

原 考 研 数 学 命 题 组 组 长
清 华 大 学 胡 金 德 教 授 作 序 并 推 荐

spark® 星火书业

考研数学试题详解

KAOYANSHUXUESHITIXIANGJIE

考研数学资深辅导专家 张天德教授 主编

(1993年-2006年)

高联学校
指定考研教材

- ◆ 紧 跟 大 纲 科 学 透 视 最 新 命 题 趋 势
- ◆ 全 真 分 类 14 年 考 研 真 题 一 网 打 尽
- ◆ 真 题 详 解 权 威 提 供 规 范 准 确 解 析
- ◆ 六 大 栏 目 考 研 辅 导 名 师 智 慧 结 晶

2007

新 华 出 版 社

数学重要
公式及性质
赠

考研数学试题详解

KAOYANSHUXUESHITIXIANGJIE

考研数学资深辅导专家 张天德教授 主编

主 编 张天德

副主编 王 玮 叶 宏

2007

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学试题详解/张天德主编. —北京:新华出版社, 2006. 1

ISBN 7-5011-7339-7

I. 考... II. 张... III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 151934 号

考研数学试题详解

张天德 主编

*

新华出版社出版发行

(北京市石景山区京源路 8 号 邮编:100043)

新华书店经销

山东文登印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 35 印张 700 千字

2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5011-7339-7 定价:26.80 元

序

纵观考研数学辅导教材市场,鱼龙混杂,既有结构严谨、内容详实的名家名作,也不乏毫无新意的平庸之作、东拼西凑的剽窃之作,张天德教授的这本《考研数学真题分类全解》令我耳目一新。

张天德教授近年来一直在全国十几个城市的大型考研辅导班授课,深受全国各地考生的欢迎。同时张教授也是我国硕士研究生入学考试数学阅卷组的负责人,之前已有数十本教材出版。为了创作一本实用的考研数学辅导教材,正确引导广大考生进行研究生入学考试的总复习,张教授结合他十几年的考研辅导经验,投入了大量心血,搜集相关资料,写成了针对广大考研学生的《考研数学真题分类全解》一书。

浏览过后,我觉得这本书特点鲜明,对真题进行了科学的分类和规范、详细的解答,书中 14 年的考研真题及详解无一不是张教授多年教学和研究心血的结晶。

历年研究生数学考试试题,全面体现和反映了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求,体现了考试的重点、难点,也充分展示了重点题型。作为多年从事考研数学辅导和参与命题工作的老师,我深知在考研数学复习中,一定量的真题训练是必不可少的,真题的掌握和吃透应是备考的必由之路,而对历年真题进行科学分类和全面解析正是本书的重点也是本书的特色所在。

张教授从 1993 年至 2006 年共计 14 年数学考试的试卷中精选出真题进行了解析,这些题目是历年来研究生考试数学试题的精华,集中反映了数学试题的考核重点和典型题型。张教授的这本《考研数学真题分类全解》正是切合了广大考研学生的需要,可以有效地帮助考生解决真题复习这一备考过程中的重要问题。

这本书的栏目设置也颇有新意。本章概括、考点分布、考纲预览、真题详解、名师点拨、方法综述,这六大新颖的栏目详尽解析了考研数学最新大纲,简洁概括了各章学习及考查的重点内容,以图表形式全面透视了 14 年来考研数学试题在各章节中的分布情况和难度,使广大考研学生能够深入了解各个知识点的内容和命题方向,从而把握备考的重点和难点,找到解决问题的关键、技巧和规律,解决考研学子在考研复习过程中的问题,使考研数学的备考复习更加有效。

我认为这本书不愧为一本实用、新颖的考研数学复习教材,也是编者多年进行大学数学教学和考研辅导实践经验的总结。这本书不仅可作为硕士研究生入学考试应试者的复习用书,也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的高等院校学生的参考书。

作为广大考研学生的“老”朋友,我十分高兴地向大家推荐这本具有较高实用价值的图书,相信对广大考生考研数学备考会有一定帮助。

清华大学数学科学系

胡金德

2006 年 2 月



前言

2006 年国家教育部对硕士研究生入学考试数学大纲进行了修订,大纲变动不大,但也增加了一些新知识点,这对考生的要求进一步增强。新的变化、新的要求,使数学在考研复习中的重要地位更加令人不敢忽视。一边是考试要求的不断提高,一边是众多学子因为数学分数过低而含泪折戟、败走麦城。数学,越来越成为广大考生在考研路上难以逾越的一道坎、难以释怀的一个结。

