三。每个专题从浩瀚的题海中精选【典型题例】,“思路”给出分析和点拨;“详解”给出详细的或不同的解法;“诀窍”对本专题有关的知识、方法、技巧进行归纳和深化。【好题精练】配合本专题的知识点,设置三道练习题,让学生独立完成,培养学生触类旁通、举一反三的能力。

与时俱进,紧跟时代。全书编写体现了新课标精神,例题和练习题的内容吸收了近几年来各地数学竞赛出现的典型题,反映出新课标精神,体现时代性、趣味性、开放性、探索性、实践性,并注意密切联系生活实际,引导学生在生活中学数学、用数学。

本丛书在编写过程中参考了同类书籍中的精华,谨表诚挚谢意。由于时间和编者水平的限制,书中错误和不足之处在所难免,恳望批评和建议。

编 者

举一反三

目录

- | | | | |
|--------------------------|--------|------------------------|--------|
| 1 寻找规律巧填数 | (1) | 32 积、商的变化规律 | (32) |
| 2 从数表中找规律 | (2) | 33 加减法的错中求解 | (33) |
| 3 加减法算式谜 | (3) | 34 乘除法的错中求解 | (34) |
| 4 乘法算式谜 | (4) | 35 归一应用题 | (35) |
| 5 文字算式谜 | (5) | 36 归总应用题 | (36) |
| 6 横式数字谜 | (6) | 37 学会分析应用题 | (37) |
| 7 火柴棒游戏 | (7) | 38 画图解应用题 | (38) |
| 8 等差数列 | (8) | 39 巧妙解应用题 | (39) |
| 9 等差数列求和 | (9) | 40 加法原理 | (40) |
| 10 等差数列的应用 | (10) | 41 乘法原理 | (41) |
| 11 移多补少求平均数 | (11) | 42 两种原理的综合运用 | (42) |
| 12 根据平均数求个别数 | (12) | 43 乘方数 | (43) |
| 13 和倍问题 | (13) | 44 书本的页码 | (44) |
| 14 寻找隐藏的和与倍 | (14) | 45 整数的分拆 | (45) |
| 15 差倍问题 | (15) | 46 辐射型数阵图 | (46) |
| 16 分清关系 巧用差倍 | (16) | 47 封闭型数阵图 | (47) |
| 17 和差问题 | (17) | 48 复合型数阵图 | (48) |
| 18 多种数量的和与差 | (18) | 49 巧填幻方 | (50) |
| 19 和、差、倍综合问题(一)
..... | (19) | 50 方阵问题 | (51) |
| 20 和、差、倍综合问题(二)
..... | (20) | 51 容斥原理(一) | (52) |
| 21 简单的年龄问题 | (21) | 52 容斥原理(二) | (53) |
| 22 稍复杂的年龄问题 | (22) | 53 除法与余数 | (54) |
| 23 加减法的巧算 | (23) | 54 周期问题(一) | (55) |
| 24 乘除法的巧算(一) | (24) | 55 周期问题(二) | (56) |
| 25 乘除法的巧算(二) | (25) | 56 长方形和正方形的周长
..... | (57) |
| 26 奇数和偶数 | (26) | 57 巧妙求周长 | (58) |
| 27 奇偶分析 | (27) | 58 长方形和正方形面积
..... | (60) |
| 28 定义新运算 | (28) | 59 巧妙求面积 | (61) |
| 29 数简单图形 | (29) | 60 图形的变换 | (63) |
| 30 数复杂图形 | (30) | 61 剪拼图形 | (64) |
| 31 和、差的变化规律 | (31) | 62 立体图形 | (65) |

