高中数学竞赛教程

蘇步青题

主编 常庚哲 李炯生

编著 常庚哲 史济怀
李炯生 严镇军
杜锡录 谢盛刚
苏 淳 李尚志
余红兵

江苏教育出版社


高中数学竞赛教程

高中数学竞赛教程

常庚哲　李炯生

主　编

常庚哲　史济怀　李炯生

严镇军　杜锡录　谢盛刚

苏　淳　李尚志　余红兵

编　著

江苏教育出版社

内 容 简 介

本书的九位作者(教授四名、副教授五名、讲师一名)均为中国科学技术大学数学系教师。作者们既有从事现代数学研究的背景，又有组织、辅导数学竞赛的经验，因而使这本新作别具特色。

本书将高中数学竞赛的六大内容(初等几何、函数方程、不等式、初等数论、多项式理论、组合数学)分为四十七讲，取材新颖，例、习题丰富，部分题目译自国外最新资料。全书科学性强，系统性强，覆盖面广，难易适度，便于自学，各地数学奥林匹克学校、各中学数学课外小组选作教材尤为适宜。高中学生学完全书，可以达到适应省级与全国竞赛的水平。

本书可供高中学生，中学数学教师、教研员，师范院校数学系师生阅读。

本书于1990年参加由中国教育学会数学教育研究发展中心主办的“全国优秀数学教育类图书评选”，被列入“优秀书目”，且为“优秀书目”中唯一的高中数学竞赛读物。本书还被评为“第4届(1989年)华东地区优秀教育图书”。

(本书平装本从第5次印刷本开始，增加封面压膜和前、后环衬页，但定价不变。)

高 中 数 学 竞 赛 教 程

主编：常庚哲　李炯生

编著：常庚哲　史济怀　李炯生

严镇军　杜锡录　谢盛刚

苏　淳　李尚志　余红兵

出版发行：江苏教育出版社

经　　销：江苏省新华书店

印　　刷：常熟市印刷二厂

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 14　字数 360,000

1989 年 6 月第 1 版　　1991 年 3 月第 5 次印刷

印数(平) 65,031—95,030 册

(精) 2,001—7,000 册

ISBN 7—5343—0733—3

G·642　　定价：(平)4.20元　(精)5.00元

责任编辑　喻　纬

目　录

第1讲　命题转换与解法探求

杜 锡 录

目前国内外各类数学竞赛比较频繁，如果每次所命的题都是一些好题和新题，当然最好，但是这对命题者的要求委实太高．不过，用一些明显的陈题也不太好．于是就需要把一些好的陈题加以变形或推广，换一个面貌出现，这几乎是每一个命题者经常使用的方法．如果参加数学竞赛的学生们也能掌握这种变形和推广的方法，那末，他对数学的认识深度就会有所提高，他的解题能力的增强就会有所突破，他也就可能在各类数学竞赛中大显身手．现在的问题是，掌握这种方法难不难呢？其实不难，关键在于你对待一个题目的态度．一个好题拿到手之后，往往千方百计地想法把它解出来．一旦解出，喜悦之情顿时涌上心头．同时，往往有一种大功告成的感觉，将解出的题目一放，又去找别的题目去解，争取体会到下一次成功的喜悦．殊不知，这种做完一个好题就束之高阁的态度恰恰错过了提高的宝贵机会．每做完一个题后，你可曾想到，你得到了些什么？你还应做些什么，从而使你得到更多的东西？

当你做完一个题，尤其是你认为的一个好题后，请想一想下面的几个问题：

1．还有其他的做法吗？

2．这些做法中哪个做法是本质的，最好的，最简单的？

3．利用这些做法，你能把这个题目变化一下吗？变完后，并试着做一下．如果你认为又是一个好题，就请你的同学们做一下．

4．从本质性的做法中，试着做一些推广，这又能得到一些好题．

当你做完以上的各项事情后，我相信你一定会从一个题目中得到更多的东西，可以说，你的能力已经提高了一步．

下面我们通过一些例题来说明之．

例1 在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，$\angle A=100°$，BD是角B的平分线并交AC于D，求证：$BC=BD+AD$．

