2006年全国各类成人高考（专科起点升本科）

高等数学（一）应试模拟

附5年真题解析

本书编写组

2006最新版

高等教育出版社

2006年全国各类成人高考（专科起点升本科）

高等数学（一）应试模拟

附5年真题解析

本书编写组

2006最新版

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)应试模拟/《高等数学(一)应试模拟》编写组. —北京:高等教育出版社,2006.3

2006 年全国各类成人高考. 专科起点升本科

ISBN 7 - 04 - 018842 - 2

Ⅰ.高... Ⅱ.高... Ⅲ.高等数学 - 成人教育:高等教育 - 习题 - 升学参考资料 Ⅳ.013 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 017681 号

策划编辑 田晓兰 **责任编辑** 田晓兰 **封面设计** 王 雎 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印 刷	中青印刷厂		
开 本	787 × 1092 1/8	版 次	2006 年 3 月第 1 版
印 张	12.5	印 次	2006 年 3 月第 1 次印刷
字 数	300 000	定 价	19.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 18842 - 00

出版前言

2006年年末，教育部高校学生司和教育部考试中心重新组织修订了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》。为了满足广大考生复习备考的需求，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授以及前大纲编写修订和考试命题研究人员，编写了政治、英语、教育理论、大学语文、艺术概论、民法、高等数学(一)、高等数学(二)、生态学基础、医学综合十门课程的复习考试辅导教材。

本套书是与辅导教材配套的复习备考强化冲刺阶段用书。书中的模拟试卷严格按照考试大纲中规定的试卷内容比例、试卷题型比例、试卷难易比例编制，按考试科目独立编装成册，每册包含10套左右试卷，根据不同科目的特点，编写了“解题指导”等内容。同时，应广大考生要求，我们将近5年的考题进行了详细解析，附于书后。

本套书的作者为编写“专升本”复习辅导教材的原班人马，对成人高考的教学与辅导均有深入研究，对成人高考的命题思路也多有了解。相信本套书的问世，将会对各类成人高考“专升本”考生检验自己的复习效果，进行考前“实战演练”提供更多帮助。

高等教育出版社

2006年2月

目　录

模拟试卷(一)

一、选择题：1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 当 $x\to 0$ 时，$2x^2+3x$ 是 x 的

A. 高阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小，但不是等价无穷小　　D. 低阶无穷小　　(　　)

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，$f'(x)>0$，则

A. $f(1)>f(0)$　　B. $f(1)<f(0)$

C. $f(1)=f(0)$　　D. $f(1)$ 与 $f(0)$ 的值不能比较　　(　　)

3. 设 $f'(x)$ 在点 x_0 的邻域内存在，且 $f(x_0)$ 为极大值，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$ 等于

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2　　(　　)

4. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，则 $\int \sin x f(\cos x)\mathrm{d}x$ 等于

A. $F(\sin x)+C$　　B. $-F(\sin x)+C$

C. $F(\cos x)+C$　　D. $-F(\cos x)+C$　　(　　)

5. 设函数 $y=\mathrm{e}^{-x}$，则 y' 等于

A. $-\mathrm{e}^{x}$　　B. e^{x}　　C. $-\mathrm{e}^{-x}$　　D. e^{-x}　　(　　)

6. 设函数 $z=\sin(xy^2)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 等于

A. $y^4\cos(xy^2)$　　B. $-y^4\cos(xy^2)$　　C. $y^4\sin(xy^2)$　　D. $-y^4\sin(xy^2)$　　(　　)

7. 设 $z=x^2+y^2-2x-4y+a$，则点 $(1,2)$

A. 为 z 的极大值点　　B. 为 z 的极小值点

C. 不为 z 的极值点　　D. 是否为 z 的极值点与 a 有关　　(　　)

8. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

A. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{1-x} \mathrm{d}y\int_0^{1} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(　　)

9. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$，则下列命题中正确的有

A. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在

C. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 可能不存在　　D. $\{S_n\}$ 为单调增数列　　(　　)

10. 设 y_1,y_2 为二阶线性常系数微分方程 $y''+p_1y'+p_2y=0$ 的两个特解，则 $C_1y_1+C_2y_2$

A. 为所给方程的解，但不是通解　　B. 为所给方程的解，但不一定是通解

C. 为所给方程的通解　　D. 不为所给方程的解　　(　　)

二、填空题：11～20 小题，每小题 4 分，共 40 分.

11. 设 $y=\sin 2x$，则 $\mathrm{d}y=$________.

12. 设 $y=2^x+\sin 2$，则 $y'=$________.

13. 函数 $y=x^3-2x+1$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为____________.

14. $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=$____________.

15. 设 $z=\sin\left(\dfrac{y}{x}+x^2\right)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____________.

16. 微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解为________.

17. 过点 $M_0(1,-2,0)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$ 垂直的平面方程为____________.

18. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴，则该切线方程为________________.

19. 广义积分 $\int_1^{+\infty} x^{-2}\mathrm{d}x=$________.

20. 设区域 D 由 y 轴，$y=x$，$y=1$ 所围成，则 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

三、解答题：21～28 小题，共 70 分，解答应写出推理、演算步骤.

21.（本题满分 8 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

22.（本题满分 8 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+2y^3+2xy+3y-x=1$ 确定，求 y'.

23. （本题满分 8 分）设 x^2+x 为 $f(x)$ 的原函数，求 $\int_0^1 xf'(x)\,dx$.