63	等量代换(一)	(66)	82	真真假假	(88)
64	等量代换(二)	(67)	83	在复杂条件下推理	(89)
65	消去问题(一)	(68)	84	抽屉原理(一)	(91)
66	消去问题(二)	(69)	85	抽屉原理(二)	(92)
67	植树问题	(70)	86	抽屉原理的应用	(93)
68	植树问题的应用	(71)	87	行程问题	(94)
69	还原与倒推	(72)	88	较复杂的行程问题	(95)
70	列表还原	(73)	89	相遇问题(一)	(96)
71	盈亏与比较	(74)	90	相遇问题(二)	(97)
72	先转化再比较	(75)	91	追及问题(一)	(98)
73	鸡兔同笼与假设	(76)	92	追及问题(二)	(99)
74	巧假设 妙解题	(77)	93	环湖行程问题	(100)
75	直线的交点	(78)	94	列车过桥问题	(101)
76	有趣的一笔画	(79)	95	河水中的航行问题	(102)
77	多笔画问题	(81)	96	最短路线问题	(103)
78	一笔画与多笔画的应用问题	(83)	97	标点法与流程图	(104)
79	对应推理	(85)	98	最大与最小	(105)
80	与计算有关的推理	(86)	99	数学游戏	(106)
81	体育比赛中的推理	(87)	100	简单的规划问题	(107)
				参考答案	(108)

举一反三 寻找规律巧填数 I

我们把按某种规律排列成的一列数叫做数列,数列中的每一个数都叫做这个数列的项。通过观察已知的项,找出所给数列的排列规律,并依据规律填写所缺的数,就是按规律填数。



典型题例

【例题】 找出下面数列的规律,并根据规律在括号里填出适当的数。

(1) 11, 15, 21, 29, 39, (), 65;

(2) 6, 1, 8, 3, 10, 5, 12, 7, (), ()。

【思路】 (1) 先计算相邻两数的差, $15 - 11 = 4$, $21 - 15 = 6$, $29 - 21 = 8$, $39 - 29 = 10$, 由此可以推知这些差依次为 4, 6, 8, 10, 12, 14。这样括号里的数应比 39 多 12, 比 65 少 14。

(2) 仅从相邻的两个数难以看出这列数的排列规律。这时我们不妨隔着一个数来观察, 就会发现这列数是由两列数复合而成的。第一列数是 6, 8, 10, 12, 14, …, 每两个数的差是 2; 第二列数是 1, 3, 5, 7, 9, …, 每两个数的差也是 2。

【详解】

(1) 11, 15, 21, 29, 39, (51), 65

(2) 6, 1, 8, 3, 10, 5, 12, 7, (14), (9)

【诀窍】 怎样从数字排列中找规律呢? 一要开动脑筋, 细心观察题目中数字的特征; 二要灵活运用整数的有关知识, 加、减、乘、除的计算法则及它们之间的关系, 并进行合理的推想, 认真分析题目中所给数据与未知数据的关系, 从中发现规律。有时还须要将一列数分成两个数列, 分别找出它们各自的变化规律。



好题精练

① 在下面各数列的括号中填入合适的数。

(1) 9, 11, 15, 21, 29, (), 51;

(2) 3, 4, 5, 8, 7, 16, 9, 32, (), ()。

② 有一列由三个数组成的数组, 它们依次是 (1, 5, 10); (2, 10, 20); (3, 15, 30); ……。

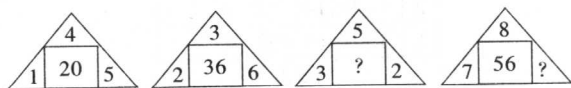
问: 第 8 个数组内三个数分别是多少?

③ 按规律在“?”处填数。

(1)

8		9		16		13		32	
6	4	5	8	12	8	6	?	?	24

(2)



奥数100类

2 从数表中找规律

把一些数按一定的规律排成一个形状,就叫数表。数表的排列规律同样也是比较隐蔽的。从数表中找规律,不仅可以启迪我们的思维,开阔我们的思路,增长我们的智慧,而且也很有趣味。希望你能喜欢它。



