高中数学

能力激活

（三年级下）

主编　汪祖亨　张林森

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高中数学能力激活

（三年级下）

主编　汪祖亨　张林森

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学能力激活，三年级，下／汪祖享，张林森主编. —北京：高等教育出版社，2005.1
ISBN 7-04-013609-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①汪… ②张… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004586 号

责任编辑 孙鸣雷　　封面设计 吴 昊　　责任印制 蔡敏燕

书　　名 高中数学能力激活（三年级下）
主　　编 汪祖享 张林森

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总　　机 010-82028899
传　　真 021-56965341
购书热线 010-64054588
　　　　 021-56964871
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http: //www.hep.edu.cn
　　　　 http: //www.hep.com.cn
　　　　 http: //www.hepsh.com

排版校对 南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷 上海师范大学印刷厂

开　　本 787×1092 1/16
印　　张 12.25
字　　数 289 000
版　　次 2005 年 1 月第 1 版
印　　次 2005 年 1 月第 1 次
定　　价 17.00 元

前　言

当今世界各国经济发展的全球化趋势日益明显，工业经济加速向知识经济过渡，科技发展日新月异，人才竞争和人才培养已成为各国综合国力竞争的一个制高点．在此背景下，上海的二期课改以抢时间、争高点的气势步步推广与深入，高考思路也随之发生了显著的变化．因此，高中数学教学与高三数学总复习也面临着激活能力、提高综合素质的挑战．我们注意到：

(1) 课改理念的核心是以学生发展为本，立足于激励全体学生的发展潜能；

(2) 课改目标是落实培养学生的实践能力和创新精神为重点的素质教育；

(3) 课改明确提出实现学生学习方式的转变，为学生的可持续发展创造条件．

这就涉及为改革传统的高三复习方案，渗透课改理念应有一套与之呼应的复习资料，争取在系统的知识梳理、能力激活和学生个性品质提升上有新的突破．为此，我们尝试编写这本高中数学复习用书．

本书的知识体系、能力要求紧靠上海市高中数学二期课改的精神，力争体现以下特色：

(1) 落实课改精神，用课改理念指导复习过程．

(2) 总结近年来高考命题规律、求解通法和创新题型的发展趋向，设计与之呼应的实践能力和创新精神的训练方案，科学、有序地激活能力．

(3) 指导解题策略、展示思维过程、揭示常见陷阱、凸现变式规律、渗透数学方法，在系统训练过程中让学生学会思考、掌握方法、发展潜能．

(4) 每一讲的设计都顾及课时容量、配套训练和分层要求，使本书既适合高三年级教学复习使用，又可提供学生自学拓展之需．选材上追求新颖、典型、实用．

本书分上、下两册．上册用于高三第一轮复习，每章安排单元测试一节．下册用于第二轮复习，共 19 个专题，主要体现重要数学思想、综合能力与创新能力的要求．

下册每讲的内容大致包括以下两个部分：

(1) 精选例题　展现过程分析、方法点评．可体现一题多解、变式训练、错解分析；体现知识的延伸与拓展；体现数学的应用．

(2) 巩固训练　巩固知识、激活能力．

本书编者和主审人员都是参与二期课改的重点中学资深教师，既对课改精神有较透彻的理解，又有多年指导高考复习的经验．本书的主编为汪祖亨和张林森．参加编写的人员有：陈文珊、赵岚、宫丽君、杜平、倪声钟、刘萍、李伟、徐珏、张立瑾、沈文星、刘岚．

我们期待本书在帮助高三学生的复习中能取得良好的实效，在能力的提升上有长足的进步．此外，限于时间仓促和作者的水平，书中的差错和不足之处在所难免，期待广大师生给予指教，以便在改编中进一步完善．