24. （本题满分 8 分）求 $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$，其中区域 D 是由曲线 $y=1+x^2$，$y=x^2$ 与 $x=0$，$x=1$ 所围成.

25. （本题满分 8 分）求微分方程 $x^2y'+xy=1$ 的通解.

26. （本题满分 10 分）求由曲线 $y=3-x^2$ 与 $y=2x$，y 轴所围成的平面图形的面积及该封闭图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

27. （本题满分 10 分）在曲线 $y=\sqrt{x}$ 上求一点 M_0，使该曲线过点 M_0 的切线平行于已知直线 $x-2y=5$，并求出相应的切线方程.

28. （本题满分 10 分）将 $f(x)=\ln(1+2x^2)$ 展开为 x 的幂级数.

模拟试卷(一)参考答案与解题指导

一、选择题

1. 本题选 C.

本题考查的知识点为无穷小阶的比较.

应依定义考察

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}(2x+3)=3.$$

由此可知,当 $x\to 0$ 时,$2x^3+3x$ 是 x 的同阶无穷小,但不是等价无穷小,故知应选 C.

本题应明确的是:考察当 $x\to x_0$ 时无穷小 β 与无穷小 α 的阶的关系时,要判定极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}$$

这里是以 α 为“基本量”,考生要特别注意此点,才能避免错误.

2. 本题选 A.

本题考查的知识点有两个:一是连续性与可导的关系;二是利用导数符号判定函数的单调性.

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 又由于在 $[0,1]$ 上有 $f'(x)>0$,可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加,从而知 $f(1)>f(0)$. 故应选 A.

本题通常容易忽视连续性与可导的关系. 如果将所给问题改变为:“设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有定义,在 $(0,1)$ 内可导,$f'(x)>0$,则

A. $f(1)>f(0)$　　　　B. $f(1)<f(0)$

C. $f(1)=f(0)$　　　　D. $f(1)$ 与 $f(0)$ 的值不能比较

读者对照原题可以发现,这里 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导,而不是 $[0,1]$ 上可导. 仅仅改变了函数 $f(x)$ 在区间端点的可导性,但是本题应该选 D. 这是因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导,可以知道 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续. 在 $(0,1)$ 内有 $f'(x)>0$,表示 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加,这些结论都不能判定 $f(1)$ 与 $f(0)$ 的值的大小,因此应选 D.

为了防范错误的出现,应该注意题目中条件的提法及在解题中起到了什么作用.

3. 本题选 B.

本题考查的知识点为导数的定义、极值的必要条件.

由极值的必要条件可知:若 $f(x)$ 在点 x_0 可导,x_0 为 $f(x)$ 的极值点,则必定有 $f'(x_0)=0$.

由题设知 $f'(x_0)=0$,又由题设条件知

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2[f(x_0+2h)-f(x_0)]}{2h}=2f'(x_0)=0,$$

可知应选 B.

4. 本题选 D.

本题考查的知识点为不定积分的第一换元积分法(凑微分法).

由题设知 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,因此

$$\begin{aligned}\int\sin x f(\cos x)\mathrm{d}x&=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x\\&=-F(\cos x)+C,\end{aligned}$$

可知应选 D.

5. 本题选 C.

本题考查的知识点为复合函数导数的运算.

由复合函数的导数链式法则知

$$\begin{aligned}y'&=(\mathrm{e}^{-x})'=\mathrm{e}^{-x}\cdot(-x)'\\&=-\mathrm{e}^{-x},\end{aligned}$$

可知应选 C.

6. 本题选 D.

本题考查的知识点为二阶偏导数运算.

由 $z=\sin(xy^2)$,知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy^2)\cdot(xy^2)'_x=y^2\cos(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\cdot[-\sin(xy^2)\cdot(xy^2)'_x]=-y^4\sin(xy^2).$$

可知应选 D.

7. 本题选 B.

本题考查的知识点为二元函数的极值.

求解的一般步骤为:先求出函数的一阶偏导数,令两个偏导数等于零,确定函数的驻点. 再求函数的二阶偏导数. 依极值的充分条件来判定所求驻点是否为极值点.

由于 $z=x^2+y^2-2x-4y+a$,可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-2=0,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-4=0.\end{cases}$$

解得 z 有唯一驻点 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 即点 $(1,2)$ 为驻点. 又由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,2)}=2,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,2)}=0,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,2)}=2.$$

$$B^2-AC=-4<0,A=2>0.$$

由极值的充分条件可知点 $(1,2)$ 为 z 的极小值点,故应选 B.

由于本题的特殊性，也可以利用初等数学知识判定. 注意到

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + a = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (a-5),$$

可知当 $x=1, y=2$ 时，函数 z 取得最小值，因此点(1,2)为 z 的极小值点.

8. 本题选 A.

本题考查的知识点为交换二次积分的积分次序.

由所给二次积分限可知积分区域 D 的不等式表达式为：

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1-x,$$

其图形如图 1-1 所示.

交换积分次序，D 可以表示为

$$0 \leqslant y \leqslant 1,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1-y,$$

因此

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx,$$

可知应选 A.

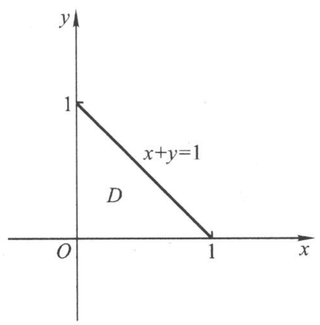

图 1-1

9. 本题选 B.