证 如图1-1，在BC上取A'，使$BA'=BA$，连DA'．

在BC上取D'，使$DD'=DA'$，连DD'．显然，$\triangle ABD\cong\triangle A'BD$．

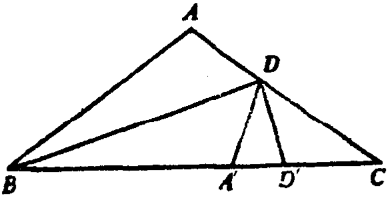

图 1-1

$\because$ $\angle BA'D=100°\Rightarrow$

$\angle DA'D'=\angle DD'A'=80°\Rightarrow\angle A'DD'=20°\Rightarrow$

$\angle BDD'=80°\Rightarrow BD=BD'$．

$\because$ $\angle DD'C=100°\Rightarrow\angle D'DC=\angle C=40°\Rightarrow CD'=DD'$

$=DA'=AD$，

$\therefore$ $BC=BD'+CD'=BD+AD$．

这个证法是好的，充分体现了平面几何的魅力．证明中的第一个关键所在是：把$\triangle ABD$以BD为轴翻折，即作对称变换．

这个题的证法很多，除去纯几何的证法外，还可用三角法，解析法来做，这些我们在下面再来讨论．

我们先来分析一下题目中的条件和结论：实际上有三个已知条件和一个结论，这些都满足唯一性原则．如“$AB=AC$”满足“作一线段等于一已知线段，能作且只能作一条”的唯一性；“BD是角B的平分线”满足“作已知角的平分线能作且只能作一条”的唯一性；“$\angle A=100°$”满足“作一角等于已知角，能作且只能作一个”的唯一性；“$BC=BD+AD$”满足“作一线段等于两已知线段的和，能作且只能作一条”的唯一性．于是由简单的逻辑知识知道，该命题的逆命题、否命题、逆否命题都成立，这样我们就

能得到一系列与之相关的题目，并且这些题目都是有一定难度的．我们先看逆命题：

例 2 在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，BD是角B的平分线交AC于D，$BC=BD+AD$，求证：$\angle A=100°$.（或求$\triangle ABC$的三个角.）

证 如图 1-2，在BC上取$BA'=BA$，连DA'，显然

$\triangle ABD\cong\triangle A'BD$

$\Rightarrow AD=DA'$.

设$\frac{\angle B}{2}=x$，则有

$\angle B=\angle C=2x$,

$\angle A=180°-4x$,

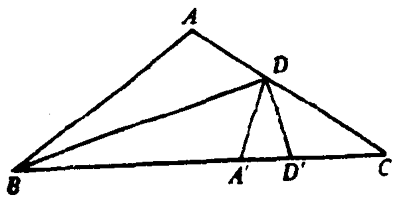

图 1-2

$\angle ADB=\angle A'DB=3x$，$\angle DA'C=4x$.

在BC上选点D'，使$\angle CDD'=2x$，即$\triangle CDD'$为等腰三角形，得$CD'=DD'$.

$\because$ $\angle DD'A'=\angle C+\angle CDD'=4x$,

$\angle DA'D'=4x\Rightarrow\triangle DA'D'$为等腰三角形

$\Rightarrow CD'=DD'=DA'=AD$,

由于$BC=BD+AD=BD+CD'$,

$\therefore$ $BD'=BD$，$\angle BDD'=\angle BD'D=4x$.

$\therefore$ $\angle A'DD'=\angle BDD'-\angle BDA'=x$.

在$\triangle A'DD'$中可得，$9x=180°$，即有$x=20°$，于是有$\angle A=180-4x=100°$.

注 与例 1 的原命题相同，作出两个三角形全等，即$\triangle ABD\cong\triangle A'BD$是关键所在．另一个关键就是那四条线段相等，即$AD=DA'=DD'=CD'$.

以上是对纯几何证法而言的．如果考虑三角证明法，也将是十分有趣的．

例 1 的三角证法

在$\triangle BCD$中，由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BC}{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)},$$

即
$$BD=\frac{\sin C}{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}BC=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}BC.$$

在$\triangle ABD$中，有$\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin\frac{B}{2}}$，

即
$$AD=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin A}BD=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}BC.$$

所以
$$\begin{aligned}BD+AD&=BC\left(\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}+\frac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ}{\sin 100^\circ\sin 60^\circ}\right)\\&=BC\,\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 100^\circ+\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}\\&=BC\,\frac{2\sin 40^\circ\sin 60^\circ\cos 40^\circ}{\sin 60^\circ\sin 100^\circ}\\&=BC\,\frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ}=BC.\end{aligned}$$