编　者

2005 年 1 月

目　录

第 1 讲　函数的概念和性质 …… 1

1.1　函数与反函数 …… 1

1.2　函数的基本性质 …… 5

第 2 讲　函数与方程 …… 9

2.1　函数图像的变换 …… 9

2.2　函数与方程的关系 …… 13

第 3 讲　三角函数的最值问题 …… 19

第 4 讲　数列与极限 …… 27

4.1　等差数列与等比数列 …… 27

4.2　数列与极限综合问题 …… 30

第 5 讲　复数 …… 33

5.1　复数的概念及运算 …… 33

5.2　复数与方程及复数的综合应用 …… 36

第 6 讲　方程与不等式 …… 39

6.1　方程的不等式解法 …… 39

6.2　基本不等式及其应用 …… 43

第 7 讲　排列、组合与二项式定理 …… 46

7.1　排列与组合 …… 46

7.2　二项式定理 …… 48

第 8 讲　概率与统计 …… 51

8.1　概率初步 …… 51

8.2　统计初步 …… 54

第 9 讲　角和距离 …… 57

9.1　角的计算 …… 57

9.2　距离的计算 …… 60

第 10 讲　面积与体积 …… 63

10.1 表面积与体积的计算 …… 63
10.2 立体几何综合问题 …… 66
第 11 讲 线性规划及其应用 …… 69
第 12 讲 直线与圆锥曲线的关系 …… 73
第 13 讲 向量的应用 …… 80
13.1 空间向量在立体几何中的应用 …… 80
13.2 用向量处理解析几何问题 …… 85
第 14 讲 数学应用问题 …… 91
14.1 与代数相关的应用题 …… 91
14.2 与立体几何、解析几何相关的应用题 …… 96
第 15 讲 经济生活中的数学问题 …… 102
第 16 讲 数学探索型问题 …… 106
16.1 存在性问题 …… 106
16.2 开放性问题 …… 112
第 17 讲 即时学习与创新 …… 118
17.1 学习型问题 …… 118
17.2 数学发现与创新 …… 124
第 18 讲 综合题思维方法 …… 132
第 19 讲 新题选讲 …… 143
19.1 新题选讲(一) …… 143
19.2 新题选讲(二) …… 150
模拟试卷一 …… 155
模拟试卷二 …… 158
参考答案 …… 161

第 1 讲　函数的概念和性质

函数是高中数学的重要内容之一. 它的概念与性质贯穿于中学数学的各个部分. 用函数的观点和方法去分析、解决问题就是用运动、变化的观点去审视问题中的数量关系，它是高中数学中最基本、最重要的一种数学思想方法. 构建函数，把所研究的问题转化为对函数性质的研究及图像的讨论，可起到化难为易，化繁为简，化未知为已知的作用，从而使问题得到顺利的解决.

1.1　函数与反函数

例题分析

例 1　(1) 集合 $A=\{x \mid x^2+3x-40 \leqslant 0\}$，集合 $B=\{x \mid a+1 \leqslant x \leqslant 2a-1\}$，$A \cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用等差数列前 n 项和的推导方法，可知 $f(-5)+f(-4)+f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=$ ____________.

(3) 函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)=3^x-1$. 设 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$，则 $g(-8)=$ ________.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & \text{当 } x<1 \text{ 时}, \\ 4-\sqrt{x-1}, & \text{当 } x \geqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$ 使得 $f(x) \geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围是(　　).

(A) $(-\infty,\ -2] \cup [0,\ 10]$　　(B) $(-\infty,\ -2] \cup [0,\ 1]$

(C) $(-\infty,\ -2] \cup [1,\ 10]$　　(D) $[-2,\ 0] \cup [1,\ 10]$

思路分析　对于(1)，可利用数轴解题，同时要注意 $B=\varnothing$ 的情况；对于(2)，可从等差数列求和的方法“倒位相加法”入手；对于(3)，可用反函数的定义及奇函数的定义求解；对于(4)，只要分区间求解即可.

解　(1) 当 $B=\varnothing$ 时，$a<2$；当 $B \neq \varnothing$ 时，$a>4$.

(2) $f(x)+f(1-x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以原式 $=3\sqrt{2}$.

(3) $x<0$，$f(x)=-3^{-x}+1$，所以 $g(-8)=-2$.

(4) 由 $\begin{cases}x \geqslant 1, \\ 4-\sqrt{x-1} \geqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1, \\ (x+1)^2 \geqslant 1\end{cases}$ 解得 $0 \leqslant x \leqslant 10$ 或 $x \leqslant -2$，选 A.

解题反思　(1) 紧扣集合、函数、反函数基本概念，准确分析解答问题；

(2) 注意观察与类比，第 2 题用了课本中等差数列前 n 项和方法；

(3) 利用互为反函数定义域、值域关系，第 3 题不求反函数即可顺利解答.