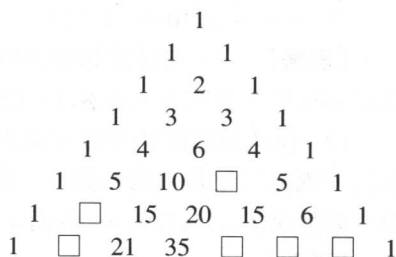
典型题例

【例题】 下面是一个用数字组成的大三角形,先观察数表的排列规律,然后填出所缺的数。

【思路】 这个三角形的每一行都是从1开始,又到1结束,使这个三角形的两条边都由数字1组成。再看各行的数,可以发现:每行上的每一个数都是上一行相对应的两个数的和。

【详解】 第六行应填: $6+4=10$;第七行应填: $1+5=6$;第八行从左到右应依次填: $1+6=7, 20+15=35, 15+6=21, 6+1=7$ 。

【诀窍】 对于较复杂的按规律填数的问题,我们可以从以下几个方面来考虑:① 对于几列数组成的规律,需要我们灵活地思考,综合运用知识,一种方法不行,就换另一种方法再分析;② 对于数表中的规律,要从每一行的情况以及行与行之间的情况加以考虑;③ 对于找到的规律,应该适合这组数中的所有数或这组算式中的所有算式。



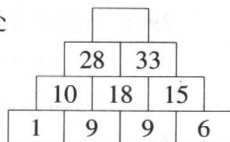
好题精练

① 图①的空格中应填多少?

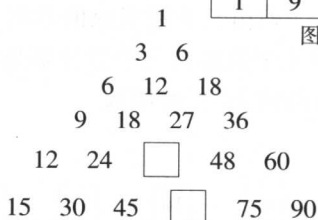
② 将自然数 $1, 2, 3, 4, \dots$ 按照图②的顺序排列在正方形格子里,“?”处应填什么数?

16						
11	17					
7	12			?		
4	8	13				
2	5	9	14			
1	3	6	10	15		?

图②



图①



图③

③ 观察图③已给出的数表,并按规律填空。

举一反三 3

加减法算式谜

从这一讲开始,我们要学习一种非常有趣的数学游戏——智破数字谜。“数字谜”指的是在某些算式中含有一些用符号、文字、字母表示的待定数字,或是缺少运算符号,题目要求我们填出所缺部分,使算式成立。首先,我们来研究“加减法算式谜”。



典型题例

【例题】 在下面算式的□里填入合适的数字,使算式成立。

$$\begin{array}{r} \square 0 \square \square \\ - 3 \square 1 6 \\ \hline 4 8 5 7 \end{array}$$

【思路】 根据加、减法法则和加、减互为逆运算的关系,算减法时可以想加法。看个位,减数的个位是6,差的个位是7,根据“差+减数=被减数”得 $7+6=13$,被减数个位应填3,向十位借1。看十位, $5+1=6$,加上个位借走的1等于7,所以被减数的十位应填7。看百位,0减8不够减,向千位借1后得10, $10-8=2$,所以减数百位上的□里应填2。看千位, $4+3=7$,加上百位借走的1等于8,所以被减数千位上应填8。

【详解】

$$\begin{array}{r} \boxed{8} 0 \boxed{7} \boxed{3} \\ - 3 \boxed{2} 1 6 \\ \hline 4 8 5 7 \end{array}$$

【诀窍】 加减法算式谜题目的解答主要是根据加、减法的计算法则以及加、减互为逆运算的关系。做加法时可以想减法,做减法时可以想加法。在填的时候,加法要注意进位,减法要注意退位。



好题精练

① 在下面算式的□里填上合适的数,使算式成立。

$$(1) \begin{array}{r} 6 \square \square \\ + 2 \square 1 5 \\ \hline \square 0 9 1 \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{r} \square 0 \square \square \\ - 3 \square 1 7 \\ \hline 2 8 5 6 \end{array}$$

$$(1) \begin{array}{r} \square 6 4 \\ 7 \square 3 \\ + 4 8 \square \\ \hline \square 0 4 2 \end{array} \quad (2) \begin{array}{r} \square \square 3 \\ - \square \square \\ \hline 8 \end{array}$$

③ 下面的算式中,六个□代表六个数字(数字可以相同)。问这六个数字的和是多少?

