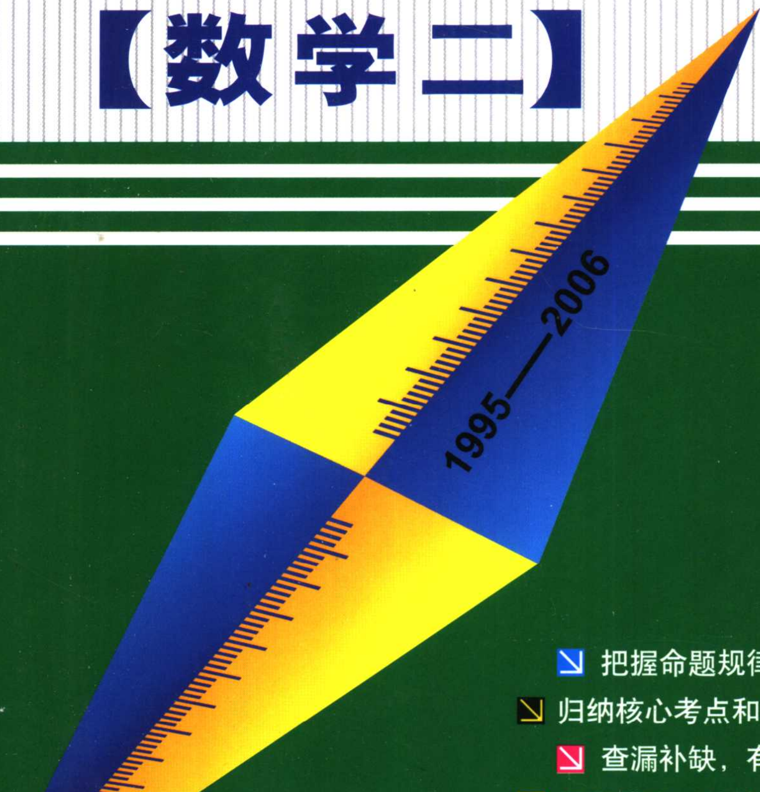
易过新理念丛书

2007年

考研数学 历年真题

【数学二】 详解



主 编：黄庆怀

- 把握命题规律与趋势
- 归纳核心考点和难点
- 查漏补缺，有的放矢推进复习
- 提高速度，熟练运用答题技巧

中国社会出版社

2007年

考研数学历年真题详解

【数学二】

主　编：黄庆怀
编　者：葛余博（清华大学教授）
　　　　杨　鸿（北京理工大学教授）

中国社会出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题详解·数学二/黄庆怀 主编. 一北京:中国社会出版社,2005.4
(考研数学历年真题详解)
ISBN 7－5087－0470－3
Ⅰ.考… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学一研究生一入学考试一解题 Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028360 号

丛 书 名:考研数学历年真题详解
书　　名:考研数学历年真题详解·数学二
主　　编:黄庆怀
责任编辑:杨　晖　张国洪

出版发行:中国社会出版社　　邮政编码:100032
通联发行:北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦
　　　　电话:66016392　　传真:66016392
欢迎读者拨打免费热线 8008108114 或登录 www.bj114.com.cn 查询相关信息
经　　销:各地新华书店

印刷装订:北京高岭印刷有限公司
开　　本:787×1092 毫米　1/16
印　　张:50.25
字　　数:842 千字
版　　次:2006 年 3 月第 2 版
印　　次:2006 年 3 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7－5087－0470－3/O·10
定　　价:70.80 元(全四册)