历年研究生数学考试试题,全面体现和反映了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求,体现了考试的重点、难点,也充分展示了重点题型。虽然每年的考研试题不尽相同,但是考试的知识范围和结构基本相同。熟悉历年试题及其解题方法不仅可以进一步掌握考试内容、考试要求,而且可以分析和提炼出考核重点、掌握试题特点、提高解题能力。

本书是一本理工类、经济类考研学生备考数学的教材,由长期从事考研数学辅导和大学数学教学、研究的一线名师编写而成,在详细研究、系统整理历年研究生数学考试试题的基础上,根据试题类型和涉及的知识内容对其进行了分类,给出了典型的解题方法和常用技巧。

本书包含了 1993—2006 年研究生入学考试的全部试题,通过全面分析考研命题特点,合理设计编排模式和知识点出场顺序,把握主要知识点以及知识点间的关联特性,感悟常用的解题思路与方法,我们总结出复习的范围、重点和应试解题的思路与技巧,独具匠心设计、推出了这本高效、实用、新颖的考研数学复习教材《考研数学真题分类全解》,将给您的数学复习带来令人欣喜的显著效果和快速提升。

本书最大的特点是紧跟最新考研数学大纲,深刻领会大纲精髓,全面覆盖考研知识点,在研究诸知识点相互关系和认知规律的基础上,研习和解答历年考研数学真题,对真题进行科学分类和详细解答,使广大考生能够通过对真题的认真演练,揭开考研数学的神秘面纱,达到考试时胸有成竹、应对自如的境界。本书各栏目特点:

本章概括 简洁概括本章学习及考查内容,切中本章考试重点,使广大考生在备考复习的过程中目标明确,有的放矢。

考点分布 每节均采用直观、形象的图表形式,将 1993—2006 年考题考点、年份、分值分类列表,使考生了解历年试卷中试题在高等数学、线性代数、概率论与数理统计等三门课程中的分布情况和难度。

考纲预览 展示最新考试大纲要求,详尽解析考研数学最新大纲,便于考生统览全

章,高屋建瓴,把握复习方向。

真题详解 提供 1993—2006 年试题及解析,详尽解析每道例题,精选相应试题供考生进行实战演练,将例题按知识点分类为小节,使考生能系统地掌握考点辐射的各种题型,举一反三,并用灵活的经典真题来掌握各个知识点,做到真正意义上的知识点灵活掌握。

名师点拨 考研辅导一线名师为您点拨,权威揭示数学方法,使考生在回顾重点知识点的同时,深入了解该知识点的内容和命题方向。

方法综述 资深考研辅导专家智慧结晶,以便帮助考生掌握各种基本题型的解题思路和方法,找到解决问题的关键、技巧和规律。

需特别说明的是,本书考研真题的收集和整理,得到了清华大学、北京大学、中国人民大学、复旦大学、浙江大学、山东大学、武汉大学、吉林大学等校众多名师的协助。在此书出版之际,编者在此向他们一并表示由衷的感谢!

衷心希望我们精心打造的这本《考研数学真题分类全解》能对您有所裨益。相信本书会为备考 2007 年硕士研究生入学考试的学子带来好运!

编者

2006 年 2 月

Contents

考研数学真题分类全解



目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续	(1)
第一节 函 数	(1)
第二节 极 限	(2)
一、极限的定义与性质	(3)
二、利用极限的四则运算定理求极限	(4)
三、利用等价无穷小代换定理求极限	(5)
四、利用重要极限求极限	(7)
五、利用两个准则求极限	(9)
六、利用洛必达法则求极限	(12)
七、利用导数定义求极限	(15)
八、利用定积分定义求极限	(16)
九、利用泰勒公式求极限	(17)
第三节 无穷小比较	(18)
第四节 连 续	(23)
一、连续性	(23)
二、一元函数间断点的讨论	(26)
第二章 一元函数微分学	(29)
第一节 导数的定义	(29)
一、导数的定义	(29)
二、一元导函数的性质	(33)
第二节 一元函数的求导运算	(36)
一、一元函数求导的四则运算法则及复合函数求导法则	(37)
二、变限函数的导数	(38)
三、隐函数求导公式	(39)
四、参数方程求导公式	(41)
五、一元函数的高阶导数	(42)
六、一元函数的微分	(43)
第三节 平面曲线的切线与法线	(44)
第四节 微分中值定理·泰勒定理	(49)
一、微分中值定理	(49)