本题考查的知识点为级数收敛性的定义.

由级数收敛性的定义：若 $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$，当 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在时，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，可知应选 B.

10. 本题选 B.

本题考查的知识点为线性常系数微分方程解的结构.

已知 y_1, y_2 为二阶线性常系数齐次微分方程 $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ 的两个解，由解的结构定理可知 $C_1y_1 + C_2y_2$ 为所给方程的解，因此应排除 D. 又由解的结构定理可知，当 y_1, y_2 线性无关时，$C_1y_1 + C_2y_2$ 为 $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ 的通解，因此应该选 B.

本题中常见的错误是选 C. 这是由于忽略了线性常系数方程解的结构定理中的条件所导致的错误. 解的结构定理中指出："若 y_1, y_2 为二阶线性常系数微分方程 $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ 的两个线性无关的特解，则 $C_1y_1 + C_2y_2$ 为所给微分方程的通解，其中 C_1, C_2 为任意常数". 由于所给命题中没有指出 y_1, y_2 为线性无关的特解，可知 $C_1y_1 + C_2y_2$ 不一定为方程的通解. 但是由解的结构定理知 $C_1y_1 + C_2y_2$ 为方程的解，因此应选 B.

二、填空题

11. **参考答案**：$2\cos 2x \cdot dx$.

解题指导：这类问题通常有两种解法.

解法 1：利用公式 $dy = y'dx$，先求 y'，由于 $y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$，因此

$$dy = 2\cos 2x dx.$$

解法 2：利用微分运算公式

$$dy = d(\sin 2x) = \cos 2x \cdot d(2x) = 2\cos 2x dx.$$

12. **参考答案**：$2^x \ln 2$.

解题指导：本题考查的知识点为初等函数的求导运算.

本题需利用导数的四则运算法则求解.

$$y' = (2^x + \sin 2)' = (2^x)' + (\sin 2)' = 2^x \ln 2.$$

本题中常见的错误有：

$(\sin 2)' = \cos 2$.

这是由于误将 $\sin 2$ 认作 $\sin x$，事实上 $\sin 2$ 为一个常数，而常数的导数为 0，即

$$(\sin 2)' = 0.$$

相仿 $(\cos 3)' = 0$，$(\ln 5)' = 0$，$(e^{\frac{1}{2}})' = 0$ 等.

请考生注意，不论以什么函数形式出现，只要是常数，它的导数必定为 0.

13. **参考答案**：0.

解题指导：本题考查的知识点为连续函数在闭区间的最小值问题.

通常求解的思路为：

先求出连续函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有驻点 $x_1, \cdots, x_k$.

比较 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_k), f(a), f(b)$，其中最大(小)值即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大(小)值，相应的 x 即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大(小)值点.

由 $y = x^3 - 2x + 1$，可得

$$y' = 3x^2 - 2.$$

令 $y' = 0$ 得 y 的驻点为 $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$，所给驻点皆不在区间(1,2)内，且当 $x \in (1,2)$ 时有

$$y' = 3x^2 - 2 > 0.$$

可知 $y = x^3 - 2x + 1$ 在 $[1,2]$ 上为单调增加函数，最小值点为 $x = 1$，最小值为 $f(1) = 0$.

注：也可以比较 $f(1), f(2)$ 直接得出其中最小者，即为 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值.

本题中常见的错误是，得到驻点 $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ 和 $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 之后，不讨论它们是否在区间(1,2)内，而是错误地比较

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right), f(1), f(2),$$

从中确定 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值. 则会得到错误结论.

14. **参考答案**：$\frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

解题指导：本题考查的知识点为定积分计算.

可以利用变量替换，令 $u = 2x$，则 $du = 2dx$，当 $x = 0$ 时，$u = 0$；当 $x = 1$ 时，$u = 2$. 因此

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^u du = \frac{1}{2}e^u \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

或利用凑微分法

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1).$$

本题中考生常在最后由于粗心而出现的错误. 如

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2,$$

这里 $e^{2x}\Big|_0^1 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$ 中丢掉第二项.

15. **参考答案**:$\left(2x-\frac{y}{x^2}\right)\cos\left(\frac{y}{x}+x^2\right)$.

解题指导:本题考查的知识点为二元函数的偏导数计算.

可以令 $u=\frac{y}{x}+x^2$,得 $z=\sin u$,由复合函数偏导数的链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \cos u\cdot\left(\frac{-y}{x^2}+2x\right)$$
$$= \left(2x-\frac{y}{x^2}\right)\cos\left(\frac{y}{x}+x^2\right).$$

16. **参考答案**:$y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

解题指导:本题考查的知识点为二阶线性常系数齐次微分方程的求解.

二阶线性常系数齐次微分方程求解的一般步骤为:先写出特征方程,求出特征根,再写出方程通解.

微分方程为　$y''+y'+y=0$,

特征方程为　$r^2+r+1=0$,

特征根　$r=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$,

因此所给微分方程的通解为

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

17. **参考答案**:$3(x-1)-(y+2)+z=0$　(或 $3x-y+z=5$).

解题指导:本题考查的知识点为平面与直线的方程.

由题设条件可知应该利用点法式方程来确定所求平面方程.