例 2 函数 $y=x^2+px+q$ 图像上一点 $M(x_0, y_0)$ 位于 x 轴下方，求证：函数与 x 轴必有两个不同的交点 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$，且 x_0 必在 x_1、x_2 之间.

思路分析 由已知条件可知 $y_0<0$，要使结论成立，只要证明 $(x_0-x_1)(x_0-x_2)<0$ 即可.

解 由题意，得 $y_0=x_0^2+px_0+q=\left(x_0+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}<0$.

令 $y=0$，则 $x^2+px+q=0$.

因为 $\Delta=p^2-4q=4\left(x_0+\frac{p}{2}\right)^2-4y_0\geqslant -4y_0>0$，

所以函数与 x 轴必有两个不同的交点 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$.

又 $y=x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$，$(x_1<x_2)$，

因为 $M(x_0, y_0)$ 在 x 轴下方，所以 $y_0=(x_0-x_1)(x_0-x_2)<0$，即 $x_1<x_0<x_2$，所以 x_0 必在 x_1，x_2 之间.

解题反思 重视函数零点在解题中的作用，以二次函数为载体证明这一点，并重视代数论证.

例 3 已知函数 $f(x)=2^x-\frac{a}{2^x}$.

(1) 将函数 $f(x)$ 的图像右移 2 个单位，得到 $y=g(x)$，求 $g(x)$；

(2) 函数 $y=h(x)$ 与 $y=g(x)$ 关于 $y=1$ 对称，求 $h(x)$；

(3) 函数 $F(x)=\frac{1}{a}f(x)+h(x)$，已知 $F(x)$ 最小值 m，且 $m>2+\sqrt{7}$，求实数 a 的范围.

思路分析 用 $x-2$ 代替 $f(x)$ 中的 x 即可求得 $g(x)$ 的表达式，再利用函数图像的对称性即可求得 $h(x)$；对于(3)，可先求得 $F(x)$ 最小值 m 的表达式，再解不等式 $m>2+\sqrt{7}$，即可求得 a 的范围.

解 (1) 定义域 $x\in\mathbf{R}$，则 $g(x)=2^{x-2}-\frac{a}{2^{x-2}}$；

(2) 设 $(x_0, y_0)(x', y')$ 分别是 $y=h(x)$ 与 $y=g(x)$ 图像上的一点，则 $\begin{cases}x'=x,\\ y'=2-y,\end{cases}$ 得 $h(x)=2-2^{x-2}+\frac{a}{2^{x-2}}$ $(x\in\mathbf{R})$.

(3) $F(x)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\right)2^x+(4a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$.

① 当 $a<0$ 时，$F(x)<2$，与 $F(x)\geqslant m>2+\sqrt{7}$ 矛盾；

② 当 $0<a\leqslant\frac{1}{4}$ 时，$F(x)$ 单调增，无最小值；

③ 当 $a\geqslant 4$ 时，$F(x)$ 单调减，无最小值；

④ 当 $\frac{1}{4}<a<4$ 时，$\frac{1}{a}-\frac{1}{4}>0$，$4a-1>0$，

$F(x)\geqslant 2\sqrt{\frac{(4-a)(4a-1)}{4a}}+2$，当且仅当 $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\right)2^x=(4a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^x$，即 $2^x=\sqrt{\frac{4a(4a-1)}{4-a}}$ 时，$F(x)$ 最小值 $m=\sqrt{\frac{(4-a)(4a-1)}{a}}+2$.

而 $m > 2+\sqrt{7}$，即 $\frac{1}{2} < a < 2$ 又 $\frac{1}{4} < a < 4$，所以 $\frac{1}{2} < a < 2$.

解题反思

(1) 选用适当方法求函数解析式和最值，不忘指出定义域.

(2) 利用基本不等式求最值，遵循不等式使用的条件.

例 4 对函数 $f(x)$ 给出如下定义：若对于定义域 D 内任意一个自变量 x_0，都有函数值 $f(x_0) \in D$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D 上的一个闭函数，并称 D 为函数 $f(x)$ 的一个闭区域.

(1) 当定义域 D 为区间 $(0, 1)$ 时，判断下列函数哪些是 D 上的一个闭函数(写出推理过程)：(A) $y=\frac{1}{2}x$，(B) $y=2^x-1$，(C) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，(D) $y=2\sin\frac{\pi x}{2}$.