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline 1 9 9 7 \end{array}$$

奥数100类

4 乘除法算式谜

“算式谜”是一种有趣的数学问题,它的特点是在算术运算的式子中,使一些数字或运算符号“残缺”,要我们根据运算法则,进行判断推理,从而把“残缺”的算式补充完整。研究和解决算式谜问题,有利于培养我们观察、分析、归纳、推理等思维能力。



典型题例

【例题】 在右面的()里填数,使算式成立。

【思路】 从已知数入手,根据乘法口诀填数,寻找除数、被除数与商的关系。由商的十位是1,以及1与除数的乘积的最高位数是1,可知除数的十位数是1。由第一次除后余下的数为7可知,被除数的十位数只可能是7,8,9。如果是7,除数的个位数就是0,那么最后必有余数;如果被除数的十位数是8,除数的个位数就是1,也不能除尽;只有当被除数的十位数为9,除数的个位数是2时,商的个位数为6,正好除尽。

【详解】 如右式。

【诀窍】 因为算式谜是一些不完整的运算式子,这就需要我们根据蛛丝马迹,合理、灵活地运用四则运算及四则混合运算的计算法则、运算顺序以及加、减、乘、除之间的关系等知识,进行认真的分析与合理的推理。

$$\begin{array}{r} 1 \quad () \\ () () 1 \quad () 2 \\ \underline{1 \quad ()} \\ 7 \quad () \\ () () \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad (6) \\ (1) (2) 1 \quad (9) 2 \\ \underline{1 \quad (2)} \\ 7 \quad (2) \\ (7) (2) \\ \hline 0 \end{array}$$



好题精练

① 在左下图中的□里填上适当的数,使算式成立。

$$\begin{array}{r} 2 \quad 8 \quad 5 \\ \times \quad \square \quad \square \\ \hline 1 \quad \square \quad 2 \quad \square \\ \square \quad \square \quad \square \\ \hline \square \quad 9 \quad \square \quad \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \quad \square \quad \square \\ 9 \quad \square) \square \quad \square \quad \square \quad \square \\ \underline{\square \quad \square} \\ \square \quad \square \quad \square \\ \underline{\square \quad \square \quad 9} \\ 0 \end{array}$$

② 在右上图中的□里填上适当的数,使算式成立,共有几种填法?

③ 在下面的□里填上适当的数,使算式成立。

(1)

$$\begin{array}{r} 1 \quad 6 \\ 3 \quad 9) 6 \quad \square \quad \square \\ \underline{\square \quad \square} \\ \square \quad \square \quad \square \\ \underline{\square \quad \square \quad \square} \\ 0 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} 3 \quad \square \\ \square \quad \square) 8 \quad \square \quad 0 \\ \underline{7 \quad \square} \\ 1 \quad \square \quad 0 \\ \underline{1 \quad \square \quad 0} \\ 0 \end{array}$$

举一反三 5

文字算式谜

“字谜”是数字谜的又一种形式。所谓“字谜”就是指在算式中有某些数字是用汉字或字母表示的,要求出这些汉字或字母表示的数字是多少。



典型题例

【例题】 下面算式中不同的字母所代表的数字均不同,这些字母各代表多少时,算式才成立?

【思路】 这道题中有9个不同的字母,分别代表9个不同的数字,比较复杂。遇到这样的题目,应先设法把被乘数、乘数求出来,后面一些字母就不用每个都去推算了。由于 $ABC \times C = BEA$,因此选择 C 和 A 作为突破口。根据 $C \times C$ 的个位是 A ,而 A 和 C 不相同,得出 C 可能是 2,3,4,7,8,9。由于 $A \times C$ (加十位进上来的数后)等于 B ,即得数是一位数,所以只有 $C=2, A=4$ 满足条件,这样 $B=8$ 或 9。经过试算, $B=9, E=8$ 符合题意,所以被乘数是 492。从乘积的十位上可看出,8加 H 的和的末位是 4,故 $H=6$ 。这样 $D=3$ 或 8,而 $E=8$,所以 $D=3$,故乘数是 32。再通过计算就能确定 F, G, I 所代表的数字了。

$$\begin{array}{r} A B C \\ \times D C \\ \hline B E A \\ F A G H \\ \hline F I G A A \end{array}$$

