·高等应用数学基础教材·

大学数学教程

DAXUE
SHUXUE
JIAOCHENG

主编 王 霞 张真子

哈尔滨地图出版社

高等应用数学基础教材

大学数学教程

DAXUE SHUXUE JIAOCHENG

主　编　王　霞　张真子

副主编　苏林茹　金　光

编　审　刘伯臣

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程/王霞，张真子主编.—哈尔滨：
哈尔滨地图出版社，2006.8
ISBN 7-80717-455-2

Ⅰ.大... Ⅱ.①王...②张... Ⅲ.高等数学-高等
学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第106727号

哈尔滨地图出版社出版发行
（地址：哈尔滨市南岗区测绘路2号 邮编：150086）
哈尔滨庆大印刷厂印刷
开本：787 mm×1 092 mm 1/16 印张：18.125 字数：420千字
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数：1～1 000 定价：28.00元

前　言

本教材是根据黑龙江省大学民族预科班《高等数学教程》教学大纲的要求，在编者多年讲授这门课程所使用并不断完善的讲义的基础上，通过教学实践反复修订而成的。

本教材在教学内容与论述上，深入浅出，循序渐进，重点突出，全书始终遵循教学内容的优化原则，既注意到教学内容体系的完备性，又充分考虑到学习者的认知能力。同时教材贯彻了“以应用为目的，以理论够用为度”的原则，重视理论联系实际，努力实现在高校非数学专业本科及高职高专经济管理类专业课的教学中，以数学知识为专业基础课、专业理论课奠定基础的特点。

本书可以作为普通高等院校非数学专业本科高等数学与线性代数教材，教材中打※号的章节，由授课教师根据有关专业及学习时要求进行适当安排或略去，这样并不影响后面的教学。

本教材在编写过程中，初稿的起草及最后定稿均由黑龙江民族职业学院王霞完成。编写本教材的人员还有本学院的张真子、苏林茹、金光。全书共分十章。其中第一章极限与连续由苏林茹编写（4.35万字）；第二章导数与微分由金光编写（4.35万字）；第三章中值定理，导数应用；第四章不定积分、第五章定积分由张真子编写（10.8万字）；第六章无穷极数、第七章多元函数、第八章行列式、第九章矩阵、第十章线性方程组由王霞编写（22.5万字）由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请读者及同行批评指教。

编　者

2006年9月

内 容 提 要

本教材是根据黑龙江省大学民族预科班《高等数学教程》教学大纲的要求，考虑非数学专业的本科及高职高专经济类专业不同要求，着重体现本课程的基本要求、基础知识，努力贯彻“以应用为目的，以理论够用为度”和理论联系实际的原则，突出数学知识为专业课服务的特点。

教材共分10章，具体内容是：极限与连续、导数与微分、中值定理，导数应用、不定积分、定积分、级数、多元函数、行列式、矩阵、线性方程组，同时书中还配有适量的习题。

本书可作为普通高等院校非数学专业本科《高等数学》和《线性代数》的教材，也可作为普通高等院校非数学专业专科的《经济数学》教材。

目　录

第一章 极限与连续

第一节　数列的极限

一、数列

定义 1.1　一个定义在正整数集合上的函数 $y_n = f(n)$（称为整标函数），当函数值是"数"，且自变量 n 按正整数 $1,2,3,\cdots$ 依次增大的顺序取值时，函数值按相应的顺序排成一串数：

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots$$

称为一个数列，数列中的每一个数称为数列的项，$f(n)$ 称为数列的一般项。

数列的例子：

例 1.　$y_n = \dfrac{1}{2^n}$：　$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16}$，$\cdots$

例 2.　$y_n = 2n$：　2，4，6，8，$\cdots$

例 3.　$y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$：　0，1，0，1，$\cdots$

由这些例子可以看出：随着 n 逐渐增大时，它们有着各自变化的趋势。下面，我们先对几个具体数列的变化趋势分析，并由此引出数列极限的概念和定义。

二、数列的极限

我们知道，半径为 r 的圆内接正多边形的面积 $s_n = f(n)$（n 为正多边形的边数），当 n 越来越大时，s_n 就越来越接近于圆的面积。当 n 无限增大时，s_n 就无限地接近圆的面积。这时，我们说 s_n 以圆面积为极限。