利用三角知识经过简单计算，很容易地得到了例 1 的证明．我们自然会想到这个命题的那些逆命题、否命题、逆否命题也可以用三角方法来证明，如例 2 所示的逆命题．不过我们先不忙于证明它，不妨再变化它一下，看一看能否把它的所有的已知条件都变成三角形式，即把它彻底改造成一个三角题．例如，可以把等腰的条件$AB=AC$化为$a=2b\cos C$，这是教科书上早已有的结论，两个条件是等价的．又如果在条件中出现$\frac{B}{2}$，则蕴含有角平分线的条件，再利用正弦定理，用与例 1 的三角证法中相仿的方

法可以把已知条件 $BC=BD+AD$ 化为：$\sin A\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)=\sin C\left(\sin\frac{B}{2}+\sin A\right)$. 经过整理，我们就可以得到如下的题目：

例 3 在$\triangle ABC$中，已知$a=2b\cos C$，$\sin A\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)=\sin C\left(\sin\frac{B}{2}+\sin A\right)$，求这个三角形的各个角的度数(不用反三角函数表示).

这就是安徽省 1979 年数学竞赛第一试第 9 题. 如果没有前面的分析，你能想到是由例 1 变来的吗？即使你对例 1 是熟悉的，我相信你只能在得到答案后才能悟到这题是与例 1 有联系的. 同时，我还相信你已经开始对我们这种变化题目的方法感兴趣了. 如果真是这样，你不妨把例 1 的所有的逆命题，否命题，逆否命题都写出来，再试图写成三角形式.

下面我们给出例题 3 的解.

解 由 $a=2b\cos C=b\cos C+c\cos B$，得

$$b\cos C=c\cos B,$$

再由 $b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，得

$$\sin B\cos C=\sin C\cos B,$$

即 $$\sin(B-C)=0,$$

所以 $$B=C,\quad A=\pi-2B.$$

于是有 $$\sin 2B\sin\frac{3B}{2}=\sin B\left(\sin\frac{B}{2}+\sin 2B\right),$$

即 $$2\cos B\sin\frac{3B}{2}=\sin\frac{B}{2}+\sin 2B,$$

因为 $$2\cos B\sin\frac{3B}{2}=\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{5B}{2},$$

所以 $$\sin\frac{5B}{2}=\sin 2B,$$

得 $$2\sin\frac{B}{4}\cos\frac{9B}{4}=0.$$

因为 $$0<B<\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{B}{4}\neq 0,$$

于是 $$\cos\frac{9B}{4}=0,$$

得 $$\frac{9B}{4}=\frac{\pi}{2},\qquad B=\frac{2\pi}{9}.$$

所以$\triangle ABC$的三个角是：

$$A=\frac{5\pi}{9},\ B=C=\frac{2\pi}{9}.$$

上面我们对例1进行了一系列的讨论．最后再提及一点，例1还可以用解析几何来作，而且也比较简单，但没有突出的特点，故不进行专门的讨论．下面的例题是1983年美国普特南大学生数学竞赛中的一个题，它在解析几何的应用上颇具特点．

例4 求二元函数$f(u,v)=(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2$的最小值．

大学生数学竞赛中的试题，人们往往要用高等数学的方法来解．殊不知，这样解例4是相当麻烦的．其实你只要注意到这个题目中的几何意义，用初等方法来解却是很简单的．

首先，函数表达式是两点之间距离的平方．这两个点是$(u,\sqrt{2-u^2})$，$\left(v,\frac{9}{v}\right)$．其次，我们再来看这两个点具有什么特点：

$$u^2+(\sqrt{2-u^2})^2=2,$$

这是圆$x^2+y^2=2$上的一点．

$$v\cdot\frac{9}{v}=9,$$

这是双曲线$xy=9$上的一点．

这时，这个题目的几何意义就十分明显了："求圆$x^2+y^2=2$和

双曲线 $xy=9$ 之间的最短距离.”事实上，出题人正是从这里出发，通过简单的变形而得到的，而且把题目变难了.但是，对于我们做题的人来讲，这正好是我们的一个极好的锻炼机会.初看这是一道代数题，而其本质却是一道几何题.你想不到这一点，解题就十分困难；你想到了这一点，题目就变得十分简单.我们在做一道题时，必须先审好题，充分理解题意，把握住题目的本质，这样完成解答就不难了.