前　言

在高等教育大众化的今天，考研热已逐步形成，众所周知，考研的难点在数学，数学是一道门槛。硕士研究生入学考试的数学试题题量适当，主客观性试题在试卷中占分比例为7:3，主观性试题包括计算题、证明题、综合题和应用题，客观性试题有填空题和选择题。纵观几年来的试卷，试题主要以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上注重考查学生的抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。填空题是主要用于考查“三基”以及数学重要性质，以中等难度试题为主；选择题主要考查考生对数学概念，数学性质的理解并能进行简单推论、判定和比较；综合题考查的是知识点之间的有机结合；应用题一般结合与考生专业具有共性的相关背景知识，从而既有利于国家对高等层次人才的选拔，也利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高。本套丛书共分四册，本册为《考研数学历年真题及详解 · 数学二》。丛书以教育部公布的最新考试大纲为基础，紧扣考试大纲，注重解题方法与技巧，并结合名校名师多年来对考研试题研究的经验和考研高分考生的心得精心编著而成。本册《考研数学历年真题及详解 · 数学二》收录了1995年~2006年12套全国硕士研究生入学考试数学二试题。这些试题凝聚了12年来参加命题的专家、教授的集体智慧，是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求，又充分体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则，而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点，使考生能及早地体会到考研数学试题的“形势”，以便尽早做出自己的复习计划。

本书在结构和试题编排上采纳了各名校专家、教授的意见，并通过高分考生的意见反馈对本书进行了如下编排：

1. 在第一部分，我们汇编了1995年~2006年的全部数学二试题。试题按照2006~1995的顺序编排，以便考生能尽快的了解最近几年的考研数学的试题结构、题型特点、试题难度及分值分配等。这样的顺序编排完全是为了让考生能在第一时间里了解考研数学的最新基本形势。

2. 在第二部分，我们对1995年~2006年的全部数学二试题根据《数学考试大纲(数学二)》的考查要求按照学科和知识点进行科学地编排，做到既能紧扣《数学考试大纲》，又能突出解题技巧；既能使各知识点层次清晰，又能使考生融会贯通，灵活运用。在试题分析、详解及评注上，我们把相同或相近的知识点摘录到一起进行解析，这样做便于考生进行比较分析，同时也给考生提供了一个重要信息，即：考生会发现相同或相近的知识点在相隔多年后会重新进行命题以及掌握考查的知识点和题型的变化情况，以增强考生对命题基本规律的感性认识。本部分对每道试题都做出了答案、分析、详解及评注，其中，答案部分用以检验考生的答题正确率；分析部分主要给考生以提示，即解题思路，使考生迅速联想相关知识点寻找解题方法，以期加强考生的数学思维能力的培养，提高考生的破题能力；详解部分给出了本题的详细解答过程

及步骤，使考生除了正确解答此题之外，能规范自己的书写过程，在平时就达到实战效果；评注部分主要根据本题进行知识点的扩展，引导考生能够做到举一反三，触类旁通。

为了配合本书的使用，我们的建议如下：

(1)注重基础知识

这几年考研数学试题的难度变化不大(但计算量比较大)，基本题约占百分之七十，另外的百分之三十略有难度。这就要求考生对基本知识要掌握熟练，但仅仅是对本科教材掌握熟练还是不行的，这是因为考研题有自己的风格和出题思路，需要辅导教师有重点的辅导。

(2)注重解题方法、技巧的训练

一方面由于考研出题的总的思路是数学知识的掌握及其运用能力，考题的计算量较大，同样一道题，解题方法不一样，花费的时间也不一样。

(3)注重答题方式

平时训练应按考研评分标准解题，对不能给出解答的题尽量写出采分点。

(4)注重合理分配答题时间

历年的考试中，都有很多学生并没有答完题。其实没做的题有些是非常简单的，有的学生甚至还没来得及看，这就要求考生平时在做 3 个小时的套题时，在不会做或较长时间没有做出正确结果的题上不要“恋战”，从大局出发，总体把握做题时间，对没有做好的题 3 小时以后再研究。

参与本书编辑和出版的工作人员在整个过程中时刻本着对广大考生负责的态度，高标准、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有不足和不尽人意之处。敬请广大考生与专家、同行不吝赐教和批评指正。

最后，预祝广大考生复习顺利，考研成功！

编　者

2006 年 3 月

目　　录

第一部分 微积分

第二部分 线性代数

历年数学二考研试题分析、详解及评注

第一部分 微积分

硕士研究生入学数学考试历来是考生头疼的问题，数学试卷具有内容多、知识面广、综合性和技巧性较强的特点. 在这里，我们结合部分高分考生的复习经验，提出几点建议，供考生参考.