下面举几个例子：

（1）$y_n = 1 + \dfrac{1}{n}$：　2，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，$\cdots$　　（如图 1-1）

（2）$y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$：　0，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，$\cdots$　　（如图 1-2）

（3）$y_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$：　0，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，$\cdots$　　（如图 1-3）

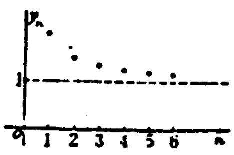


图 1-1

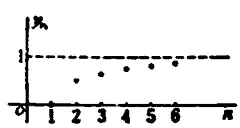


图 1-2

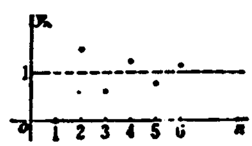


图 1-3

这三个数列，当 n 无限增大时，y_n 都无限接近于 1，即"当 n 无限增大时，y_n 与 1 的差无限地接近于 0"。

显然，数列（1）的取值总大于 1，因此数列（1）与 1 的差总大于 0；数列（2）的取值总小于 1，因此数列（2）与 1 的差总小于 0；而数列（3）的取值时而大于 1 时而小于 1，因此数列（3）与 1 的差时而大于 0 时而小于 0。为了能将这三种变化情形统一考虑，我们用$|y_n-1|$（即数轴上y_n与 1 的距离）来表示y_n与 1 的差。“y_n与 1 的差无限地接近于 0”可用“$|y_n-1|$可以任意小”来刻划。“$|y_n-1|$可以任意小”就是说：不论事先指定一个多么小的正数，在n无限增大的变化过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻以后，$|y_n-1|$小于事先指定的小正数。

下面以数列（1）为例，来说明“当n无限增大时，$|y_n-1|$可以任意小”。数列（2），（3）的讨论完全相同。

$$|y_n-1|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

如果指定一个小正数，例如$\frac{1}{10}$，要使$|y_n-1|<\frac{1}{10}$，即$\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$，则只要取$n>10$就可以了；也就是说，从数列的第 11 项开始，以后各项都满足$|y_n-1|<\frac{1}{10}$。

如果再指定一个更小的正数，例如$\frac{1}{100}$，要使$|y_n-1|<\frac{1}{100}$，即$\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，则只要取$n>100$就可以了；也就是说，从数列的第 101 项开始，以后各项都满足$|y_n-1|<\frac{1}{100}$。

由此可见，对于数列（1），不论事先指定一个多么小的正数ε，在n无限增大的过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻以后（也就是说，当n充分大以后），$|y_n-1|$总小于那个小正数ε。此时，我们说数列（1）以 1 为极限。

一般说来，如果有一个数列y_n，不论事先指定一个多么小的正数ε，在n无限增大的过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻以后，总有$|y_n-A|$小于事先指定的正数ε，这时，我们就称“数列y_n以常数A为极限”。

经上面的分析，我们可将数列的极限抽象为下面的严格定义：

定义 1.2 如果对于任意给定的正数ε（不论多么小），总存在一个正整数N，当$n>N$时，$|y_n-A|<\varepsilon$恒成立，则称当n趋于无穷大时，数列y_n以常数A为极限。记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n=A \quad 或 \quad y_n\to A \quad (n\to\infty)。$$

注意：定义中ε的刻划y_n与A的接近程度，N刻划总有那么一个时刻（即刻划n充分大的程度）；ε是任意给定的，N是随ε而确定的。

如果一个数列有极限，我们就称这个数列是收敛的，否则就称它是发散的。y_n以A为极限，亦称y_n收敛于A。

例如，当$n\to\infty$时，$y_n=\frac{1}{2^n}$收敛于 0；$y_n=1+\frac{1}{n}$收敛于 1；而$y_n=2n$无极限，

所以它是发散的；$y_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$时而取 0 时而取 1，我们说它是振荡无极限，因而也是发散的。

例： 利用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$。

证： 对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|y_n-2|=\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要取$n>\frac{1}{\varepsilon}$就可以了。因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，取正整数$N\geq\frac{1}{\varepsilon}$，则当$n>N$时，$|y_n-2|<\varepsilon$恒成立。所以$y_n=\frac{2n+1}{n}$以 2 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2。$$

