总主编/蔡上鹤

特别合作 sina新浪网 中学生学习报

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学 MAGIC MATH

魔法数学

Magic Math

专题突破

空间向量与简单几何体

体验征服学习考试精彩感觉！

高中版

丛书主编/严文科

请认准此防伪标识

补上你知识木桶上最短的那一块

- 最全面、最创新的素质教育
- 最科学、最优化的学习流程
- 最新颖、最独到的情境设置

百所名校联盟·缔造世纪精品工程

读魔法教辅，获梦幻惊喜 Magic

著名节目主持人 魔法教辅品牌代言人 何炅

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

总主编/蔡上鹤

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

MAGIC MATH

魔法数学

Magic Math

专题突破

空间向量与简单几何体

高中版

丛书主编 严文科
本册主编/李 慧 朱 林
编 委/关清波 于文君 孙江昆
张 笋 于春明 杜敦杰
邵承青 周正实 孙炳木

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学专题突破．高中：空间向量与简单几何体/李慧，朱林主编．—北京：长征出版社，2004

ISBN 7-80015-814-4

Ⅰ．魔… Ⅱ．①李… ②朱… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 044323 号

魔法数学专题突破高中版

主创设计／魔法教育发展研究中心
电　　话／010－80602977
网　　址／http：//www.magic 365.com.cn

出　　版／长征出版社
（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）
行销企划／北京九恒世纪文化有限公司
（服务热线：010－80602977）
经　　销／全国新华书店
印　　刷／北京泰山兴业印务有限公司
开　　本／880×1230　　1/32
字　　数／4160 千字
印　　张／130 印张
版　　次／2004 年 6 月第 1 版
印　　次／2004 年 6 月第 1 次印刷
书　　号／ISBN 7-80015-814-4/G・313
全套定价／192.00 元

Magic

魔法系列丛书

Magic

致读者

在新的世纪，国内基础教育正发生着日新月异的变化，广大教师和学生对中学教辅读物出版创新的呼声也此起彼伏：中学教辅需要精品，需要品牌，需要从更远、更新的角度重新打造！在这一大背景下，魔法英语以其独特的品质和魅力赢得了读者的尊重和认可，应接不暇的咨询电话和雪片般的订单让我们更加深刻地体会到：中国的基础教育太需要“魔法”这样卓越的图书了！

数以万计的中学教师和学生问我们：你们何时出版“魔法语文”“魔法数学”“魔法物理”“魔法化学”等其他学科的图书？

肩负着社会的责任，带着广大中学师生的期盼，我们联合了美国蒙登戈国际语言研究中心、英国剑桥国际语言研究院等国内外数十所教育研究机构，邀请了张定远、蔡上鹤、薄冰、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等十余名基础教育界权威、国内顶级教材专家，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，隆重推出了以《魔法英语》为龙头的《魔法语文》《魔法数学》《魔法物理》《魔法化学》《魔法生物》《魔法政治》《魔法历史》《魔法地理》系列魔法图书。

“享受学习每一刻！”是魔法系列图书最基本的理念，我们希望把魔法系列图书这一成功的理念推广到中学教育的每一个学科、每一个年级、每一个领域。

一千多位教育专家及知名特高级教师联手缔造的魔法系列图书，已经走在中学教辅图书的最前沿，成为一个全新的中学教辅品牌！一个真正由专家打造的具有国际品质的中学教辅品牌！

我们希望给中学生提供一个崭新的学习平台，为每位读者付出的时间和殷切的期待提供丰厚的回报。我们力求通过不懈的努力，让魔法系列图书解放中学生的学习，解放中学生的考试，让学习变得“轻松、快乐、高效”的思想光芒照耀每位读者！

我们与读者的心是相通的，同广大一线教师的心是相通的。现在，我们付出的每一份努力，都得到了广大教师和读者的支持和肯定。面对这些勉励和关怀，我们将会以百倍的努力来报答。未来我们会做得更好，这是我们的目标，也是我们不变的承诺。