所给直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(3,-1,1)$. 若所求平面 π 垂直于直线 l,则平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}$,不妨取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=(3,-1,1)$. 则由平面的点法式方程可知

$$3(x-1)-[y-(-2)]+(z-0)=0,$$

即

$$3(x-1)-(y+2)+z=0$$

为所求平面方程.

或写为　$3x-y+z-5=0$.

上述两个结果都正确,前者 $3(x-1)-(y+2)+z=0$ 称为平面的点法式方程,而后者 $3x-y+z-5=0$ 称为平面的一般式方程.

18. **参考答案**:$y=f(1)$.

解题指导:本题考查的知识点有两个:一是导数的几何意义,二是求切线方程.

设切点为 $(x_0,f(x_0))$,则曲线 $y=f(x)$ 过该点的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

由题意可知 $x_0=1$,且在 $(1,f(1))$ 处曲线 $y=f(x)$ 的切线平行于 x 轴,因此应有 $f'(x_0)=0$,故所求切线方程为

$$y-f(1)=0.$$

本题中考生最常见的错误为:将曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程写为

$$y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$$

而导致错误. 本例中错误地写为

$$y-f(1)=f'(x)(x-1).$$

本例中由于 $f(x)$ 为抽象函数,一些考生不习惯于写 $f(1)$,有些人误写切线方程为

$$y-1=0.$$

19. **参考答案**:1.

解题指导:本题考查的知识点为广义积分,应依广义积分定义求解.

$$\int_1^{+\infty}x^{-2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}(-1)x^{-1}\Big|_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}[(-1)\cdot(b^{-1}-1)]$$
$$= 1.$$

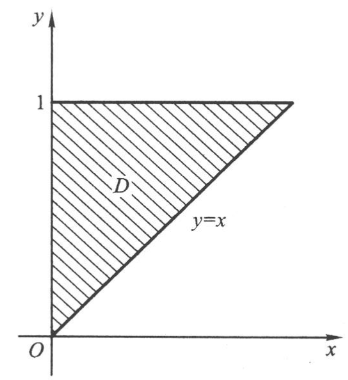

图 1－2

20. **参考答案**:$\frac{1}{6}$.

解题指导:本题考查的知识点为计算二重积分.

其积分区域如图 1－2 所示.

应将二重积分化为二次积分解之.

解法 1:　化为先对 y 积分,后对 x 积分的二次积分.

作平行于 y 轴的直线与区域 D 相交,沿 y 轴正向看,入口曲线为 $y=x$,作为积分下限;出口曲线为 $y=1$,作为积分上限,因此

$$x\leqslant y\leqslant 1.$$

区域 D 在 x 轴上的投影最小值为 $x=0$,最大值为 $x=1$,因此

$$0\leqslant x\leqslant 1.$$

可得知

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_x^1 x\,dy = \int_0^1 xy\Big|_x^1 dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

解法 2： 化为先对 x 积分，后对 y 积分的二次积分.

作平行于 x 轴的直线与区域 D 相交，沿 x 轴正向看，入口曲线为 $x=0$，作为积分下限；出口曲线为 $x=y$，作为积分上限，因此

$$0 \leqslant x \leqslant y.$$

区域 D 在 y 轴上投影的最小值为 $y=0$，最大值为 $y=1$，因此

$$0 \leqslant y \leqslant 1.$$

可得知

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y x\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^y \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{6}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

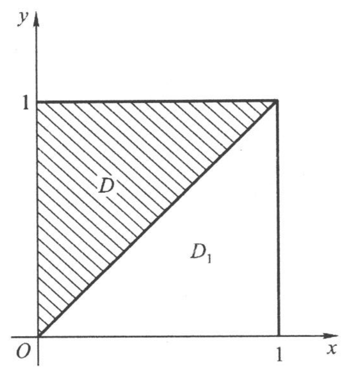

图 1－3

本题中将二重积分化为二次积分时，最常见的错误为

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x x\mathrm{d}y.$$

如图 1－3 所示. 上式右端的二次积分实质上应等于 $\iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，而不等于 $\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三、解答题

21. **解法 1**： 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0.\text{（再次利用洛必达法则）}$$

解法 2

或 原式 $= \lim \dfrac{\sin x - x}{x^2} = \lim \dfrac{\cos x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{4} = 0.$（利用等价无穷小代换）

解题指导：本题考查的知识点为用洛必达法则求极限.

由于问题为"$\infty - \infty$"型极限问题，应先将求极限的函数通分，使所求极限化为"$\dfrac{0}{0}$"型问题.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}.$$

如果将上式右端直接利用洛必达法则求之，则运算复杂. 注意到使用洛必达法则求极限时，如果能与等价无穷小代换相结合，则问题常能得到简化，由于当 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x},$$

从而能简化运算.

本题考生中常见的错误为：由于当 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x$，因此

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

将等价无穷小代换在加减法运算中使用，这是不允许的.

22. **解法 1**： 将所给方程两端关于 x 求导，可得

$$2x + 6y^2 \cdot y' + 2(y + xy') + 3y' - 1 = 0,$$

整理可得

$$y' = \frac{1 - 2x - 2y}{6y^2 + 2x + 3}.$$

解法 2： 令 $F(x,y) = x^2 + 2y^3 + 2xy + 3y - x - 1.$

则

$$F'_x = 2x + 2y - 1,$$
$$F'_y = 6y^2 + 2x + 3,$$
$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x + 2y - 1}{6y^2 + 2x + 3}.$$

解题指导：本题考查的知识点为隐函数求导法.