(2) 写出 $y=\frac{5x}{x+2}$ 的一个闭区域.

(3) 当定义域为区间 $(1, 2)$ 时，是否存在实数 a，使得函数 $y=\frac{5x-a}{x+2}$ 是 D 上的闭函数. 若存在，求出 a，若不存在，请说明理由.

解 (1) A：定义域 D：$(0, 1)$，$y=\frac{1}{2}x$ 单调增，$y \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset D$，所以 $y=\frac{1}{2}x$ 是闭函数；

B：$y=2^x-1$ 单调增，$y \in (0, 1)$，是闭函数；

C：$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 单调减，$y \in (-1, 0) \not\subset D$，不是闭函数；

D：$y=2\sin\frac{\pi x}{2} \in (0, 2)$，不是闭函数.

(2) 由 $\frac{5x}{x+2}=x$，得 $x=0$，$x=3$. 而 $y=\frac{5x}{x+2}$ 在 $(0, 3)$ 单调，所以 $(0, 3)$ 是 y 的一个闭区域.

(3) $f(x)=5-\frac{a+10}{x+2}$，当 $x \in (1, 2)$ 且 $a>-10$ 时，$f(x)$ 是增函数.

由 $\begin{cases} 5-\frac{a+10}{x+2} \leqslant 2,\ a \geqslant 2, \\ 5-\frac{a+10}{x+2} \geqslant 1,\ a \leqslant 2 \end{cases}$ 解得 $a=2$.

解题反思 对于新定义或新规则，必须理解定义或规则的本质，并会用于分析解答问题.

巩固练习

1. 当 $x \leqslant 1$ 时，求函数 $y=0.2^{-x}+1$ 的反函数.

2. 已知 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x+b}$，其反函数记为 $f^{-1}(x)$. 若 $f^{-1}(x)$的图像关于点 $P(1,-2)$ 对称，求 a，b；若 $f^{-1}(x+1)$ 的反函数是 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$，求 a，b.

3. 已知奇函数 $y=f(x)$，$x\neq 0$，$x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x-1$，求 $f(x-1)<0$ 时 x 的取值范围.

4. $f(x)$和 $g(x)$都是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数，且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$不可能是（　　）.

(A) $x^2+x+\dfrac{1}{5}$　　(B) $x^2+x-\dfrac{1}{5}$　　(C) $x^2-\dfrac{1}{5}$　　(D) $x^2+\dfrac{1}{5}$

5. 若函数 $f(x)$，$x\in D$，定义存在常数 C，对任意 $x_1\in D$，存在唯一 $x_2\in D$，使 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=C$，称 $f(x)$在 D 上均值为 C. 已知 $f(x)=\lg x$，$x\in[10,100]$，则 $f(x)=\lg x$ 在$[10,100]$均值是多少？

6. 求函数 $y=x+\dfrac{4}{x}$，$x\in[1,t]$ 的值域.

7. 若 $f\left(\dfrac{x-t+1}{2}\right)=2\log_2(x+1)$.

(1) 当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 恒成立，求 t 范围；

(2) 当 $t=4$，$x\in[0,1]$ 时，求 $f(x)-\log_2(x+1)$ 最小值.

8. 函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，$f(x)-x=0$ 有两根 x_1，x_2，且 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0, x_1)$ 时，求证：$x<f(x)<x_1$；

(2) 若 $f(x)$关于 $x=x_0$ 对称，求证：$x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

1.2 函数的基本性质

例题分析

例 1 (1) 函数 $f(x)=x\,|\,x+a\,|+b$ 是奇函数的充要条件为________.

(2) 定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(x+2)$，当 $x\in[3, 5]$ 时，$f(x)=2-|\,x-4\,|$，则(　　).

(A) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(B) $f(\sin 1)>f(\cos 1)$

(C) $f\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)<f\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　(D) $f(\cos 2)>f(\sin 2)$

(3) 函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的增函数，$F(x)=f(x)-f(-x)$，则 $F^{-1}(x)$具有性质是____________.

(4) 函数 $f(x)=\sin^2 x-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{|x|}+\dfrac{1}{2}$，正确结论为(　　).