再就例 4 而言，我们可以变成下面的一道题：

“求二元函数 $f(\theta, \varphi)=(\sqrt{2}\cos\theta-3\operatorname{tg}\varphi)^2+(\sqrt{2}\sin\theta-3\operatorname{ctg}\varphi)^2$ 的最小值.”

你能看出它是怎么变来的吗？实际上，我们把例 4 中的圆和双曲线都写成参数方程的形式：

圆 $x^2+y^2=2$：　$x=\sqrt{2}\cos\theta$，　$y=\sqrt{2}\sin\theta$；

双曲线 $xy=9$：　$x=3\operatorname{tg}\varphi$，　$y=3\operatorname{ctg}\varphi$.

代入例 4 中的函数就行了.这样又变出了一道三角题.

作为这一讲的结束语，我想提醒大家，这种变形及联想的思想方法是重要的，平时作题要加以注意才是.

思　考　题*

1. 把例 1 的所有的逆命题、否命题、逆否命题写出来.能否把它们变成三角形式？试给出它们的证明.
2. 把例 4 解出来!
3. 对于 $a\in R$，确定 $\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$ 的所有可能的值.（罗马尼亚 1978 年竞赛题）

* 各讲正文后所附的“思考题”未编序号，“习题”序号与该讲序号相同.书末给出所有习题的提示与解答.

第2讲　发现题目及其解法的本质

杜 锡 录

在第 1 讲中我们已经讲到，对待一个题目，尤其是一个好的题目，怎样做到一题多解，一题多用．在这一讲中我们着重谈一下，在一题多解中，怎样努力挖掘出题目的本质含意及本质解法，这样的解法往往是最简的，并且能加以推广．

例 1　在$\triangle ABC$中，证明$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{2^3}$．

这个题目的证法很多，我们先看其中比较简单的一种．

证法一　不妨假设$\triangle ABC$是锐角三角形，

$$
\begin{aligned}
&\cos A\cos B\cos C\\
&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\cos C\\
&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos C]\cos C\\
&\leqslant\frac{1}{8}[\cos(A-B)-\cos C+\cos C]^2\\
&=\frac{1}{8}\cos^2(A-B)\leqslant\frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

证明中可见，等号成立的充要条件是$A=B=C$．事实上，由两个不等号中等号成立的条件得

$$A-B=0,\ \mathrm{ccs}(A-B)-\cos C=\cos C,$$

即可解得$A=B=C=60°$．

上面的证明已经够简单的了，是不是最好的呢？还不是最好的．最好的证法是下述的

证法二　不妨设$\triangle ABC$是锐角三角形，

$$\because \quad a=b\cos C+c\cos B\geqslant 2\sqrt{bc\cos B\cos C},$$
$$b=c\cos A+a\cos C\geqslant 2\sqrt{ca\cos A\cos C},$$
$$c=a\cos B+b\cos A\geqslant 2\sqrt{ab\cos A\cos B},$$

将三个不等式相乘，两边消去 abc，即得

$$1\geqslant 8\cos A\cos B\cos C,$$

即
$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

这个证明是十分优美的，整齐、对称，仅用到了射影定理和平均不等式. 同学们千万不要小看射影定理，在一定程度上，它比余弦定理有更重要的意义.

这个证明是本质的，因为它揭示了与射影定理的内在联系，而这种联系不仅在平面上存在，在高维空间中也存在. 下面仅举三维空间为例.

例 2 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是空间中的一个四面体，θ_{12}，θ_{13}，θ_{14}，θ_{23}，θ_{24}，θ_{34} 是六条棱 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_2A_3，A_2A_4，A_3A_4 上的二面角的平面角，如果这六个角都是锐角，证明

$$\sqrt[6]{\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}}\leqslant\frac{1}{3}.$$

不难想到，如果利用上述证法一的方法来证明这个题，将是十分困难的，这就是说，证法一虽然简单，但不是本质的. 我们说证法二是本质的，就在于它整个地适用于例 2. 为此，我们先证明空间中的射影定理，这里，我们不引进带号面积的概念，简述射影定理如下.

射影定理 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，四个面的面积为 $S_1=S_{\triangle A_2A_3A_4}$，$S_2=S_{\triangle A_1A_3A_4}$，$S_3=S_{\triangle A_1A_2A_4}$，$S_4=S_{\triangle A_1A_2A_3}$，6 条棱上的二面角的平面角为锐角，$\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant 4)$是棱 A_iA_j 上的二面角的平面角，则 $S_1=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}$.