【详解】 见右式。

【诀窍】 文字算式谜在解答时不但要运用前面所讲的方法,而且要注意:在同一道题中,相同的文字或字母表示同一个数字,不同的文字或字母表示不同的数字。

$$\begin{array}{r} 4 9 2 \\ \times 3 2 \\ \hline 9 8 4 \\ 1 4 7 6 \\ \hline 1 5 7 4 4 \end{array}$$



好题精练

① A, B, C, D 分别代表不同的数字,它们各是什么数字时,下面的算式成立?

$$\begin{array}{r} B C D \\ - C D C \\ \hline B C \end{array}$$

② 下面算式中的“数”、“学”、“俱”、“乐”、“部”这五个汉字各应代表什么数字?

$$\begin{array}{r} 1 \text{ 数 学 俱 乐 部} \\ \times 3 \\ \hline \text{数 学 俱 乐 部 } 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A A A \\ B B B \\ + C C C \\ \hline C B B C \end{array}$$

③ A, B, C 各代表不同的数字,要使上面的算式成立, A, B, C 各代表多少?

奥数100类

6 横式数字谜

前面我们研究的数字谜都是以竖式的形式出现的。其实,数字谜也可以以横式的形式出现。当然,横式数字谜中间有的题目是要填空格,也有的题目是文字算式谜。



典型题例

【例题】 将0,1,2,3,4,5,6,7,8,9这十个数字分别填入下面的十个□内,使等式成立。

$$\square + \square = \square \quad \square - \square = \square \quad \square \times \square = \square \square$$

【思路】 根据0的运算性质可知,任何数加0或减0,结果仍等于该数。所以,0不能填在加法和减法算式中,只能出现在乘法算式的乘积的个位上。而符合条件的只有 $2 \times 5 = 10, 4 \times 5 = 20, 5 \times 6 = 30, 5 \times 8 = 40$ 。下面分别讨论:

(1) 如果 $2 \times 5 = 10$,则还剩3,4,6,7,8,9,无法同时组成前两个算式。

(2) 如果 $4 \times 5 = 20$,则还剩1,3,6,7,8,9,可以组成

$$\begin{cases} 1 + 7 = 8 \\ 9 - 3 = 6 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 6 + 3 = 9 \\ 8 - 7 = 1 \end{cases}$$

(3) 如果 $6 \times 5 = 30$,则还剩1,2,4,7,8,9,无法同时组成前两个算式。

(4) 如果 $8 \times 5 = 40$,则还剩1,2,3,6,7,9,无法同时组成前两个算式。

【详解】

$$(1) \quad \boxed{1} + \boxed{7} = \boxed{8} \quad \boxed{9} - \boxed{3} = \boxed{6} \quad \boxed{4} \times \boxed{5} = 20$$

$$(2) \quad \boxed{6} + \boxed{3} = \boxed{9} \quad \boxed{8} - \boxed{7} = \boxed{1} \quad \boxed{4} \times \boxed{5} = 20$$

【诀窍】 在分析解答算式谜问题时,要注意:①式子中的字母、文字、空格都只能取0~9这十个数字中的某一个数字;②要仔细审题,分析算式中数字之间的关系,并尽可能多地找出各种条件;③应学会运用估值的方法,以确定和缩小取值范围;④数字谜求出后,要进行验算。



好题精练

① 将0,1,2,3,4,5,6这七个数字填在空格内,每个数字恰好出现一次,组成只有一位数和两位数的整数算式。问填在○内的数是几?

$$\square \times \square = \circ = \square \div \square$$

② 在下面八个□中分别填上1,2,3,4,5,6,7,8,使差是一个自然数,这个自然数最小是多少?

$$\square\square\square\square - \square\square\square\square$$

③ 下面算式中不同的汉字代表不同的数字,相同的汉字代表相同的数字,求出每个汉字所代表的数字。

$$\text{认认} \times \text{真真} = \text{踏踏实实}$$

举一反三 火柴棒游戏 7

用火柴棒可以摆成一些数字和运算符号;还可以摆出几何图形,如三角形、长方形以及一些物品的形状等。通过移动火柴棒,可进行算式的变化,可以用它来做有趣的图形变化游戏。



典型题例

【例题】 在下面由火柴棒摆成的算式中,移动一根火柴棒,使算式变成等式。

$$112 \times 7 - 72 - 7 + 2$$

【思路】 题目只是一个四则运算的式子,并没有等号,而题目要求移动一根火柴棒使它变成等式。所以,我们一定要在某个数字或“+”上去掉一根火柴而添在“-”上,或改“+”为“=”。