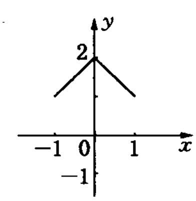
(A) $f(x)$为偶函数　　(B) 当 $x>2\,005$ 时，$f(x)>\dfrac{1}{2}$ 恒成立

(C) $f_{\max}(x)=\dfrac{3}{2}$　　(D) $f_{\min}(x)=-\dfrac{1}{2}$

解 (1) $a^2+b^2=0$ 或 $|\,a\,|+|\,b\,|=0$.

(2) 因 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$3\leqslant x+4\leqslant 5$，则 $f(x+4)=2-|\,x\,|$，而 $f(x+4)=f(x)$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2-|\,x\,|$. 故应选 D.

(3) 增函数，奇函数.



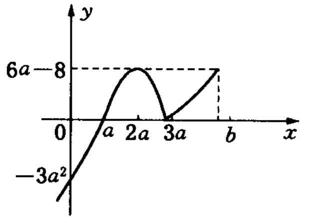
(4) (A) $f(x)$为偶函数正确；(B) 取 $x=1\,000\pi$，$x>2\,005$，但 $f(x)<\dfrac{1}{2}$，不正确；(C) $\sin^2 x-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{|x|}$ 无最大值，不正确；(D) $\sin^2 x\geqslant 0$，$-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{|x|}\geqslant -1$，所以 $f_{\min}(x)=-\dfrac{1}{2}$.

解题反思

(1) 正确运用函数性质分析、解答问题，要看清问题本质. 如 ①$f(x)=x|x|$ 为奇函数；②关键得到 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)$的表达式；③理解原函数与其反函数性质间联系；④注意最值存在的条件.

(2) 要会举反例.

例 2 设函数 $f(x)=|x-3a|(x-a)\ (a\in\mathbf{R}^+)$ 在$(-\infty,b]$上取得最大值 $6a-8$ 的对应 x 的值有且仅有两个，求实数 b 的值.



解 $f(x)=\begin{cases}(x-2a)^2-a^2,\ 当\ x\geqslant 3a\ 时,\\ -(x-2a)^2+a^2,\ 当\ x<3a\ 时,\end{cases}$

则最大值 $a^2=6a-8$,

即 $$a=4\ 或\ a=2, 且\ b>3a.$$

(1) 当 $a=4$, $x=b$ 时，最大值为 16，则 $(b-8)^2-16=16$. 解方程得 $b=8\pm4\sqrt{2}$, 而 $b>12$, 所以 $b=8+4\sqrt{2}$.

(2) 当 $a=2$, 则 $(b-4)^2-4=4$, $b=4\pm2\sqrt{2}$, 而 $b>6$, 所以 $b=4+2\sqrt{2}$.

解题反思 此题涉及的分段函数均为二次函数，借助数形结合，易找到函数的最值点，也是求解本题的突破口.

例 3 已知函数 $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, 对任意 $x, y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$, $f(0)\neq0$, 且存在正数 m, 使 $f(m)=0$, 求证：$f(x)$为周期函数，并求出它的周期.

解 存在正数 m, 使 $f(m)=0$, 则令 $y=m$, 得

$$f(x+m)+f(x-m)=2f(x)f(m),$$

即 $$f(x+m)=-f(x-m).$$

令 $x-m=t$, $f(t+2m)=-f(t)$, 即 $f(x+2m)=-f(x)$, 所以 $f(x+4m)=-f(x+2m)=f(x)$, 且 $4m$ 为正数，即 $f(x)$为周期是 $4m$ 的函数.

解题反思 处理抽象函数须对其定义域内 x 选取适当的数，以挖掘出函数的隐含性质；证明函数性质须紧扣函数性质定义.

例 4 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2$, $f(2)=0$, 当 $x>2$ 时，$f(x)>0$. 求证：

(1) $f(x)$单调增；

(2) $f(x)$关于点$(2,0)$对称；

(3) $f(n)$为等差数列 $(n\in\mathbf{N}^*)$, 并求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$.

解 (1) 设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$, $x+y=x_2$, $x=x_1$, 则 $y=x_2-x=x_2-x_1$,

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2$, 即

$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+2=f(x_2-x_1)+f(2)+2=f(x_2-x_1+2)$.