二、泰勒定理及其应用	(56)
第五节 函数的单调性·极值·最大、最小值	(59)
一、有关一元函数的单调性	(59)
二、利用单调性证明不等式	(61)
三、一元函数求极值	(65)
四、求最大、最小值	(68)
五、最大、最小值在经济学中的应用	(69)
第六节 函数作图	(73)
一、曲线的凹凸性与拐点	(73)
二、渐近线	(74)
第七节 方程求根	(78)
第三章 一元函数积分学	(81)
第一节 不定积分	(81)
一、不定积分的换元法	(81)
二、不定积分的分部积分法	(84)
三、有理分式函数的不定积分	(87)
第二节 定积分	(88)
一、定积分的性质	(88)
二、求定积分表达式	(91)
三、利用对称性计算定积分	(93)
四、定积分的换元积分法	(94)
五、定积分的分部积分法	(95)
第三节 定积分应用	(98)
一、求平面图形的面积	(98)
二、求曲线的弧长	(102)
三、求已知平行截面空间立体的体积	(103)
四、求旋转体的体积	(103)
五、求旋转体的表面积	(109)
六、定积分的物理应用	(110)
七、求平均值	(112)
第四节 广义积分	(113)
一、无穷限的广义积分	(113)
二、无界函数的广义积分	(115)
第四章 空间解析几何	(118)
一、向量代数	(118)
二、空间解析几何	(118)
第五章 多元函数微分学	(121)
第一节 偏导数的定义及计算	(121)
一、多元函数求极限	(121)
二、偏导数的定义	(122)

三、偏导数的运算法则	(122)
四、多元函数的二阶偏导数	(123)
五、多元隐函数求导	(126)
六、全微分	(128)
第二节 空间曲线的切线、法平面及空间曲面的切平面、法线	(131)
第三节 多元函数的极值·最大值、最小值	(133)
一、多元函数的极值	(133)
二、多元函数的最大值、最小值	(135)
三、多元函数极值在经济学上的应用	(137)
第四节 方向导数与梯度	(139)
第六章 多元函数积分学	(142)
第一节 重积分	(142)
一、重积分的性质	(142)
二、利用直角坐标计算二重积分	(144)
三、利用极坐标计算二重积分	(147)
四、三重积分的计算	(153)
五、重积分的应用	(154)
第二节 曲线积分	(156)
一、对弧长的曲线积分	(156)
二、对坐标的曲线积分	(157)
三、曲线积分与路径无关的条件	(160)
第三节 曲面积分	(163)
一、对面积的曲面积分	(163)
二、第二类曲面积分	(165)
第七章 无穷级数	(169)
第一节 常数项级数	(169)
一、正项级数的敛散性	(169)
二、正项级数求和	(172)
三、任意项级数的敛散性	(173)
第二节 幂级数	(178)
一、求幂级数的收敛半径和收敛区间	(178)
二、幂级数求和	(180)
第三节 傅立叶级数	(186)
一、傅立叶级数	(187)
第八章 常微分方程	(189)
第一节 一阶微分方程	(189)
一、变量可分离方程	(189)
二、齐次微分方程	(193)
三、一阶线性微分方程	(195)
四、伯努利方程	(200)

五、全微分方程	(201)
六、其他类型的一阶微分方程	(201)
第二节 可降阶的高阶微分方程	(203)
第三节 二阶常系数线性微分方程	(206)
一、微分方程解的结构	(206)
二、二阶常系数齐次线性微分方程	(207)
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	(208)
四、高阶常系数线性微分方程	(211)
五、欧拉方程	(212)
第四节 差分方程	(213)

第二篇 线性代数

第一章 行列式	(215)
第一节 数字型行列式	(215)
第二节 抽象型行列式	(219)
第二章 矩 阵	(223)
第一节 矩阵的各种运算	(223)
一、运算规律	(223)
二、矩阵的幂运算	(224)
三、矩阵的初等变换	(225)
四、有关 A^* 的计算	(227)
第二节 矩阵的逆	(229)
一、数字型矩阵求逆	(229)
二、逆矩阵定义及抽象矩阵求逆	(231)
三、求逆综合题	(231)
四、解矩阵方程	(233)
第三节 矩阵的秩	(236)
一、数字型矩阵求秩	(237)
二、抽象矩阵求秩	(237)
三、伴随矩阵的秩	(239)
第三章 向 量	(241)
第一节 向量的线性相关与线性无关	(241)
一、向量的运算	(241)
二、向量组的线性相关与线性无关	(242)
第二节 向量的线性表示	(246)
第三节 向量组的极大无关组与秩	(250)
一、向量组的极大无关组	(251)
二、向量组的秩	(252)
三、向量组的等价	(254)

