“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

历届

希望杯

全国数学邀请赛

试题精选详解

初一

马 飞 等◎编著

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

气象出版社

“希望杯”数学竞赛系列丛书　　主编　周国镇

历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解

初　一

马　飞　等◎编著

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

历届"希望杯"全国数学邀请赛试题精选详解. 初一 / 周国镇主编. 一北京：气象出版社，2006.1

（"希望杯"数学竞赛系列丛书）

ISBN 7-5029-4082-0

Ⅰ. 历...　Ⅱ. 周...　Ⅲ. 数学课－初中－解题　Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 145872 号

气象出版社出版

(北京市海淀区中关村南大街 46 号　邮编:100081)

总编室:010－68407112　　发行部:010－62175925

网址:http://cmp.cma.gov.cn　E-mail:qxcbs@263.net

责任编辑:崔晓军　黄丽荣　终审:林雨晨

封面设计:贾衍凤　责任技编:刘祥玉　责任校对:李佳凡

*

河北天普润印刷厂印刷

气象出版社发行

*

开本:850×1168　1/32　印张:5.375　字数:140 千字

2006 年 1 月第一版　　2006 年 1 月第一次印刷

印数:1～10000　定价:8.00 元

前　言

一个学科竞赛活动能否成功，除了评奖、组织等工作以外，命题是很关键的。“希望杯”全国数学邀请赛自1990年以来成功地举办了16届，可说是久盛不衰，这中间，试题出得好，起了特别重要的作用。中学生们都愿意研究这些试题，因为在很多试题中蕴含着的内在趣味吸引着他们，因为解答这些试题所用到的数学知识大多没有超出他们在学校里学到的数学内容，还因为在研究如何破解这些试题的过程中，自己的思维和数学能力受到了挑战，他们在经历了重重困惑、碰壁和努力之后终于获得彻悟的结果，那是多么美好的感觉！他们感受到了数学内在的魅力，数学的美，这种科学思维的美让他们感动，这种美引发的愉悦可能会引导青年人走向毕生的科学追求。

如果说“希望杯”全国数学邀请赛的全部试题都有丰富的内涵，显然是言过其实，但是其中确有那么一部分题目委实很精彩，它们有比较丰富的背景知识和比较广阔的思维空间，如果能从不同的视角和不同的层面去分析和研究它们，那么从中吸收到的知识和思维的营养必定远远超过这些题目本身。正是出于这样的认识，我们特意编辑出版了《历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解》(初一、初二、高一、高二各一册)，作者中有“希望杯”命题委员会的成员，他们中有资深的数学工作者、大学教授、杰出的中学数学教师，他们都有很好的数学功底，每年都为“希望杯”全国数学邀请赛编拟许多漂亮的题目；还有多年来对“希望杯”邀请赛历届试题深有研究的中学数学教师，他们曾经培养出金银牌选手，并对“希望杯”试题发表过颇有见地的文章。这些作者在“希望杯”命题委员会的指导下，从2000多道“希望杯”全国数学邀请赛试题中精

选出了一部分，对这些题目作了尽可能详尽的分析，力求充分展示题目的内涵，于是成就了这套书。我们期望中学生读了此书，数学水平能有显著提高，中学教师读了此书，能从中得到诸多启示，从而提高自己的教学水平。这个期望能否达到，最有权威的评判当然是本书的读者们。我们真诚地希望读者对本书的不当之处提出批评和意见，我们力求再版时努力做进一步的修改。

周国镇

2005年11月22日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　　录

第一部分　基础知识和基本能力

第1讲　有理数的巧算

运算式子浩如烟海，每一个式子都蕴含着自己独特的内在关系.只要你在解题之前认真审题，富有独特个性(独创性)的好解法就会被你发掘出来.常作这样有益的尝试，不但可以使运算简捷、准确，而且能使我们的思维能力得到提高.

例1　计算 $3.1416\times7.5944+3.1416\times(-5.5944)$ 的值是　(　　)

(A)6.1632.　(B)6.2832.　(C)6.5132.　(D)5.3692.

第2届(1991年)初一第1试

分析　按混合运算的顺序，本题应先算乘法，再算加法，但这样做运算量较大.仔细观察原式，可逆用分配律，将原式写成 $3.1416\times(7.5944-5.5944)$，就可以化繁为简，获得巧解.

解　原式 $=3.1416\times(7.5944-5.5944)$

$=3.1416\times2=6.2832$.　选(B).

例2　计算 $211\times(-455)+365\times455-211\times545+545\times365=$______.

第15届(2004年)初一第1试

分析　观察题目后发现，原式中的有理数 211，455，365 都是重复出现的，又注意到其中的运算结构特征，可逆用分配律给出以下几种巧妙的解法.