而 $x_2-x_1+2>2$, 所以 $f(x_2-x_1+2)>0$, 即 $f(x_2)>f(x_1)$, $f(x)$为单调增函数.

(2) 设 $A(x_0, y_0)$, $B(x', y')$关于点$(2,0)$对称，则

$$\begin{cases} x_0 = 4 - x', \\ y_0 = - y', \end{cases}$$

$$f(4) = f(x_0 + x') = f(x_0) + f(x') + 2.$$

又 $f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) + 2$，而 $f(2) = 0$，所以 $f(x_0) + f(x') = 0$，$\begin{cases} f(x_0) = - f(x'), \\ x_0 + x' = 4, \end{cases}$ 即 $f(x)$关于(2, 0)成中心对称.

(3) 令 $x = y = 1$，则 $f(1) = -1$.

因此 $$f(n+1) = f(n) + f(1) + 2,$$

$$f(n+1) - f(n) = 1,$$

所以 $f(n)$是以 $f(1) = -1$ 为首项，公差为 1 的等差数列，$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

解题反思 单调性证明及中心对称证明，须注意：从式的结构上，推导出定义的形式，赋予相应的式或数，使之符合定义；数列也是特殊的函数；定义在代数论证中的作用.

巩固练习

1. 定义两种运算：$a \oplus b = \sqrt{a^2 - b^2}$，$a \otimes b = \sqrt{(a-b)^2}$，判断 $f(x) = \dfrac{2 \oplus x}{x \otimes 2 - 2}$ 的奇偶性.

2. $f(x) = x^3 + (m-4)x^2 - 3mx + (n-6)$ 关于原点对称，m、n 为常数.

(1) 求 m, n；

(2) 证明：$f(x)$在$[-2, 2]$单调；

(3) 若 $x \in [-2, 2]$，$f(x) \geqslant (n - \log_m a)\log_m a$ 恒成立，求 a.

3. 求 $f(x) = \dfrac{|x^2 + a|}{\sqrt{1+x^2}}$ $(a \in \mathbf{R})$ 的最小值.

4. 已知 $c > 0$，命题 A：函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 命题 B：$x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，若 A、B 有且只有一个正确，求 c 的取值范围.

5. 已知 $f(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5}$，$g(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

(1) 判断 $f(x)$ 奇偶性和单调性；

(2) 分别计算 $f(4) - 5f(2)g(2)$，$f(9) - 5f(3)g(3)$ 的值，由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式，且加以证明.

6. $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ 对任意 x 恒有 $f(x) = f(4 - x)$，$f(1 - 2\lg^2 x) < f(1 + 2\lg x - \lg^2 x)$，求 x 的范围.

7. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，图像关于 $x = 1$ 对称，对任意 x_1、$x_2 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$，$f(1) = a > 0$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$；

(2) 证明 $f(x)$ 为周期函数；

(3) 若 $a_n = f\left(2n + \dfrac{1}{2n}\right)$，求 $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln a_n$.

8. 若 $a \in [2, 3]$，求 $y = \dfrac{1}{2a}(1 - a + \sqrt{1 - 2a + 2a^2})$ 的最值.

第2讲　函数与方程

2.1　函数图像的变换

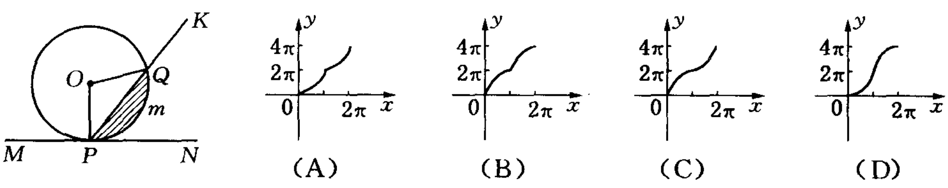
在理解和掌握函数概念、性质、图像的基础上，能以函数思想为载体，观察、审视问题. 通过构建函数，揭示问题的内在联系，将函数、方程、不等式等知识和方法互相交融，经过组合，在更高层次上再现，在探索解决问题时，能较直观地选择较佳的方法和策略，从而使复杂问题转化为熟悉的、简单的问题. 这样，不仅提高了对问题理解和认识，同时也提高了学生的数学素质和能力.

作图、识图、用图，通过构建函数，增强数形结合的分析能力，构建函数，把原本不是函数的问题，能用函数观点，方程思想予以解决，使问题的解决有路可寻.