$y = y(x)$ 由方程 $F(x,y) = 0$ 确定，求 y'通常有两种方法：

一是将 $F(x,y) = 0$ 两端关于 x 求导，认定 y 为中间变量，得到含有 y'的方程，从中解出 y'.

二是利用隐函数求导公式 $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$. 其中 F'_x, F'_y 分别为 $F(x,y)=0$ 中 $F(x,y)$ 对第一个位置变元的偏导数与对第二个位置变元的偏导数.

对于一些特殊情形，可以从 $F(x,y)=0$ 中较易地解出 $y = y(x)$ 时，也可以先求出 $y = y(x)$，再直接求导.

23. **解法 1**： $\int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x.$

由于 $x^2 + x$ 为 $f(x)$ 的原函数，因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + x + C,$$

且 $f(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1,$

故 $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = x(2x+1)\Big|_0^1 - (x^2 + x)\Big|_0^1 = 1.$

解法 2： 由于 $x^2 + x$ 为 $f(x)$ 的原函数，因此

$$f(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1,$$
$$f'(x) = 2.$$
$$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

解题指导：本题考查的知识点为定积分的分部积分法.

本题参考解答中的解法 1 为正常解法. 一般情形下利用解法 2 都将变得复杂. 例如：

“设 $x\sin x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.”

如果利用解法 2 计算，将会比解法 1 复杂得多.

本题考生中出现的较多错误是不清楚原函数的概念. 采用下面解法而导致错误：

由于 x^2+x 为 $f(x)$ 的原函数，因此

$$f'(x)=x^2+x,$$

$$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(x^2+x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}.$$

考生应该明确原函数的概念：若在 (a,b) 内有

$$F'(x)=f(x),$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的原函数. 那么上述的错误就可以避免.

24. **解**： 积分区域 D 如图 1－4 所示.

D 可以表示为

$$0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 1+x^2.$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1+x^2}(x+y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(x+x^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1\\&=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

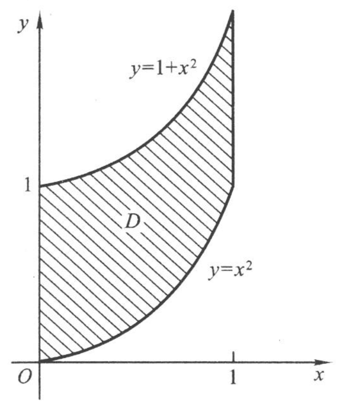

图 1－4

解题指导：本题考查的知识点为计算二重积分，选择积分次序.

如果将二重积分化为先对 x 后对 y 的积分，将变得很复杂，因此考生应该学会选择合适的积分次序.

25. **解**： 所给方程为一阶线性微分方程，化为标准形

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2},$$

其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x}\left[\int q\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right],$$

$$p=\frac{1}{x}, q=\frac{1}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-\ln x}\left[\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\frac{1}{x}\left[\int\frac{1}{x^2}\cdot x\mathrm{d}x+C\right]\\&=\frac{1}{x}(\ln x+C).\end{aligned}$$

解题指导：本题考查的知识点为求解一阶线性微分方程.

除参考解答中利用通解公式求解外，也可以利用常数变易法求解.

相应的齐次微分方程为

$$x^2y'+xy=0,$$

为可分离变量方程. 先分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\ln y=-\ln x+\ln C=\ln\frac{C}{x},$$

可得 $y=\dfrac{C}{x}$.

令 $y=\dfrac{C(x)}{x}$ 为原方程的解，则

$$y'=\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2},$$

代入原方程可得

$$x^2\cdot\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+x\cdot\frac{C(x)}{x}=1,$$

$$C'(x)=\frac{1}{x}, \mathrm{d}C(x)=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\int\mathrm{d}C(x)=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x, C(x)=\ln x+C.$$

因此可得原方程的通解 $y=\dfrac{1}{x}(\ln x+C)$.

有必要指出，如果利用一阶线性微分方程的通解公式，应该先将方程化为标准形式 $y'+p(x)y=q(x)$，否则必定会出现错误.

26. 所给曲线围成的平面图形如图 1－5 所示.

解法 1： 利用定积分求平面图形的面积.

由于 $\begin{cases}y=3-x^2\\y=2x\end{cases}$ 的解为 $x=1, y=2$，可得

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1[(3-x^2)-2x]\mathrm{d}x\\&=\left(3x-\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_0^1\\&=\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

$$V = \int_0^1 \pi[(3-x^2)^2 - (2x)^2]\,dx$$
$$= \pi\int_0^1 (9 - 6x^2 + x^4 - 4x^2)\,dx$$
$$= \pi\left(9x - \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{88}{15}\pi.$$

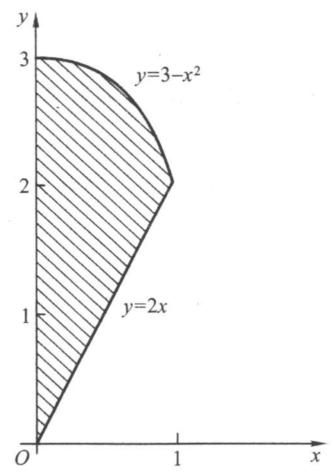

图 1－5

解法 2：利用二重积分求平面图形面积.