魔法系列图书愿做中学生学习的最佳助手，最贴心的朋友！让魔法系列图书伴随着我们的幸福、快乐和回忆，一起成长！

魔法教育发展研究中心
2004.6

前 言

Preface

根据教育专家多年的研究发现，几乎每位学生在学习过程当中都有薄弱的学科，每一学科中都有薄弱的专题，而正是这些薄弱学科、薄弱的专题阻碍了学生的成功。“亡羊补牢，未为迟也。”为了帮助更多中学生在高考中走向成功，我们组织了全国数十名有多年教学和研究经验的特高级教师、教研员，在张定远、薄冰、蔡上鹤、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等中学教育界权威、教材专家的悉心指导下，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，精心编写了本系列图书。

本丛书在编写过程中秉承“科学划分、高效实用”的编写理念，尊重现行教材体系，依据教学大纲与考试大纲，结合近几年数学命题实践及课堂教学实际，将高中数学专题科学地设置为：《集合与简易逻辑》《函数》《数列》《三角函数》《平面向量》《不等式》《直线与圆的方程》《圆锥曲线方程》《空间直线与平面》《空间向量与简单几何体》《排列、组合、二项式定理》《概率统计（理）》《概率统计、导数（文）》《极限、导数、复数（理）》《高中数学思想方法》十五个分册。

本书具备如下特点：

细分专题，针对性强：适合高中不同年级的学生对自己的薄弱学科、薄弱专题集中复习，不受年级、教材限制。

内容详尽，重点突出：以大纲为面，考纲为线，所有该专题的内容全面详尽，重点难点内容突出。

表述灵活，直观高效：本书灵活使用图、表、眉批、旁注等多种表达方式进行内容阐述，使平常枯燥的学习过程变得直观、具体、高效。

信息敏锐，材料新颖：本书采用了大量的前沿性、趣味性、现实性资料，结合最新的高考信息和命题趋势，从最新的角度组织学习和复习，具有很强的实用性和超前性。

Magic

前　言
Preface

丛书栏目功能定位如下：

【教考动态】紧扣教学大纲和考试大纲，总结分析中学教学教材改革的新趋势、新动向，突出最新考试信息和对未来高考命题走向的预测，有很强的指向性。

【知识精讲】对所涉及科目的知识点，高度集中地作全面、详尽地分析，以利学生在有限的时间里，集中补差、补弱，系统有效地提高自己的知识能力，补上自己知识木桶上最短的那一块。

【经典例题】针对【知识精讲】中的内容，重点精选一线教师多年积累的最典型例题进行分析，与知识精讲栏目形成互动，总结规律，点拨技巧，使学生融会贯通，举一反三，触类旁通。

【思维跨越】对重点、难点和热点延伸，使学生既从点上把握，又能够纵横扩展，最终对所学知识能够达到点面结合，灵活运用。

【范例剖析】针对【思维跨越】中的内容，对综合性强的拓展题作解析，结合最新的《考试大纲》，评价每道题的命题角度和能力层级要求，分析解题过程，点拨解题技巧。

【高考连线】收集了与本节内容相关的近几年的高考题并进行简要解析，使学生了解高考，感受高考，为决胜高考做准备。

【专题训练】专题训练由三个层次组成，第一层次的基础训练，重在基础；第二层次的拓展训练，重在提高；第三层次的综合训练，重在运用。通过这三个层次的练习从而使知识的训练由浅入深，阶梯形提高，最终达到把握基础知识，培养和提高学生的综合素质和应考能力。

尽管我们在编写过程中，本着对学生高度负责的态度，处处把关，但如果还有疏漏，诚请读者指正。

编　者

2004年6月于北京

Magic

魔法数学

MAGIC MATH

目　　录

Contents

Magic

目　录

Contents

空间向量与简单几何体

知识网络构建

- 空间向量
  - 空间向量及其运算
    - 加、减与数乘运算
    - 共线向量与共面向量
    - 空间向量基本定理及其推论
    - 空间向量的数量积
  - 空间向量坐标运算
    - 空间直角坐标系
    - 空间向量的直角坐标运算
    - 夹角和距离公式
    - 平面的法向量
  - 空间向量的应用
    - 线与线、线与面、面与面及其垂直和共线的充要条件
    - 线与线、线与面、面与面所成的角
    - 简单几何体的体积及其表面积
    - 线与线、线与面、面与面间的距离