解法1　原式 $=211\times(-455-545)+365\times(455+545)$

$=211\times(-1000)+365\times1000$

$=1000\times(365-211)$

$=154000.$

解法 2 原式 $=455\times(-211+365)-545\times(211-365)$

$=455\times154+545\times154$

$=154\times(455+545)$

$=154000.$

例 3 计算 $(2\times3\times4\times5)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=$______.

第 6 届(1995 年)初一第 1 试

分析 原式中所蕴含的优美的结构特征,通过观察和联想就可以揭示出来:第二个括号中各分数的分母,分别是第一个括号中从左至右的各个因数.于是,应用分配律便可以获得巧妙解法.

解 原式 $=3\times4\times5+2\times4\times5+2\times3\times5+2\times3\times4$

$=60+40+30+24$

$=154.$

例 4 $\left(-1\frac{1}{36}+\frac{13}{107}\div\frac{24}{107}-\frac{17}{18}\right)\div\left(-\frac{7}{8}\right)\times1\frac{7}{11}=$______.

第 8 届(1997 年)初一第 1 试

分析 按常规方法则运算量较大.注意到全式运用分配律后,可以进行约分,从而简化运算.

解 原式 $=\left(-\frac{37}{36}+\frac{13}{107}\times\frac{107}{24}-\frac{17}{18}\right)\times\left(-\frac{8}{7}\right)\times\frac{18}{11}$

$=\frac{148}{77}-\frac{78}{77}+\frac{136}{77}$

$=\frac{206}{77}.$

例 5 计算 $\frac{1}{5}[(-1989)+(-1990)+(-1991)+(-1992)+$

$(-1993)]=$______.

第2届(1991年)初一第1试

分析　认真观察后不难发现，后四个数的绝对值分别比第一个数的绝对值大1,2,3,4，根据这一特点即可简化运算；再认真思考，注意到五个数的平均数的绝对值为1991. 这样，我们可得如下两种简便解法.

解法1　原式$=-\frac{1}{5}[1989\times5+(1+2+3+4)]$

$$=-1989-2$$
$$=-1991.$$

解法2　原式$=-\frac{1}{5}(1991\times5)$

$$=-1991.$$

例6　计算$\left(-\frac{72}{13}\right)^2+\left(\frac{30}{13}\right)^2=$______.

第6届(1995年)初一第1试

分析　注意到$72=6\times12$，$30=6\times5$，而$12^2+5^2=13^2$，于是本题可利用因数分解进行简便运算.

解

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{72}{13}\right)^2+\left(\frac{30}{13}\right)^2\\&=\frac{6^2}{13^2}\times12^2+\frac{6^2}{13^2}\times5^2\\&=\frac{6^2}{13^2}\times(12^2+5^2)\\&=\frac{6^2}{13^2}\times13^2\\&=6^2=36.\end{aligned}$$

例7　$\dfrac{1\frac{2}{3}-4.5}{-\frac{1}{2}\times1.\dot{3}}-\dfrac{(1-2)^2}{\left|-\frac{5}{23}\right|}=$　　(　　)

(A) $-\frac{7}{20}$. (B) $-\frac{122}{45}$. (C) $-\frac{177}{20}$. (D) $-\frac{292}{45}$.

第 14 届(2003 年)初一第 2 试

分析 原式的结构和数字都比较复杂,有整数、负分数、带分数、小数、无限循环小数等;也含有绝对值运算、乘方运算等;还有繁分数的化简.

计算时应先将小数、无限循环小数化为分数,带分数化为假分数,同时也进行乘方运算和绝对值运算,这样就把原式化为一般的繁分数运算问题.

解 原式$=\dfrac{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}{-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}}-\dfrac{1}{\frac{5}{23}}$

$$=-\left(\frac{5}{3}-\frac{9}{2}\right)\times\frac{3}{2}-\frac{23}{5}$$

$$=-\frac{5}{2}+\frac{27}{4}-\frac{23}{5}$$

$$=\frac{-10+27}{4}-\frac{23}{5}$$

$$=\frac{17\times5-23\times4}{20}=-\frac{7}{20}.$$ 选(A).

例 8 计算 $2+(-3)+(-4)+5+6+(-7)+(-8)+9+10+(-11)+(-12)+13+14+15$.

第 3 届(1992 年)初一第 1 试

分析 按常规,本题应从左到右依次进行计算,这是一种笨算法.但仔细观察题目的结构特征,发现四个数一组时:$2+(-3)+(-4)+5=0$,等,则可化繁为简,得一巧算法.

解 原式$=[2+(-3)+(-4)+5]+[6+(-7)+(-8)+9]$

$+[10+(-11)+(-12)+13]+14+15$

$=0+0+0+14+15$

$=29.$

例 9　计算$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}$.