由于 $\begin{cases} y = 3 - x^2 \\ y = 2x \end{cases}$ 的解为 $x = 1, y = 2$,

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{2x}^{3-x^2} dy$$
$$= \int_0^1 [(3-x^2) - 2x]\,dx$$
$$= \left(3x - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{5}{3}.$$

求旋转体体积与解法 1 同.

解题指导:本题考查的知识点有两个:利用定积分求平面图形的面积;用定积分求绕坐标轴旋转所得旋转体的体积.

本题也可以利用二重积分求平面图形的面积.

27. **解**：设点 M_0 的坐标为 $(x_0, \sqrt{x_0})$, 由于

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
$$y'\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

已知直线 $x - 2y = 5$ 的斜率 $k = \frac{1}{2}$,

依题意应有

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2},$$

可解得

$$x_0 = 1,$$

因此 M_0 的坐标为 $(1,1)$.

相应的过点 $M_0(1,1)$ 的切线方程为

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$$

或 $x - 2y + 1 = 0$.

解题指导:本题考查的知识点有两个:一是曲线的切线方程;二是两条直线平行的判定.

28. **解**：由于 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, -1 < x < 1$,

因此 $\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n x^{2n}}{n}, -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

解题指导:本题考查的知识点为将函数展开为幂级数.

考试大纲中指出“会运用 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), \frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式,将一些简单的初等函数展开为 x 或 $(x-x_0)$ 的幂级数.”这表明本题应该将 $\ln(1+2x^2)$ 变形认作 $\ln(1+x)$ 的形式,利用间接法展开为 x 的幂级数.

本题中考生出现的常见错误是对 $\ln(1+2x^2)$ 关于 x 的幂级数不注明该级数的收敛区间,这是要扣分的.

模拟试卷(二)

一、选择题:1～10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 mx}{x^2}$等于

A. 0　　B. ∞　　C. m　　D. m^2　　(　　)

2. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续,则下面命题正确的是

A. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$可能不存在　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必定存在,但不一定等于 $f(x_0)$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必定存在,且等于 $f(x_0)$　　D. $f(x_0)$在点 x_0 必定可导　　(　　)

3. 设 $y=2^{-x}$,则 y'等于

A. 2^{-x}　　B. -2^{-x}　　C. $2^{-x}\ln 2$　　D. $-2^{-x}\ln 2$　　(　　)

4. 下列关系式中正确的是

A. $\dfrac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = f(x)$　　B. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

C. $\int_a^b f'(x)dx = f(x)$　　D. $\int_a^b f'(x)dx = f(x)+C$

其中 A,B 中的 $f(x)$ 为连续函数,C,D 中的 $f(x)$ 有连续导数.　　(　　)

5. 设 $f(x)$为连续函数,且 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,则下面命题正确的是

A. $f(x)$为$[-a,a]$上的奇函数

B. $f(x)$为$[-a,a]$上的偶函数

C. $f(x)$可能为$[-a,a]$上的非奇非偶函数

D. $f(x)$必定为$[-a,a]$上的非奇非偶函数　　(　　)

6. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=f(1)$,则在$(0,1)$内曲线 $y=f(x)$的所有切线中

A. 至少有一条平行于 x 轴　　B. 至少有一条平行于 y 轴

C. 没有一条平行于 x 轴　　D. 可能有一条平行于 y 轴　　(　　)

7. $\int_0^1 f'(2x)dx$ 等于

A. $\dfrac{1}{2}[f(1)-f(0)]$　　B. $\dfrac{1}{2}[f(2)-f(0)]$

C. $2[f(1)-f(0)]$　　D. $2[f(2)-f(0)]$　　(　　)

8. 设 $z=xy^2+y\sin x$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$等于

A. $2y-\cos x$　　B. $2xy-\cos x$　　C. $2y+\cos x$　　D. $2xy+\cos x$　　(　　)

9. 方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$的待定特解 y^* 应取

A. Axe^{2x}　　B. $(Ax+B)e^{2x}$　　C. Ax^2e^{2x}　　D. $x(Ax+B)e^{2x}$　　(　　)

10. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则下面命题正确的是

A. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 可能不存在　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 必定不存在

C. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$　　(　　)

二、填空题:11～20 小题,每小题 4 分,共 40 分.

11. 设当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$,$F(x)$在点 $x=0$ 处连续,当 $x\neq 0$ 时,$F(x)=f(x)$,则 $F(0)=$________.

12. 设 $y=f(x)$在点 $x=0$ 处可导,且 $x=0$ 为 $f(x)$的极值点,则曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为________.

13. $e^x+\cos x$ 为 $f(x)$的一个原函数,则 $f(x)=$________.

14. 设 $\int_0^x f(t)dt = e^{2x}-1$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $f(x)=$________.

15. 设$\int_0^{+\infty}\dfrac{k}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}$,且 k 为常数,则 $k=$________.

16. 微分方程 $y''+2y'=0$ 的通解为________.

17. 设 $z=\ln\left(x^2+\dfrac{x}{y}\right)$,则 $dz=$________.

18. 过 $M_0(1,-1,2)$且垂直于平面 $2x-y+3z-1=0$ 的直线方程为________.

19. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3n}$ 的收敛区间为________.(不包括端点)

20. $\int_0^1 dx\int_0^2 dy=$________.

三、解答题:21～28 小题,共 70 分,解答时应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分).设 $y=x\cdot\tan x$,求 y'.