证 如图 2-1，由 A_1 作对面的垂线 A_1H，交 $\triangle A_2A_3A_4$ 于

H，则有 $S_1=S_{\Delta HA_3A_4}+S_{\Delta HA_2A_4}+S_{\Delta HA_2A_3}$

$$=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}.$$

后一步利用了高中立体几何教材习题上的一个结果．这个结果可以当作一个定理来用，是很重要的，大家不妨写出来或去查一下．现在我们回到例题 2 的证明．利用图 2-1．

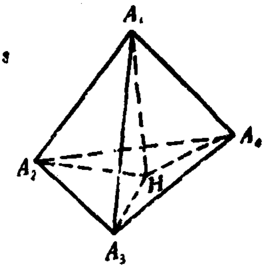

图 2-1

证　由射影定理知

$$S_1=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_2S_3S_4\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}},$$
$$S_2=S_1\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{14}+S_4\cos\theta_{13}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_1S_3S_4\cos\theta_{34}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}},$$
$$S_3=S_1\cos\theta_{24}+S_2\cos\theta_{14}+S_4\cos\theta_{12}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_1S_2S_4\cos\theta_{24}\cos\theta_{14}\cos\theta_{12}},$$
$$S_4=S_1\cos\theta_{23}+S_2\cos\theta_{13}+S_3\cos\theta_{12}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_1S_2S_3\cos\theta_{23}\cos\theta_{13}\cos\theta_{12}},$$

将上面的四个不等式相乘，并消去 $S_1S_2S_3S_4$，得

$$(\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34})^{\frac{2}{3}}\leqslant\frac{1}{3^4},$$

两边同开 4 次方，即得

$$(\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34})^{\frac{1}{6}}\leqslant\frac{1}{3}.$$

容易证明，当且仅当正四面体时等式成立．

可以看到，上面的证明同例 1 的证法二如出一辙，对于更高维空间中的单纯形所具有的类似性质，我们仍能用这种方法证明，只不过要先证明相应的射影定理，这些就超出高中课程的范围了，在此不再详述．这里有必要再提及的是，对简单的题目要深入了解，并能提出其本质，就可能得出更进一步的更一般的结

果.数学之美妙在于此，数学本身的发展大多亦在于此.

大家知道勾股定理的证法很多，其中一个本质的证法就是依赖于射影定理. 现简述如下：如图 2-2，得

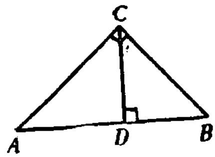

图 2-2

$$c=a\cos B+b\cos A,$$

$$a=c\cos B,$$

$$b=c\cos A,$$

所以 $$c=c(\cos^2A+\cos^2B),$$

得 $$\cos^2A+\cos^2B=1,$$

$$a^2+b^2=c^2(\cos^2A+\cos^2B)=c^2,$$

即是勾股定理.

三维空间的勾股定理是：设 $A_1A_2A_3A_4$ 是四面体，$A_1-A_2A_3A_4$ 是直三面角，A_1，A_2，A_3，A_4 所对面的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4，则有 $S_1^2=S_2^2+S_3^2+S_4^2$.

这个定理的最简单、最本质的证法同样是依赖于射影定理.

证 利用图 2-1，

$$S_2=S_1\cos\theta_{34},\quad S_3=S_1\cos\theta_{24},\quad S_4=S_1\cos\theta_{23},$$

$$S_1=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}$$

$$=S_1(\cos^2\theta_{34}+\cos^2\theta_{24}+\cos^2\theta_{23}),$$

所以 $$\cos^2\theta_{34}+\cos^2\theta_{24}+\cos^2\theta_{23}=1.$$

于是 $$S_2^2+S_3^2+S_4^2=S_1^2(\cos^2\theta_{34}+\cos^2\theta_{24}+\cos^2\theta_{23})=S_1^2.$$

这就证明了三维空间的勾股定理.

比较这两个勾股定理的证明过程，可以发现它们惊人地相似，这正是其本质所在.

对于勾股定理，我们再做点其他的事，想一下还有些什么问题. 例如在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$. 我们由勾股定理可知 $c^2=a^2+b^2$，另外还有两边之和大于第三边，$c<a+b$. 首先要问这样一个问题：比较 c^n 和 a^n+b^n，其中 $n>0$. 已知当 $n=2$ 时 $c^2=a^2+b^2$. 当 $n=1$ 时有 $c<a+b$，是否有：对 $0<n<2$，c^n