1. 制订周密的复习计划；
2. 吃透考试大纲；
3. 重视基础知识；
4. 认真分析每一道真题；
5. 练习计算能力；
6. 调整好心态.

下表是 1995—2006 年高等数学各章分值分布情况，望考生把握好重点.

1995—2006 年高等数学各章分值分布

内容 分值 年份	函数极限连续	一元函数微分学	一元函数积分学	多元函数微积分学	二重积分	常微分方程
1995	14	25	29			16
1996	6	46	32			16
1997	14	19	33			26
1998	11	25	28			22
1999	15	25	24			18
2000	9	33	27			18
2001	16	20	23			26
2002	32	20	20			10
2003	18	46	30			26
2004	22	45	16	14	4	19
2005	8	28	41	14	13	16
2006	10	32	36	12	14	14
合计	175	364	339	40	31	227

第一章　函数、极限、连续

"函数、极限、连续"这一部分的概念及运算是高等数学的基础.

考生复习本部分时应重点把握以下内容：

(1) 理解函数的概念，会进行函数记号的运算，并会建立简单应用问题中的函数关系式；了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形.

(2) 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；掌握极限的性质及四则运算法则；掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法；理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

(3) 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续）；会判断函数间断点的类型；了解连续函数的性质和初等函数的连续性；了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

一、求函数表达式

1. (97, 选(5)题, 3分) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【　】

【答】 应选(D).

【分析】 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程. 先将 $g(f(x))$ 表示为 $f(x)$ 的函数，再解不等式 $f(x)\leqslant 0$ 与 $f(x)>0$，最后将 $g(f(x))$ 表示为 x 的函数.

【详解】 根据 $g(x)$ 的定义知，复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

而 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$；$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$.

故 $$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

2. (01, 选1题, 3分) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0.　　(B) 1.

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

【　　】

【答】　应选(B).

【分析】　求分段函数的复合,先用$f[f(x)]$表示为$f(x)$的函数,然后再分别求解不等式$f(x)\leqslant 1$与$f(x)>1$,来确定x的变化范围,将$f[f(x)]$表示为x的函数.

【详解】　因为$|f(x)|\leqslant 1$,

于是$f[f(x)]=1$,

从而$f\{f[f(x)]\}=1$.

故正确选项为(B).

小　结

1. 关于复合函数的主要题型有:① 已知$f(x),g(x)$,求$f(g(x))$. 对于这类问题,直接进行复合运算即可.

② 已知$f(x),\varphi(x)$,且$f(g(x))=\varphi(x)$,求$g(x)$. 对于这类问题,若f反函数存在,则$g(x)=f^{-1}(\varphi(x))$. ③ 已知$g(x),\varphi(x)$,且$f(g(x))=\varphi(x)$,求$f(x)$. 对于这类问题,若g反函数存在,则令$u=g(x)$,则可求得$f(u)=\varphi(g^{-1}(u))$.

2. 理解函数概念的一个重要方面是:函数$y=f(x)$中自变量x只是一个记号,可根据需要随时更换.

3. 求反函数的方法一般为:① 由$y=f(x)$解出$x=f^{-1}(y)$. ② 置换x、y,得到反函数$y=f^{-1}(x)$. ③$y=f(x)$的值域就是$y=f^{-1}(x)$的定义域.

二、函数的特性

1. (95,选(3)题,3分)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且对任意x_1、x_2,当$x_1>x_2$时,都有$f(x_1)>f(x_2)$,则

(A) 对任意x,$f'(x)>0$.　　(B) 对任意x,$f'(x)\leqslant 0$.