第 2 届(1991 年)初一第 1 试

分析　本题若采取先通分的方法是难以获解的.但分析一下原式中各分母的特征：$6=2\times3$，$12=3\times4$，$20=4\times5$，$30=5\times6$，$42=6\times7$，于是可以逆向应用分数的加减法则，将原式中的各分数拆成两个分数的和或差，使正、负数对消，达到化简的目的.这种解题方法称为拆项相消法.

解　原式$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\right)$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{7}.$$

例 10　化简$\frac{190091}{19901991^2-19901989\times19901991}$.

第 2 届(1991 年)初二第 2 试

分析　观察数据特征有：$19901991-2=19901989$，且分母有公因数 19901991，故可逆用乘法分配律简算.

解　$19901991^2-19901989\times19901991$

$=19901991\times(19901991-19901989)$

$=19901991\times2$

$=39803982.$

原式$=\frac{190091}{39803982}$.

例 11 计算$\frac{19931992^2}{19931991^2+19931993^2-2}=$________.

第 4 届(1993 年)初一第 2 试

分析 注意到:19931991+1=19931992=19931993−1,故可以逆用平方差公式巧算.

解 原式$=\frac{19931992^2}{(19931991^2-1)+(19931993^2-1)}$

$=\frac{19931992^2}{19931992\times19931990+19931992\times19931994}$

$=\frac{19931992}{19931990+19931994}$

$=\frac{19931992}{2\times19931992}=\frac{1}{2}$.

例 12 计算$\frac{2003^2-4004\times2003+2002\times4008-2003\times2004}{2003^2-3005\times2003-2003\times2005+2005\times3005}$

=______.

第 15 届(2004 年)初二第 1 试

分析 直接按照混合运算的顺序进行计算,显然很繁,运算量较大.注意到原式中的数大都重复出现,有的数之间呈倍数关系,我们想到了逆用分配律来简化运算.

解 原式$=\frac{2003\times(2003-4004)+4004\times2004-2003\times2004}{2003\times(2003-3005)-2005\times(2003-3005)}$

$=\frac{2003\times(2003-4004)+2004\times(4004-2003)}{(2003-3005)\times(2003-2005)}$

$=\frac{(2003-4004)\times(2003-2004)}{(2003-3005)\times(2003-2005)}$

$=\frac{(-2001)\times(-1)}{(-1002)\times(-2)}$

$=\frac{2001}{2004}=\frac{667}{668}$.

例 13　$-\frac{191919}{939393}-\frac{190190}{930930}-\frac{19001900}{93009300}$的值等于　(　　)

(A)-3.　(B)$-\frac{19}{31}$.　(C)-1.　(D)$-\frac{1}{3}$.

第 4 届(1993 年)初一第 1 试

分析　注意到原式中的各数,其数位上的数都是重复排列,于是可将各数适当进行分拆变形,再约分求解.

解　原式$=-\left[\frac{19\times10101}{93\times10101}+\frac{190\times1001}{930\times1001}+\frac{1900\times10001}{9300\times10001}\right]$

$=-\left[\frac{19}{93}+\frac{19}{93}+\frac{19}{93}\right]$

$=-\frac{19}{93}\times3$

$=-\frac{19}{31}$.　选(B).

例 14　$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{10}\right)$等于　(　　)

(A)5.5.　(B)5.65.　(C)6.05.　(D)5.85.

第 5 届(1994 年)初一第 1 试

分析　本题若先进行括号里的运算,显然很繁.注意到全式从第二个数$\frac{1}{5}$起,相邻的两个数之和依次为 1,于是可重新结合,获得巧妙的解法.

解　原式$=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\right)-\frac{1}{10}$

$=5+0.75-0.1=5.65$.　选(B).

例 15　$1992\times19941994-1994\times19931993=$______

第 5 届(1994 年)初一第 1 试

分析 本题直接计算运算量很大,注意到原式中 1994 和 1993 重复出现,设想能否提出一个公因数,逆向应用乘法分配律来进行计算.

解 原式 $=1992\times(1994\times10^4+1994)-1994\times(1993\times10^4+1993)$

$=1992\times1994\times10001-1994\times1993\times10001$

$=1994\times10001\times(1992-1993)$

$=-1994\times10001$

$=-19941994.$

例 16 计算 $2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9+2^{10}=$ ________.

第 10 届(1999 年)初一第 1 试

分析 本题可以直接计算求出结果,但运算量太大.注意到原式从左至右每一项逐级升幂地排列着,为此我们采取逐级降次的对策.

解 原式 $=2^{10}-2^9-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$=2^9(2-1)-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$=2^8(2-1)-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$=2^7(2-1)-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$\vdots$

$=2^2(2-1)+2$

$=6.$

例 17 $20\div(0.30+0.31+0.32+\cdots+0.69)$ 的值的整数部分是 ( )

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

第 14 届(2003 年)初一培训题

分析 括号里的数都是小数,且项数比较多,要讲究点技巧.