数列极限的几何意义是：

对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数N，使数列y_n从第$N+1$项起，以后的一切项$y_{N+1}, y_{N+2},\cdots$都落在点A（y轴上）的ε邻域$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$以内。因此，如果$y_n$收敛于$A$，则不论正数$\varepsilon$多么小，即不论区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$多么小，$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内总包含$y_n$的无穷多项，而$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$外最多含有$y_n$的有限个项。如图 1-4 所示。

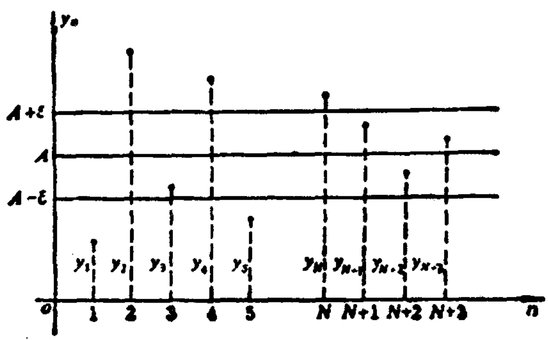


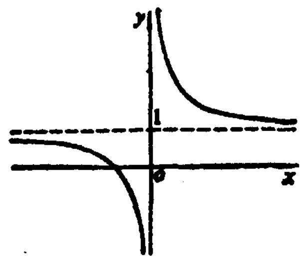
图 1-4

第二节　函数的极限

数列是定义于正整数集合上的函数，它的极限只是一种特殊的函数（即整标函数）的极限。现在，我们讨论定义于实数集合上的函数$y=f(x)$的极限。

一、当$n\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

例如：函数$y=1+\frac{1}{x}(x\neq 0)$，当$|x|$无限增大时，y无限地接近于1，如图1-5所示。和数列极限一样，“当$|x|$无限增大时，y无限地接近于1”，是指“当$|x|$无限增大时，$|y-1|$可以任意地小”。



即对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使 $|y-1|=\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$，

图1-5

只要取$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$就可以了。亦即当$x$进入区间$\left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right)$或$\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right)$时，$|y-1|<\varepsilon$恒成立。

这时，我们就称x趋于无穷大时，$y=1+\frac{1}{x}$以1为极限。

定义1.3 如果对于任意给定的正数ε（不论多么小），总存在一个正数M，使得当一切$|x|>M$时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于无穷大时，函数$f(x)$以常数A为极限。记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad （x\to\infty）。$$

注意：定义中ε刻划与A的接近程度，M刻划$|x|$充分大的程度，ε是任意给定的正数，M是随ε而确定的。

例1. 用定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

证： 设$f(x)=\frac{1}{x}$，对于任意给定的$\varepsilon>0$， 要使$|f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$，

只要$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$就可以了。因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，取$M=\frac{1}{\varepsilon}$，则当$|x|>M$时，

$$|f(x)-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$ 恒成立，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$。

有时我们还需要区分x趋于无穷大的符号，如果x从某一时刻起，往后总是取正值且无限增大，则称x趋于正无穷大，记作$x\to+\infty$，此时定义中$|x|>M$可改写为$x>M$；如果x从某一时刻起，往后总取负值且$|x|$无限增大，则称x趋于负无穷大，记作$x\to-\infty$，

此时定义中的$|x| > M$可改写为$x < -M$。

例 2. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$，(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$ 。如图1-6 所示：

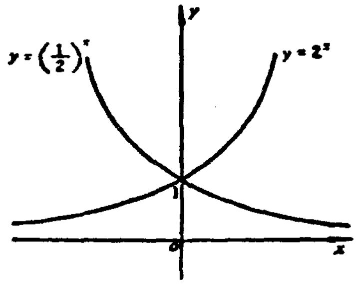


图 1-6

下面证明(1)[(2)的证明留作练习]：

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$

证：设$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$|f(x)-0| = \left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 0\right| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \varepsilon$，只要$2^x > \dfrac{1}{\varepsilon}$，即$x > \dfrac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$(设$\varepsilon<1$)就可以了。

因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，取$M=\dfrac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$，则当$x>M$时，

$|f(x)-0| = \left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 0\right| < \varepsilon$，　恒成立。所以　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$。