(C) 函数$f(-x)$单调增加.　　(D) 函数$-f(-x)$单调增加.

【　　】

【答】　应选(D).

【分析】　本题是利用定义讨论函数的单调性.

【详解】　因为对任意x_1、x_2,当$x_1>x_2$时,$-x_1<-x_2$,则有$f(-x_1)<f(-x_2)$,即$-f(-x_1)>-f(-x_2)$,故$-f(-x)$是单调增加的.

小　结

1. 函数的单调性常利用单调的定义或导数来研究.

2. 周期性的证明,就是寻求$T\neq 0$,使$F(x+T)=F(x)$.

3. 奇偶性的判定常从$f(-x)$出发:若$f(-x)=f(x)$,则$f(x)$为偶函数;若$f(-x)=-f(x)$,则$f(x)$为奇函数.

4. 函数的有界性中,要正确区分无穷大和无界变量,无穷大量一定是无界变量,而无界变量不一定是无穷大量.

三、数列极限

1. (95,填(4)题,3分) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

【分析】 求解此题是用夹逼定理,先进行不等式的放大缩小.

【详解】 利用夹逼定理,由

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

知 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}=\frac{i}{n^2+n+i}=\frac{1}{2}.$$

【评注】 对于几项求和的数列极限问题,一般考虑用夹逼定理或定积分定义计算.

夹逼定理为:设在 x_0 邻域内(x_0 除外),有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2. (98,选(1)题,3分) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必有无穷小.　　(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

【　　】

【答】 应选(D).

【分析】 本题可直接利用无穷小量的性质,推出 D 为正确选项.

【详解1】 由极限运算性质知

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0\cdot0=0,$$

所以(D)为正确选项.

【详解2】 取数列 $y_n=0$,排除(A).

若取数列

$$x_n=\begin{cases}2k-1, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1\\ 2k, & n=2k\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

便排除了(B).

对于(C),若数列 $x_n=0$,则 y_n 可为任何数列,所以(C)项也不正确.

故应选(D).

【评注】 若四个选项一一证明,显然是繁杂的,可以四个命题中选一估计正确的,容易证明的作出证明,也可用排除法.

3. (99,选(4)题,3分)"对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数N,当$n \geqslant N$时,恒有$|x_n - \alpha| \leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于$\alpha$的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

【　】

【答】 应选(C).

【分析】 本题主要考查数列极限$\varepsilon - N$的定义:"$\lim\limits_{x \to \infty} = a \Leftrightarrow$对$\forall \varepsilon > 0$,总存在正整数$N$,当$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon$成立."

【详解】 由数列$\{x_n\}$收敛于$a \Rightarrow$"对任意给定的$\varepsilon_1 > 0$,总存在正整数N_1,当$n > N_1$时,恒有$|x_n - a| \leqslant \varepsilon_1$",显然可推导出:"对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$,总存在的正整数$N$,当$n \geqslant N$时,恒有$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$".

反过来,若有"对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数N,当$n \geqslant N$时,恒有$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$",则对于任意的$\varepsilon_1 > 0$(不妨设$0 < \varepsilon_1 < 1$,当$\varepsilon_1 \geqslant 1$时,取一$\widetilde{\varepsilon_1}$,$0 < \widetilde{\varepsilon_1} < 1 < \varepsilon_1$,代替即可),取$\varepsilon = \dfrac{1}{3}\varepsilon_1 > 0$,存在正整数$N$,当$n \geqslant N$时,恒有$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon < \dfrac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$,令$N_1 = N - 1$,则满足"对任意给定的$\varepsilon_1 > 0$,总存在正整数$N_1$,当$n > N_1$时,恒有$|x_n - a| \leqslant \varepsilon_1$".

可见上述两种说法是等价的,因此正确选项为(C).

【评注】 数列极限定义中有"任意小"和"无穷大"两个术语,都不是一个确定的值,至于他们用什么符号表示是不重要的,应注意2ε同样是一个无穷小量.