注意到与加数 0.5 等距离的两数：0.31 与 0.69 的和为 1，0.32 与 0.68 的和为 1，…，一共有 19 对，余下了 0.3 和 0.5，可知除数为 19.8. 显然 $20\div19.8$ 的值的整数部分是 1.

选(A).

例 18 计算 $\dfrac{78^3+22^3}{78^2-78\times22+22^2}=$______.

第 9 届(1998 年)初一第 2 试

分析 注意到分母 $78^2-78\times22+22^2$ 是分子 78^3+22^3 利用立方和公式变形后的一个因数，所以解本题我们可以先将分子利用立方和公式分解，约分后就可以简化运算.

解 原式$=\dfrac{(78+22)(78^2-78\times22+22^2)}{78^2-78\times22+22^2}$

$=78+22$

$=100.$

说明 简便方法的得来，是建立在对题目认真观察分析及丰富联想基础上的，今后遇到类似的“难题”，要有“求简”意识，广泛与所学知识联想，力争找到巧妙方法.

例 19 计算 $1.2345^2+0.7655^2+2.469\times0.7655=$______.

第 2 届(1991 年)初一第 2 试

分析 像这类计算题一般都不宜直接硬算，而应当充分挖掘题目的数据特征. 本例中，2.469 正好是 1.2345 的 2 倍，整个式子符合完全平方公式的特征. 同时，$1.2345+0.7655=2$ 正好凑成整数.

解 原式$=1.2345^2+2\times1.2345\times0.7655+0.7655^2$

$=(1.2345+0.7655)^2=4.$

例 20 计算 $\left|\dfrac{1}{1001}-\dfrac{1}{1000}\right|+\left|\dfrac{1}{1002}-\dfrac{1}{1001}\right|-\left|\dfrac{1}{1002}-\dfrac{1}{1000}\right|=$

______.

第 5 届(1994 年)初一第 1 试

分析 若先计算每个绝对值符号内的得数,计算量显然很大.由于各绝对值符号内有相同的数,所以若先去掉绝对值符号再计算,可能会简便一些.

解 因为 $\frac{1}{1001}-\frac{1}{1000}<0,\frac{1}{1002}-\frac{1}{1001}<0,\frac{1}{1002}-\frac{1}{1000}<0,$

所以 $$\text{原式}=-\left(\frac{1}{1001}-\frac{1}{1000}\right)-\left(\frac{1}{1002}-\frac{1}{1001}\right)+\left(\frac{1}{1002}-\frac{1}{1000}\right)$$
$$=0.$$

例 21 计算$\frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)}{2^{32}-1}=$______.

第 1 届(1990 年)初一第 1 试

分析 原式分子从左至右的每一个括号中,呈规律性变化,若分子乘以$(2-1)$,就可以出现规律性的运算,即重复利用公式$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 进行计算.

解 因为 $$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$
$$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$$
$$=2^{32}-1,$$

所以 $$\frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)}{2^{32}-1}=1.$$

说明 解这类规律性问题,犹如经历数学规律的探究过程,体会获取规律时的乐趣,对培养创新精神,提高探究能力,具有十分重要的意义.

例 22 计算 $1995\times19941994+1996\times19951995-1994\times19951995-1995\times19961996=$______.

第 6 届(1995 年)初二第 2 试

分析　19941994，19951995，19961996 很有规律，可以分别表示成

$$1994\times10001, 1995\times10001, 1996\times10001,$$

于是四个乘积可以两两对消，结果为 0.

解

$$\begin{aligned}&1995\times19941994+1996\times19951995-\\&1994\times19951995-1995\times19961996\\=&1995\times1994\times10001+1996\times1995\times10001-1994\times\\&1995\times10001-1995\times1996\times10001\\=&(1995\times1994\times10001-1994\times1995\times10001)+(1996\times\\&1995\times10001-1995\times1996\times10001)\\=&0.\end{aligned}$$

例 23　已知 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=1$，则 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{20}-\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=$______.

第 10 届(1999 年)初一第 1 试

分析　观察已知的算式和待求值的算式，其分母是对应项相同，只是有的符号不相同．待求值的算式中有五个负数，三个正数，将三个正数分别表示为

$$\frac{1}{11}=\frac{2}{11}-\frac{1}{11}, \frac{1}{110}=\frac{2}{110}-\frac{1}{110}, \frac{1}{1640}=\frac{2}{1640}-\frac{1}{1640},$$

八个负数提取负号后，可以将已知条件整体代入，运算就方便了．

解法 1

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{20}-\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}\\=&\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}-\frac{1}{11}-\frac{1}{20}-\frac{1}{41}-\frac{1}{110}-\frac{1}{1640}\right)+\\&\left(\frac{2}{11}+\frac{2}{110}+\frac{2}{1640}\right)\\=&-1+2\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}\right)\end{aligned}$$