【详解】

$112 \times 7 = 784$, 而 $784 - 72 = 712$, 所以考虑将最后一个“+”改为 1, 同时把拿起来的这根火柴棒放在 7 前面的“-”处, 把“-”改为“=”, 即:

$$112 \times 7 - 72 = 712$$

【诀窍】 用火柴棒拼成算式, 要根据数的特点或算式的特点, 从由火柴棒排成的数字中拿走或添上火柴棒, 变成另一个数; 或改变运算符号, 使算式成立。

从给出的由火柴棒组成的图形中拿掉几根火柴棒, 变成新的图形。如果图形变少了, 我们可以直接拿掉多余的几根火柴棒; 如果图形增加了, 我们要考虑让火柴棒重复使用, 这样可以增加图形的个数。



好题精练

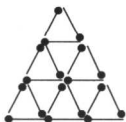
① 在下面由火柴棒摆成的算式中, 移动一根火柴棒, 使算式成立。

$$472 + 27 \times 2 \times 7 = 44$$

② 在下面由火柴棒摆成的算式中, 只移动一根火柴棒, 使算式变成等式。

$$27 \times 4 - 172 - 24 - 12$$

③ 用 18 根火柴棒摆成九个大小相同的三角形, 从这个图中每次拿走一根火柴, 使它减少一个三角形, 最后使它留下大小相同的五个三角形, 该怎样拿?



奥数100类

8 等差数列

若干个数排成一列称为数列,数列中的每一个数称为一项,其中第一项称为首项,记作 a_1 ,最后一项称为末项,记作 a_n 。从第二项开始,后项与前项之差都相等的数列称为等差数列,后项与前项之差称为公差,记为 d 。



典型题例

【例题】 已知等差数列:4,10,16,22,...

求:(1) 这个数列的第48项是多少?

(2) 508是这个数列的第几项?

【思路】 这个等差数列的首项是4,公差是 $10 - 4 = 6$ 。第2项比首项多1个公差,第3项比首项多2个公差。依此类推,第48项应该比首项多 $48 - 1 = 47$ 个公差,第 n 项应该比首项多 $(n - 1)$ 个公差。按照这个规律,我们可以求出等差数列中的任一项,也可以求出一个数是这个数列中的第几项。

【详解】

$$(1) 4 + (48 - 1) \times 6 = 286$$

$$(2) (508 - 4) \div 6 + 1 = 85$$

答:这个等差数列的第48项是286,508是它的第85项。

【诀窍】 解答等差数列问题,一定要记住几个常用公式:通项公式:① $a_n = a_1 + (n - 1) \times d$; ② 求项数公式: $n = (a_n - a_1) \div d + 1$ 。



好题精练

① 下面的数列哪些是等差数列?

(1) 2,5,8,11,14,...

(2) 2,5,2,5,2,5,...

(3) 88,77,66,55,44,33,22,11

(4) $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, \dots$

(5) 1,1;2,3,5,8,13,...

(6) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots$

(7) $2003 \times 1, 2003 \times 2, 2003 \times 4, \dots, 2003 \times 2003$

② 有一列数:1,5,9,13,17,21,...

求:(1) 它的第1000项是多少?

(2) 4921是它的第几项?

③ 下面的算式是按一定规律排列的: $5 + 3, 7 + 6, 9 + 9, 11 + 12, \dots$ 。

它的第1999个算式的结果是多少?

举一反三 9

等差数列求和

许多同学都知道这样一个故事:大数学家高斯在很小的时候,就利用巧妙的算法迅速计算出从 1 到 100 这 100 个自然数的总和。你知道高斯是怎么算的吗?