4. (99,十题,7分)设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数,$\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x (n = 1,2,\cdots)$,证明数列$\{\alpha_n\}$的极限存在.

【分析】 因为$f(x)$非负单减,故考虑用单调有界数列极限存在的准则证明$\{a_n\}$的极限存在,先证$a_n \geqslant 0$再证$\{a_n\}$单调减.

【详解】 由题设可得

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k)\ (k = 1,2,\cdots),$$

所以有

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调下降,

又 $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx$

$= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$

$= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} [f(k) - f(x)]\,dx + f(n) \geqslant 0,$

即数列$\{a_n\}$有下界.

故由单调有界数列必有极限的准则知,数列$\{a_n\}$的极限存在.

【评注】 证明抽象数列$\{a_n\}$的极限存在,一般用单调有界数列必有极限判断,因此只需证明$\{a_n\}$是单调(增加或减少)且有界(上界或下界)即可.本题证明中用到如下公式:

$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx;$

$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(k)\,dx.$

5.(02,填(4)题,3分)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}} + \sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right] = \underline{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}$.

【分析】 本题利用定积分的定义进行求解.

【详解】 利用定积分定义,有

$$原式 = \int_0^1 \sqrt{1+\cos\pi x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

【评注】 如果设函数$f(x) = \sqrt{1+\cos x}$,其区间为$[0,\pi]$,则所求极限便是定积分$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos x}\,dx$的一个定义表达式,所以积分值是所求极限.

6.(02,八题,8分)设$0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

【分析】 对于本题而言,首先要证明极限存在,其证明方法是根据数列极限存在准则之一"单调有界数列极限存在",分别证明数列是单调的与数列是有界的,再由递推式求出数列的极限.另外,在证明有界时,也可以这样证明:因为$0 < x_1 < 3$,则有$0 < 3 - x_1 < 3$,故$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} < 3$,同理可证$n \geqslant 1, 0 < x_n < 3$,但从下述证明可知$\frac{3}{2}$是"最精确"的上界.

【详解】 由$0 < x_1 < 3$知$x_1, 3 - x_1$均为正数,

故 $0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}.$

设$0 < x_k \leqslant \frac{3}{2}\ (k > 1)$,则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leqslant \frac{1}{2}(x_k+3-x_k) = \frac{3}{2},$$

由数学归纳法知,对任意正整数 $n>1$,均有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$,因而数列 $\{x_n\}$ 有界. 又当 $n>1$ 时,

$$x_{n+1}-x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n}) = \frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}} \geqslant 0,$$

因而有 $x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$,即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由单调有界数列必有极限,知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限,得

$$a=\sqrt{a(3-a)},$$

解得

$$a=\frac{3}{2}, a=0(\text{舍去}).$$

故 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}.$

7. (03,选(1)题,4分)设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【 】

【答】 应选(D).

【分析】 本题可通过排除法找到正确选项,也可直接推导.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\therefore$ 存在 $N_1>0$,当 $n>N_1$ 时有 $b_n>\frac{1}{2}$.

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$, $\forall G>0$,存在 $N_2>0$,使 $n>N_2$ 时有 $c_n>G$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时有 $b_nc_n>\frac{G}{2}$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

故应选(D).

【详解】 用举反例法,取 $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=1$, $c_n=\frac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$,则可立即排除(A),(B),(C),因此正确选择为(D).

【评注】 本题主要考查对数列极限定义的理解. 要熟悉一些常见的 0、∞ 型式子的极限: $0\cdot$(有界) $=0$, $\infty\cdot$(有界)极限未定, $\infty\cdot 0$ 极限未定等.

8. (04,(9)题,4分) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$. (B) $2\int_1^2 \ln x\,dx$.

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)\mathrm{d}x$.

【　　】

【答】 应选(B).