例题分析

例 1　(1) 由 $y=\log_2 x$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$，作出 $f^{-1}(1-x)$ 的图像.

(2) 半径为 $R=2$ 的圆 O 与直线 MN 相切于 P，射线 PK 从 PN 出发绕点 P 逆时针转到 PM，旋转过程中 PK 交圆 O 于点 Q，设 $\angle POQ=x$，PmQ 面积 $S=f(x)$，则 $f(x)$ 图像是(　　).



(3) $f(x)=\dfrac{-x}{1+|x|}$，$x\in\mathbf{R}$，区间 $M=[a,b]$ $(a<b)$，集合 $N=\{y \mid y=f(x),\ x\in M\}$，则使 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有几个?

(4) 函数 $f(x)$ 的图像可由函数 $y=\lg(x+1)$ 的图像绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到，则 $f(x)$ 解析式为(　　).

思路分析　本例题中第(1)、(3)、(4)小题，要求按图像变换规则，从式和形两个方面正确表述；而第(2)小题，应提高识图、用图能力，借助于图形，直观分析符合题意的条件.

解　(1) $f^{-1}(x)=2^x$，$f^{-1}(1-x)=2^{1-x}$，$f^{-1}(x)\to f^{-1}(-x)\to f^{-1}[-(x-1)]$. $f^{-1}(1-x)$ 图像见图 1.

(2) D. (从面积变化，观察切线斜率变化).

(3) $f(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{1+x}, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\[2mm] 1+\dfrac{1}{-1+x}, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$ 有 0 个. 图像见图 2.

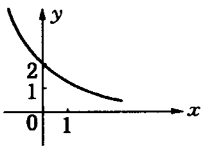


图 1

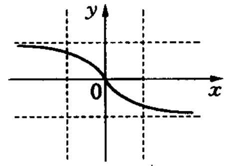


图 2

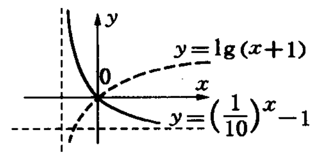


图 3

(4) $y=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}-1$. 图像见图 3.

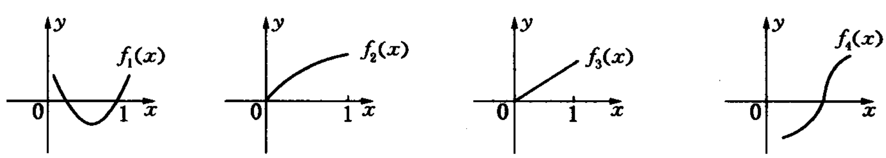
解题反思

(1) 求解时应注意正确作图,作图时应抓住关键性质.并善于利用图像平移、对称、伸缩等变换.

(2) 除了会作图像,还须识图,用图,进行形数结合,拓展解题思路,使问题化难为易.

例 2 $f_i(x)$, $i\in(1, 2, 3, 4)$ 是定义在$[0, 1]$上的四个函数,当 x_1、$x_2\in[0, 1]$, $\lambda\in[0, 1]$ 时, $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立.

(1) 下列图像中符合此性质的是(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(2) 下列函数中符合上述性质的是(　　).

(A) $y=2-x^2$　　(B) $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)

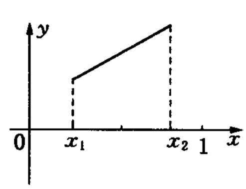
(C) $y=\sin x$　　(D) $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)

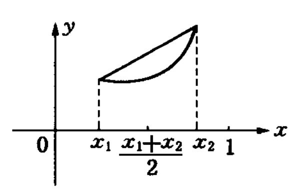
思路分析 通过对λ取特殊值,挖掘函数隐含的下凹的性质,再结合图形,顺利予以解答.

解 (1) A、C (2) D.

首先判断符合此规则的函数有什么性质.

设 x_1、x_2 定义在$[0, 1]$中任意两个变量,取特殊值 $\lambda=\frac{1}{2}$,则恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$,说明函数图像下凹或是直线段,由此不难得出结论.





解题反思 本题求解采用了特殊到一般的方法$\left(\text{即 }\lambda=\frac{1}{2}\right)$,这样比较直观地认识了