典型例题

【例题】 有这样的一列数:1,2,3,4,⋯,99,100。请你求出这列数各项相加的和。

【思路】 如果我们把数列 1,2,3,4,⋯,99,100 与数列 100,99,98,97,⋯,2,1 相加:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ + & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (1+100) & + & (2+99) & + & (3+98) & + & (4+97) & + & \cdots & + & (99+2) & + & (100+1) \end{array}$$

其中每个小括号内的两个数的和都是 101,一共有 100 个 101 相加,所得的和就是所求数列的和的 2 倍,再除以 2,就是所求数列的和。

【详解】

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 99 + 100 \\ &= (1 + 100) \times 100 \div 2 \\ &= 5050 \end{aligned}$$

答:这个数列各项相加的和是 5050。

【诀窍】 求等差数列中各项相加的和可以利用下面的公式进行计算:和 = (首项 + 末项) × 项数 ÷ 2。

在有的题目中,末项或项数没有直接告诉我们,可以利用上一讲中的“通项公式”或“求项数公式”先求出末项或项数,再利用求和公式求和。



好题精练

① 计算下面各题。

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 49 + 50$

(2) $100 + 99 + 98 + \cdots + 61 + 60$

② 计算。

(1) $3 + 7 + 11 + \cdots + 99$

(2) $9 + 18 + 27 + 36 + \cdots + 261 + 270$

③ 计算下面各题。

(1) $2000 - 3 - 6 - 9 - \cdots - 51 - 54$

(2) $(2 + 4 + 6 + \cdots + 98 + 100) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99)$

(3) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 1997 - 1998 + 1999$

奥数100类

10 等差数列的应用

学习数学的一个重要目的就是要用学到的数学知识来解决生活中的实际问题。在生活中,有许多问题可以用等差数列的知识来解决。



典型题例

【例题】 若干个同样的盒子排成一排。小明把 50 多个同样的棋子分装在盒中,其中只有一个盒子没有装棋子,然后他出去了。小光来了之后从每个有棋子的盒子里各拿出一个棋子放在空盒内,再把盒子重新排一下。小明回来后仔细查看了一番,没有发现有人动过这些盒子中的棋子。你知道盒子有多少个? 棋子有多少个吗?

【思路】 先分析盒子里棋子个数的分配情况。因为原有的空盒不空,而小明没发现有人动过棋子,所以,现必有一个新的空盒,按题意,这个空盒原来应有 1 个棋子。仿照上面的推理,现装 1 个棋子的盒子,原来应有 2 个棋子;现装 2 个棋子的盒子,原来应有 3 个棋子;……按照这样的规律,原来盒子中的棋子个数从少到多依次是 0,1,2,3,……。再进一步计算棋子总数,从而确定盒子个数。

【详解】

依题意: $0+1+2+3+\cdots+\square=50$ 多。

而 $0+1+2+3+\cdots+9=45$,

$0+1+2+3+\cdots+10=55$,

$0+1+2+3+\cdots+11=66$,

故应共有 55 个棋子,而盒子的个数应是 11 个。

【诀窍】 对于等差数列的应用问题,解答的关键是要依据题意找到题目中所包含的是怎样一个等差数列,这个数列的首项、末项、公差、项数分别是多少。再灵活地运用等差数列的几个公式,巧妙地求出答案。



好题精练

① 求所有被 7 除余数是 1 的三位数的和。

② 小聪家在一个短胡同里,这条胡同的门牌号从 1 号开始,2 号,3 号,……,挨着号码编下去。如果除小聪家外,其余各家的门牌号相加的和减去小聪家的门牌号码,恰好等于 100。问小聪家门牌号是几号? 全胡同有几家?

③ 盒子里装着分别写有 1,2,3,……134,135 的红色卡片各一张,从盒中任意摸出若干张卡片,并算出这几张卡片上各数的和除以 17 的余数,再把这个余数写在另一张黄色卡片上放回盒内。经过若干次这样的操作后,盒内还剩下两张红色卡片和一张黄色卡片。已知这两张红色卡片上写的数分别是 19 和 97,求那张黄色卡片上所写的数。