$x\to\infty$时，$f(x)$以A为极限的几何意义是：

对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$M>0$，当点$(x, f(x))$的横坐标x进入区间$(-\infty,-M)$或$(M,+\infty)$时，纵坐标$y=f(x)$全部落入区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$之内。此时，$y=f(x)$的图形介于平行直线$y=A-\varepsilon$与$y=A+\varepsilon$之间的带形区域之内。$\varepsilon$越小，则带形区域越狭窄，如图 1-7 所示。

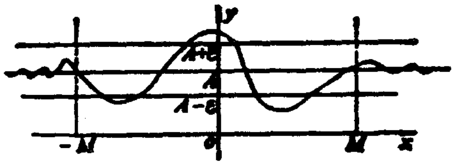


图 1-7

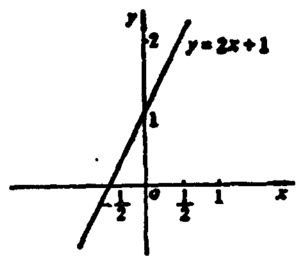


图 1-8

二、当$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限

对于函数$y=f(x)$，除研究$x\to\infty$时$f(x)$的极限以外，还需要研究x趋于某个常数x_0时，$f(x)$的变化趋势。先看两个例子：

例 1.　函数$y=f(x)=2x+1$，定义于$(-\infty,+\infty)$，如图 1-8 所示。我们考察当x趋于$\frac{1}{2}$时，这个函数的变化趋势。为此，列表 1-1 如下：

表 1-1

x	0	0.1	0.3	0.4	0.49	…	0.5	…	0.51	0.6	0.9	1
$f(x)$	1	1.2	1.6	1.8	1.98	…	2	…	2.02	2.2	2.8	3

不难看出，当x越来越接近$\frac{1}{2}$时，$f(x)$与 2 的差就越来越接近于 0，当x充分接近$\frac{1}{2}$时，$|f(x)-2|$可以任意小。因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-2|=|(1+2x)-2|=|2x-1|=2\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

只要取$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$就可以了。这就是说，当$x$进入$x=\frac{1}{2}$的$\frac{\varepsilon}{2}$邻域$\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$内时，$|f(x)-2|<\varepsilon$恒成立。这时我们称当$x$趋于$\frac{1}{2}$时，$y=f(x)=2x+1$以 2 为极限。

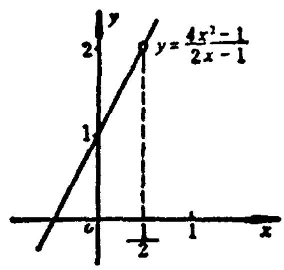


图 1-9

例 2.　函数$y=f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$，定义于$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，如图 1-9 所示。我们也考察当$x$趋于$\frac{1}{2}$时，这个函数的变化趋势。显然，表 1-1 中的数值，除$x=\frac{1}{2}$，$y=2$这一对数值之外，其它数值均适用于这个函数。可见，当x充分接近$\frac{1}{2}$时，$y=\frac{4x^2-1}{2x-1}$与 2 的差的绝对值也可以任意小。因为，对于任意给定的$\varepsilon>0$，当x进

入$\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$时，$|f(x)-2|<\varepsilon$恒成立。因此，当$x$趋于$\frac{1}{2}$时，

$y=\frac{4x^2-1}{2x-1}$亦以2为极限。

由上面两个例子可以看出，我们研究x趋于$\frac{1}{2}$时，函数$f(x)$的极限，是指x充分接近于$\frac{1}{2}$时$f(x)$的变化趋势，而不是求$x=\frac{1}{2}$时$f(x)$的函数值。因此，研究x趋于$\frac{1}{2}$时$f(x)$的极限问题与$x=\frac{1}{2}$时函数$f(x)$是否有定义无关。

定义 1.4 如果对于任意给定的正数ε（不论多么小），总存在一个正数δ，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称当x趋于x_0时，函数$f(x)$以常数A为极限。记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0)。$$

注意 1：定义中的ε刻划$f(x)$与常数A的接近程度，δ刻划x与x_0的接近程度，ε是任意给定的，δ是随ε而确定的。

注意 2：定义中$|x-x_0|<\delta$表示x与x_0的距离小于δ，$0<|x-x_0|$表示$x\neq x_0$，因此，$0<|x-x_0|<\delta$表示$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$。