第一讲　空间向量及其运算

教考动态

1. 教考要求

(1)理解空间向量的概念，掌握空间向量的加法、减法和数乘. 教纲、考纲一致

(2)了解空间向量的基本定理. 教纲、考纲一致

(3)掌握空间向量的数量积的定义及其性质. 教纲、考纲一致

(4)理解直线的方向向量、平面的法向量、向量在平面内的射影等概念. 教纲、考纲一致

2. 命题动向

空间向量是这次新课程标准所增加的内容，它充分体现了数形结合和代数与几何之间转化的重要的数学思想及方法. 是高考命题的热点，纵观近几年高考试题，立体几何每年的题量基本稳定. 新课程标准卷以向量解法为主. 这一点应引起我们高度重视.

知识精讲

1. 空间向量及其加减与数乘运算

(1)在空间，具有大小和方向的量叫做向量. 同向且等长的有向线段表示同一向量或相等的向量，空间向量的加法、减法与数乘运算是平面向量对应运算的推广.

(2)空间向量的加、减与数乘运算满足如下运算律.

①加法交换律：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

②加法结合律：

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

③数乘分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

2. 共线向量与共面向量

(1)如果表示向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫共线向量或平行向量.

(2)平行于同一平面的向量叫共面向量.

(3)共线向量定理:对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

(4)共面向量定理:如果两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线,则向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在实数对 x、y,使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

3. 空间向量基本定理

(1)如果三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面,那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$,存在一个惟一的有序实数组 x、y、z,使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

(2)推论:设 O、A、B、C 是不共面的四点,则对空间任一点 P,都存在惟一的三个有序实数组 x、y、z,使$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

4. 两个向量的数量积

(1)向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

(2)向量数量积的性质:

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$;②$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;③$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$.

(3)向量的数量积满足如下运算律:

①$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

③$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

经典例题

例 1　已知 O、A、B、C 为空间四点,又$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$为空间的一个基底,则

A O、A、B、C 四点共线

B O、A、B、C 四点共面,但不公线

C O、A、B、C 四点中有三点共线

D O、A、B、C 四点不共面

答案:D.

例 2　已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是平面 α 内的两个不相等的非零向量,非零向量 $\boldsymbol{c}$ 在直线 l 上,则 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 是 $l\perp\alpha$ 的

A 充分不必要条件

B 必要不充分条件

C 充要条件

D 即不充分也不必要条件

解:若 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,∵非零向量 $\boldsymbol{c}$ 在直线 l 上,

∴$l\perp\boldsymbol{a},l\perp\boldsymbol{b}$,但是由于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 可能是两共线向量,所以仅由 $l\perp\boldsymbol{a}$,$l\perp\boldsymbol{b}$不一定推出 $l\perp\alpha$.

若 $l\perp\alpha$,则由于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是平面 α 内的两个不相等的非零向量,故必有 $l\perp\boldsymbol{a},l\perp\boldsymbol{b}$,∴$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$,因此,选 B.

例 3　已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{AD}=3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$,求证:$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共面.

分析:只要证明$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$共面,则只要证存在三个非零实数 x、y、z,使$\overline{x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}}$.

证明:令 $x(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+y(2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2)+z(3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{0}$,

则$(x+2y+3z)\boldsymbol{e}_1+(x+8y-3z)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$,

∵$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,∴$\begin{cases}x+2y+3y=0\\x+8y-3z=0\end{cases}$,易知$\begin{cases}x=-5\\y=1\\z=1\end{cases}$ 是其中一组解,则 $-5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$,∴$A$、$B$、$C$、$D$ 四点共面.

思维跨越

1. 空间向量加法、减法、数乘的意义及运算律与平面向量类似. 这些运算不但适合中学里的代数运算律,而且有很多性质与实数性质完全相同.