【分析】 将原极限变形,使其对应一函数在一区间上的积分和式. 作变换后,从四个选项中选出正确的.

【详解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}2\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= 2\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x \xlongequal{1+x=t} 2\int_1^2 \ln t\mathrm{d}t = 2\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x.$$

故选(B).

【评注】 原式也可看作是$f(x) = \ln(1+x)^2$ 在$[0,1]$区间上的一个积分和的极限.

9. (06,(18)题,12分) 设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1,2,\cdots)$

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

【分析】 本题应先运用单调有界性说明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,再计算极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$和(Ⅱ)

【详解】 (Ⅰ) 由于$0 < x_1 < \pi$,得

$$0 < x_2 = \sin x_1 \leqslant 1 < \frac{\pi}{2},$$

所以

$$x_2 = \sin x_1 < x_1,$$
$$0 < x_3 = \sin x_2 < x_2$$

依此类推,得数列$\{x_n\}$单调下降有下界零,故极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$存在,记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x_0$,对计算式$x_{n+1} = \sin x_n$两边取极限,得$x_0$满足方程

$$x_0 = \sin x_0$$

设$f(x) = x - \sin x$,那么$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续且单调上升,从而方程$f(x) = 0$有惟一零点$x_0 = 0$.

即

$$\lim_{n\to+\infty}x_n = 0$$

(Ⅱ) 注意到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}=+\infty,$$

此极限可利用重要极限计算,从而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)^{\frac{x_n}{\sin x_n-x_n}}\right]^{\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}\cdot\frac{1}{x_n^2}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

故原极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

【评注】 本题属于极限计算综合题,涉及知识较多,极限的单调有界收敛准则,重要极限计算,洛必达法则和单调连续函数性质都是本题的考点.

小　结

判别数列收敛的主要方法有:

(1) 数列收敛定义. 用定义判断数列收敛是考题难点,需要严密的推理.

(2) 单调有界准则. 证明数列 $\{a_n\}$ 有界且单调,主要针对递推数列.

(3) 夹逼定理. 需将函数适当放大或缩小而且要求放大或缩小的两个函数具有相同的极限.

四、函数极限

1. (95,三(1)题,5分) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【分析】 本题可用两种方法解答:一种是直接用洛必达法则;另一种是用等价无穷小代换,因为表达式含有根式,所以应先有理化,然后利用等价无穷小代换即可.

【详解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}.$

【评注】 熟记以下等价无穷小关系：

①$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$.

②$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

③$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

④$a^x - 1 \sim x\ln a(a>0,且 a \neq 1)$.

2.（96，填4题，3分）$\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) - \sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = \underline{\quad 2 \quad}$.

【分析】 本题考查“$0\cdot\infty$”型未定式的求法. 考虑到 $x\to\infty$，函数表达式中含有$\dfrac{1}{x}$，一般令$\dfrac{1}{x}=t$后计算较为简便.

【详解1】 令$\dfrac{1}{x}=t$，则由洛必达法则知

$$原式 = \lim_{t\to0}\frac{\sin\ln(1+3t) - \sin\ln(1+t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to0}\left[\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t} - \cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}\right]$$

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{3}{1+3t} - \frac{1}{1+t}\right) = 2.$$

【详解2】 直接利用三角函数和差化积公式.

$$原式 = \lim_{x\to\infty} 2x\sin\frac{\ln\dfrac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}}{2}\cos\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}{2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2x\sin\frac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)}{2} = \lim_{x\to\infty} 2x\cdot\sin\frac{1}{x+1} = 2.$$

3.（97，选三（1）题，5分）求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【分析】本题主要考查极限的四则运算. 由于原式为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式，可在分子分母同除以 x，或是将分子有理化后分子分母同除以 x，再求极限. 要特别注意的是：当 $x<0$ 时，$x=-\sqrt{x^2}$.

【详解1】 $原式 = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}\sin t}} = 1.$

【详解2】 先进行有理化，再计算.