22.（本题满分 8 分）. 求曲线 $y=\dfrac{x^2+2}{(x-2)^3}$ 的渐近线.

23.（本题满分 8 分）. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(2x+1)}\mathrm{d}x$.

24.（本题满分 8 分）. 设 $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^3+3xyz^2+2z=1$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

25.（本题满分 8 分）. 计算 $\displaystyle\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 满足 $x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

26.（本题满分 10 分）求微分方程 $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

27.（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=x^3+3x\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

28.（本题满分 10 分）设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $f(x)=x\ln x$，求 $F(x)$.

模拟试卷(二)参考答案与解题指导

一、选择题

1. 本题选 D.

本题考查的知识点为重要极限公式或等价无穷小代换.

解法 1： 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2\sin^2 mx}{m^2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}m^2\cdot\left[\frac{\sin mx}{mx}\right]^2$$

$$=m^2.$$

解法 2： 当$x\to 0$时,$\sin x\sim x$,$\sin mx\sim mx$,因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(mx)^2}{x^2}$$

$$=m^2.$$

2. 本题选 C.

本题考查的知识点有两个:连续性与极限的关系;连续性与可导的关系.

连续性的定义包含三个要素:若$f(x)$在点x_0处连续,则

(1) $f(x)$在点x_0处必定有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必定存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

由此可知所给命题 C 正确,A,B 不正确.

注意连续性与可导的关系:可导必定连续;连续不一定可导,可知命题 D 不正确. 故知应选 C.

本题常见的错误是选 D. 这是由于考生没有正确理解可导与连续的关系.

若$f(x)$在点x_0处可导,则$f(x)$在点x_0处必定连续.

但是其逆命题不成立.

3. 本题选 D.

本题考查的知识点为复合函数求导数的链式法则.

由于

$$y=2^{-x}$$

$$y'=2^{-x}\cdot\ln 2\cdot(-x)'$$

$$=-2^{-x}\ln 2.$$

考生易错误选 C,这是求复合函数的导数时丢掉项而造成的! 因此考生应熟记:若$y=f(u)$,$u=u(x)$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

不要丢项.

4. 本题选 B.

本题考查的知识点为:若$f(x)$可积分,则定积分的值为常数;可变上限积分求导公式的运用.

注意到 A,C,D 左端都为定积分,定积分存在时,其值一定为常数,因此 A,C,D 都不正确.

由可变上限积分求导公式可知 B 正确.

5. 本题选 C.

本题考查的知识点为定积分的对称性.

由定积分的对称性质可知:若$f(x)$为$[-a,a]$上的连续的奇函数,则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0,$$

可知命题 D 不正确,命题 B 也不正确.

如果令

$$f(x)=\begin{cases}3(x+1), & -2\leqslant x<-1,\\ \frac{1}{3}(x+1), & -1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

则$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=0$,且$f(x)$为$[-2,2]$上的连续函数. 但是$f(x)$不是奇函数,也不是偶函数,可知应选 C.

本题常见的错误是选 A. 这也是由于没有理解定积分的对称性质. 若$f(x)$为$[-a,a]$上的奇函数,则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0.$$

反之不真.

读者应该注意所学的性质是必要条件,还是充分条件,或为充分必要条件. 这是三个性质不同的问题,不可随意用.

6. 本题选 A.

本题考查的知识点有两个:罗尔中值定理;导数的几何意义.

由题设条件可知$f(x)$在$[0,1]$上满足罗尔中值定理,因此至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使$f'(\xi)=0$. 这表明曲线$y=f(x)$在点$(\xi,f(\xi))$处的切线必定平行于x轴,可知 A 正确,C 不正确.

如果曲线$y=f(x)$在点$(\xi,f(\xi))$处的切线平行于y轴,其中$\xi\in(0,1)$,这条切线的斜率为∞,这表明$f'(\xi)=\infty$为无穷大,此时说明$f(x)$在点$x=\xi$不可导. 因此可知 B,D 都不正确.

本题对照几何图形易于找出解答,只需依题设条件,画出一条曲线,则可以知道应该选 A.

有些考生选 B,D,这是由于不明确导数的几何意义而导致的错误.

7. 本题选 B.

本题考查的知识点为定积分的换元积分法、牛－莱公式.

解法 1： 利用定积分的换元积分法. 令 $t=2x$，则 $dt=2dx$，$\int_0^1 f'(2x)\,dx=\int_0^2 f'(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}f(t)\Big|_0^2=\frac{1}{2}[f(2)-f(0)]$.

可知应选 B.

解法 2： 利用凑微分法. $\int_0^1 f'(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\,d2x=\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}[f(2)-f(0)]$.

可知应选 B.

8. 本题选 C.

本题考查的知识点为高阶偏导数.

由于 $z=xy^2+y\sin x$，因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+y\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2y+\cos x.$$

可知应选 C.

9. 本题选 D.

本题考查的知识点为二阶常系数线性非齐次微分方程特解 y^* 的取法：

若自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$，当 α 不为特征根时，可设特解为

$$y^*=Q_n(x)e^{\alpha x},$$

$Q_n(x)$ 为 x 的待定 n 次多项式.

当 α 为单特征根时，可设特解为

$$y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x},$$

当 α 为二重特征根时，可设特解为

$$y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

所给方程对应齐次方程的特征方程为

$$r^2-3r+2=0.$$

特征根为 $r_1=1, r_2=2$.