例 3. 利用定义证明$\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$。

证：设$f(x)=3x-2$，对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-4|=|(3x-2)-4|=|3x-6|=3|x-2|<\varepsilon,$$

只要取$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$就可以了。因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，当$0<|x-2|<\delta$时，$|f(x)-4|<\varepsilon$恒成立。所以$\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$。

例 4. 证明$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

证：设$f(x)=x$，对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon$，只要取$\delta=\varepsilon$就可以了。因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-x_0|<\varepsilon$恒成立，所以$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

$x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限的几何意义是:

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，当点 $(x, f(x))$ 的横坐标 x 进入区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时，纵坐标 $y = f(x)$ 全部落入区间 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 之内。此时，$y = f(x)$ 的图形介于平行直线 $y = A - \varepsilon$ 与 $y = A + \varepsilon$ 之间的带形区域之内，如图 1-10 所示。

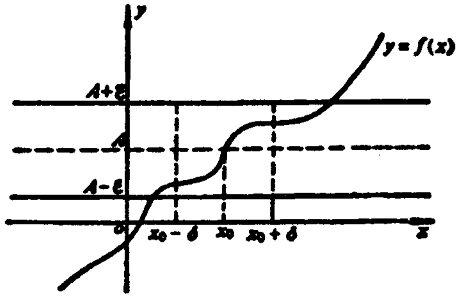


图 1-10

根据定义 1.4，容易证明下列定理。

定理 1.1 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而且 $A > 0$（或 $A < 0$），则总存在一个正数 δ，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）。

证：设 $A > 0$，取 $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$，则由 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的定义可知，对这样取定的 ε，总存在一个正数 δ，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，因而，$A - \varepsilon < f(x)$ 恒成立，将 $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$ 代入，即得 $0 < \dfrac{A}{2} < f(x)$。

类似地可证 $A < 0$ 的情形。

定理 1.2 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而且 $f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），则 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）。

证明：如果 $f(x) \geq 0$，假设定理不成立，即设 $A < 0$，则由定理 1.1 可知，存在一个正数 δ，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) < 0$，这与 $f(x) \geq 0$ 的假设矛盾。所以 $A \geq 0$。同理可证 $f(x) \leq 0$ 的情形。

三、左极限与右极限

前面已经讲了 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，在那里 x 是以任意方式趋于 x 的。但是，有时我们还需要知道 x 仅从 x_0 的左侧（$x < x_0$）或仅从 x 的右侧（$x > x_0$）趋于 x_0 时，$f(x)$ 的变化趋势。于是，就引进了左极限与右极限的概念。

定义 1.5 如果当 x 从 x_0 的左侧（$x < x_0$）趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限。即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个正数 δ，使当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，则

称 A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限。记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A。$$

如果当 x 从 x_0 的右侧（ $x > x_0$ ）趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限。即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个正数 δ，使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称 A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限。记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A$$

根据左右极限的定义，显然可得下列定理。

定理 1.3　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是：

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A。$$

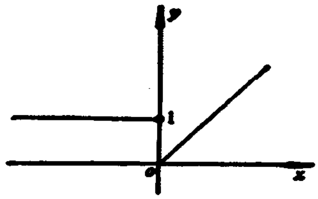


图 1-11

例： 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ ：研究当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

解： 当 $x < 0$ 时，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$，而当 $x > 0$ 时，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$，

左右极限都存在，但不相等。所以，由定理 1.3 可知，$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在，见图 1-11。

第三节　变量的极限

综合前两节介绍的数列极限与函数极限的定义，可以概括出一般变量极限的定义如下：

定义 1.6　对于任意给定的正数 ε（不论多么小），在变量 y 的变化过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻以后，$|y - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称变量 y 以 A 为极限（或称 y 在此变化中收敛于 A ）。记作

$$\lim y = A。$$

（1）如果变量 y 是数列 $y_n = f(n)$，则定义中"变量 y 的变化过程"是指"$n \to \infty$"；"总存在那么一个时刻"是指"总存在一个正数 N"；"在那个时刻以后"是指"当 $n > N$ 时"，而"$\lim y = A$"应为"$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A$"。

（2）如果变量 y 为定义于实数集合的函数 $y = f(x)$，而研究的变化过程是 $x \to \infty$，则定义中"总有那么一个时刻"是指"总存在一个正数 M"；"在那个时刻以后"是指"当