空间任意两个向量都可以通过平移转化为平面向量. 两个向量相加的平行四边形法则在空间仍然成立.

向量的减法是由向量的加法来定义的:减去一个向量就等于加上它的相反向量. 由此可以推出向量等式的移项法则. 即将其中任意一项变号后,从等式一端移到另一端. 例如:由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$.

2. 空间直线、平面的向量参数方程及线段中点的向量公式

由共线向量定理可得空间直线的向量参数方程:$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$. 如图 1-1.

这意味着直线 l 上的点 P 和实数 t 之间是一一对应的关系,若取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,$t=\dfrac{1}{2}$,则得到线段 AB 的中点公式:$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

空间一点 P 位于平面 MAB 内的充分必要条件是存在实数对 x、y,使$\overrightarrow{MP}=$

$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$. 满足这个关系式的点 P 都在平面 MAB 内；反之，平面 MAB 内的任意一点 P 都满足这个关系式. 这个充要条件常用以证明四点共面.

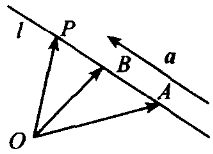

图 1—1

3. 空间向量基本定理及其推论

空间向量基本定理说明，用三个不共面的已知向量组 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 可以线性表示出空间任意一个向量，而且表示的结果是惟一的.

4. 两个向量的数量积的计算方法及其应用

向量的数量积常用于有关向量相等，两向量垂直、射影、夹角等问题中.

5. 用空间向量解决立体几何问题

一般可按以下过程进行思考：

(1)要解决的问题可用什么向量知识来解决？需要用到哪些向量？

(2)所需要的向量是否已知？若未知，是否可用已知条件转化成的向量直接表示？

(3)所需要的向量若不能直接用已知条件转化成的向量表示，则它们分别最易用哪个未知向量表示？这些未知向量与已知条件转化的向量有何关系？

(4)怎样对已经表示出来的所需向量进行运算，才能得到需要的结论？

6. (1)在讨论向量共线或共面时，必须注意零向量与任意向量平行，并且我们所说的向量可以平移，因而不能完全按照它们所在直线的平行性——共面关系来确定向量关系.

(2)共线与共面向量不具有传递性.

(3)应用向量基本定理和向量的数量积可以用于解决向量相等、垂直、夹角等问题.

范例 1 如图 1—2，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 M 是棱 AA_1 的中点，点 G 在侧棱 DD_1 上，且 $DG:GD_1=2:1$，设 $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$. 试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{CA_1}$、$\overrightarrow{CM}$、$\overrightarrow{CG}$.

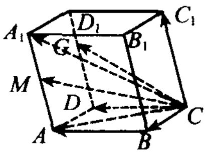

图 1—2

分析：要想用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示出所给向量，只需结合图形，充分运用空间向量加法和数乘向量的运算律即可.

解：如图，

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

范例 2　向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之间夹角为 $30°$，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$. 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{b}^2$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=3\times4\cos30°=6\sqrt{3}$，

$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos0°=|\boldsymbol{a}|^2=9$，$\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2\cos0°=16$，

$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=9+6\sqrt{3}-32=6\sqrt{3}-23$.

探究提升

向量的数量积满足：交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；加法对乘法的分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$. 正是因为向量的数量积满足上述三个运算律. 我们在求解时，按照多项式的乘法进行去括号运算.

范例 3　已知一个 $60°$ 的二面角的棱上有两个点 A、B，AC、BD 分别是在这两个面内且垂直于 AB 的线段，又知 $AB=4$，$AC=6$，$BD=8$，求 CD.

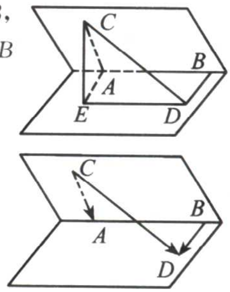

图 1—3

解：如图 1—3，

$\because CA\perp AB$，$BD\perp AB$，且二面角为 $60°$，

$\therefore\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=120°$，

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

又 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

$\therefore|\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})^2$

$=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle$

$=6^2+4^2+8^2+2\times6\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=68$

$\therefore|\overrightarrow{CD}|=2\sqrt{17}$，故 $CD=2\sqrt{17}$.