自由项 $f(x)=xe^{2x}$，相当于 $\alpha=2$ 为单特征根. 又因为 $P_n(x)$ 为一次式，因此应选 D.

10. 本题选 D.

本题考查的知识点为级数的基本性质.

由级数收敛的必要条件：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，可知 D 正确. 而 A，B，C 都不正确.

本题常有考生选取 C，这是由于考生将级数收敛的定义 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，其中 $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$ 误认作是 u_n，这属于概念不清楚而导致错误.

二、填空题

11. **参考答案**：2.

解题指导：本题考查的知识点为连续性的概念.

由连续性的定义可知，若 $F(x)$ 在点 $x=0$ 连续，则必有 $\lim_{x\to0}F(x)=F(0)$. 由题设可知

$$\begin{aligned}F(0)&=\lim_{x\to0}F(x)\\&=\lim_{x\to0}f(x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=2.\end{aligned}$$

本题考生常填 1，这是由于误用极限公式而导致的错误，将 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ 取为 1. 考生如果能理解重要极限 $\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ 的格式，上述错误就能避免.

12. **参考答案**：$y=f(0)$.

解题指导：本题考查的知识点为两个：极值的必要条件；切线方程.

由于 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 可导，且 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，由极值的必要条件可知有 $f'(0)=0$.

又曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,f(0))$ 的切线方程为

$$y-f(0)=f'(0)(x-0),$$

因此有

$$y-f(0)=0.$$

本题考生出现的较多错误为：① 将切线方程写为

$$y-f(0)=f'(x)(x-0),$$

这是由于对切线方程的含义没能理解，不知道曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处切线的斜率为 $f'(0)$，不是 $f'(x)$.

② 也有考生将切线方程写为

$$y-f(0)=f'(0)(x-0),$$

而没有利用题目中的已知条件："$y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点."忘记了利用极值的必要条件，此时应有 $f'(0)=0$.

③ 有些考生在解答中填写"$f(0)$"，这也是错误的. 题目要求写出切线方程，因此应写 $y=f(0)$. 如果题目为 $y=$______则可写为 $f(0)$.

13. **参考答案**：$e^x-\sin x$.

解题指导：本题考查的知识点有两个：原函数的概念；初等函数求导运算.

由于 $e^x+\cos x$ 为 $f(x)$ 的原函数，可知

$$\begin{aligned}f(x)&=(e^x+\cos x)'\\&=e^x-\sin x.\end{aligned}$$

14. **参考答案**：$2e^{2x}$.

解题指导：本题考查的知识点为可变上限积分求导.

由于 $f(x)$ 为连续函数，因此可对所给表达式两端关于 x 求导.

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'=(e^{2x}-1)',$$

$$f(x)=2e^{2x}.$$

15. **参考答案**：$\frac{1}{\pi}$.

解题指导：本题考查的知识点为广义积分的计算.

广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 应依定义计算：

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

由于

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{k}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to+\infty} k\arctan x\Big|_0^b\\ &= \frac{k\pi}{2},\end{aligned}$$

由题设有 $\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{2}$，可知 $k=\frac{1}{\pi}$.

16. **参考答案**：$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

解题指导：本题考查的知识点为求解二阶常系数线性齐次微分方程.

微分方程为 $y''+2y'=0$.

特征方程为 $r^2+2r=0$.

特征根为 $r_1=0, r_2=-2$.

齐次方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

17. **参考答案**：$\frac{y}{x^2y+x}\left[\left(2x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right]$.

解题指导：本题考查的知识点为求二元函数的全微分.

通常求二元函数的全微分的思路为：

先求出 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$. 如果两个偏导数为连续函数，则可得知 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

由题设 $z=\ln\left(x^2+\frac{x}{y}\right)$，令 $u=x^2+\frac{x}{y}$，可得

$$\begin{aligned}z &= \ln u,\\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}\\ &= \frac{1}{x^2+\frac{x}{y}}\cdot\left(2x+\frac{1}{y}\right)\\ &= \frac{2xy+1}{x(xy+1)},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}\\ &= \frac{1}{x^2+\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\\ &= \frac{-x}{xy(xy+1)},\end{aligned}$$

当 $xy(xy+1)\neq 0$ 时，$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 为连续函数，因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\ &= \frac{y}{x^2y+x}\left[\left(2x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right].\end{aligned}$$

或整理为 $\mathrm{d}z=\frac{1}{x(xy+1)}\left[(2xy+1)\mathrm{d}x-\frac{x}{y}\mathrm{d}y\right]$.

18. **参考答案**：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

解题指导：本题考查的知识点为直线的方程的求解.

由于所求直线与平面垂直，因此直线方向向量 $\boldsymbol{s}$ 可取为已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1,3)$. 由直线的点向式方程可知所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}.$$

19. **参考答案**：$(-1,1)$.

解题指导：本题考查的知识点为求幂级数的收敛区间.

所给级数为不缺项情形.

$a_n=\frac{1}{3n}, a_{n+1}=\frac{1}{3(n+1)}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{3(n+1)}\\ &= 1=\rho,\end{aligned}$$

可知收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$，因此

$$-1<x<1,$$

注：考试大纲中指出，收敛区间为 $(-R,R)$，不包括端点.

本题一些考生填为1，这是误将收敛区间看作收敛半径，多数是由于考试时过于紧张而导致的错误.

20. **参考答案**：2.

解题指导：本题考查的知识点为二重积分的几何意义.