变式题 1：如图 1—4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=60°$，CD 为 $\angle C$ 的平分线，$AC=4$，$BC=2$，过 B 作 $BN\perp CD$ 于 N，延长交 CA 于 E，将图形沿 CD 折起，使 $\angle BNE=120°$，求折后所得线段 AB 的长度.

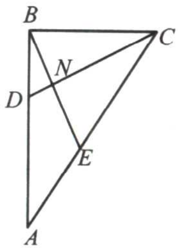

图 1—4

变式题 2：在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=1$，$\angle ACD=$

90°，将它沿着对角线 AC 折起，使 AB 与 CD 成 60° 角，求 B、D 两点间的距离.

分析：求两点间的距离或某线段的长度时，经常把此线段用向量表示，通过 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 来求 $|\boldsymbol{a}|$，本题最容易忽视的是 $\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=120^\circ$ 这一结论，导致解题的不完整.

探究提升

应用向量基本定理和向量的数量积可以用于解决向量相等、垂直、夹角问题.

范例 4 如图 1－5，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N、P 分别是 CC_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点，求证：平面 MNP // 平面 A_1BD.

分析：要证明平面 MNP // 平面 A_1BD，可考虑这两个平面内的两条相交直线互相平行. 而证明两条直线平行可转化为证明两个向量平行，所使用的工具是共线向量定理.

解：$\because \overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}$

$\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1D}$

而 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{C_1M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}$

$\therefore PM // A_1B$.

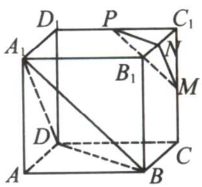

图 1－5

同理：$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NC_1}+\overrightarrow{C_1M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1D}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D}$

$\therefore MN // A_1D$.

又由于 A_1B 与 A_1D 是平面 A_1BD 中的相交直线，PM 与 MN 是平面 MNP 中的相交直线，所以平面 MNP // 平面 A_1BD.

探究提升

本题是利用向量的运算得到共线向量关系的，也可以把正方体放在空间直角坐标系中，计算相应向量的坐标，也很容易得到本题的证明.

范例 5 如图 1－6，已知正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的侧棱长为 2，底面边长为 1，M 是 BC 的中点.

(1)求异面直线 AB' 与 BC' 的夹角；

(2)在直线 CC' 上求一点 N，使得 $MN\perp AB'$.

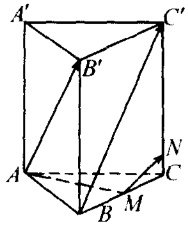

图 1－6

解：(1)因为 $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}$，

$\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}$

又因为 $ABC-A'B'C'$ 是正三棱柱，

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BB'}\perp\overrightarrow{B'C'}$

$\therefore\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C'}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$

由题意，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B'C'}|=1$，$|\overrightarrow{BB'}|=2$

从而得：

$\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})\cdot(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB'}+(\overrightarrow{BB'})^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{B'C'}$

$=|\overrightarrow{BB'}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'C'}$

$=4+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{B'C'}|\cos\langle\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'C'}\rangle$

$=\dfrac{7}{2}$

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}|\cdot|\overrightarrow{BC'}|}=\dfrac{7}{10}$

$\therefore\langle\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}\rangle=\arccos\dfrac{7}{10}$

即异面直线 AB' 与 BC' 的夹角为 $\arccos\dfrac{7}{10}$

(2)设 $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{BB'}$

由题意可得：$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}$

$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C'}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$

$\because\overrightarrow{AB'}\perp\overrightarrow{MN}$，$\therefore\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{MN}=0$

也就是$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN})=0$

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CN}=0$

即：$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{MC}|\cos\langle\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}\rangle+x|\overrightarrow{BB'}|^2=0$

$\therefore-\dfrac{1}{4}+4x=0$

得 $x=\dfrac{1}{16}$