第四节 向量空间	(255)
第四章 线性方程组	(258)
第一节 齐次线性方程组	(258)
一、 $AX=0$ 有非零解的条件	(258)
二、 $AB=0$	(259)
三、齐次线性方程组的基础解系	(260)
四、求齐次线性方程组的通解	(262)
第二节 非齐次线性方程组	(266)
一、非齐次线性方程组有解的条件	(267)
二、非齐次线性方程组求惟一解	(269)
三、非齐次线性方程组解的结构	(271)
四、求非齐次线性方程组的通解	(273)
第三节 方程组的同解与公共解	(279)
一、有关齐次线性方程组的同解	(279)
二、齐次线性方程组的公共解	(280)
三、非齐次线性方程组的公共解	(282)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(284)
第一节 矩阵的特征值与特征向量	(284)
一、求数值型矩阵的特征值	(284)
二、求抽象矩阵的特征值	(285)
三、有关特征向量的讨论	(286)
四、求特征值、特征向量的综合题	(287)
第二节 矩阵的相似对角化	(291)
一、基本概念题	(291)
二、综合计算题	(292)
第三节 实对称矩阵的相似对角化	(299)
第六章 二次型	(306)
第一节 二次型化为标准形	(306)
一、基本概念	(306)
二、二次型化为标准形	(307)
三、已知二次型化为标准形,反求参数	(308)
第二节 正定二次型	(312)

..... 第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件及其概率	(316)
第一节 随机事件与概率基本公式	(316)
一、事件的表示及关系	(316)
二、古典概率	(317)
三、概率运算性质及基本公式	(317)

四、全概率公式和贝叶斯公式	(318)
第二节 事件的独立性	(320)
第二章 随机变量及其概率分析	(324)
第三章 多维随机变量及其概率分布	(330)
第一节 多维离散型随机变量	(330)
第二节 多维连续型随机变量	(334)
第四章 随机变量的数字特征	(341)
第一节 数学期望与方差	(341)
一、有关重要分布的数字特征的题目	(341)
二、利用公式及性质求数学期望与方差	(342)
三、随机变量函数的数学期望与方差	(343)
四、关于数学期望的应用题	(347)
第二节 协方差与相关系数	(351)
第五章 大数定律和中心极限定理	(360)
一、切比雪夫不等式	(360)
二、大数定律	(361)
三、中心极限定理	(361)
第六章 数理统计的基本概念	(363)
一、判断抽样分布及确定参数	(363)
二、求统计量的数字特征	(365)
三、求样本容量	(366)
第七章 参数估计	(368)
一、点估计	(368)
二、区间估计	(373)
第八章 假设检验	(375)

第一章 函数·极限·连续

本章概括

函数是微积分讨论的主要对象,它以极限理论为基础,在研究函数时我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数关系的性质,所以应该用运动变化的观点来掌握函数.极限与函数的连续性理论是微积分的基础,如何用已知的、可求的来逼近未知的、要求的,用有限来逼近无限,在无限变化的过程中考查变量的变化趋势,从有限过渡到无限,这是本章需掌握的基本思想.

第一节 函数



考点分布

分值 内容	年份							
	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	
函数	数学一							
	数学二				3			
	数学三							
	数学四							
分值 内容	年份							
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	
函数	数学一							
	数学二		3					
	数学三				4			
	数学四				4			

考纲预览

最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲对本节的要求是

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数概念.

纵观自 1993 年至今的历年考研数学试题,我们发现有关函数的考查有两种情况:一是直接讨论分段函数或复合抽象函数的表达式,二是在综合计算题中使用有关函数的四大特征(有界性、单调性、奇偶性和周期性).

作为备考硕士研究生入学考试的考生复习数学课程来讲,首先要做的就是对历年来的考研真题进行研究,找出规律,然后在此基础上进行拓展,以达到掌握重点、轻取高分的目的.

真题详解

1. (1997203) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}, f(x)$
- $= \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

$$(C) \begin{cases} 2-x^2, x < 0 \\ 2-x, x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} 2+x^2, x < 0 \\ 2+x, x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } g[f(x)] &= \begin{cases} 2-f(x), f(x) \leq 0 \\ f(x)+2, f(x) > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2+x, x \geq 0 \\ x^2+2, x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2+x^2, x < 0 \\ 2+x, x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

故应选(D).

【名师点拨】本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程. 先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数, 再解不等式 $f(x) \leq 0$ 与 $f(x) > 0$, 最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

2. (2001203) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于_____.

(A) 0

(B) 1

$$(C) \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

解: 由 $f[f(x)] = 1$ 得 $f\{f[f(x)]\} = 1$
故应选(B).

3. (2004304, 2004404) 函数 $f(x) =$

$$\frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} \text{ 在下列哪个区间内有界}$$

(A) $(-1, 0)$

(B) $(0, 1)$

(C) $(1, 2)$

(D) $(2, 3)$

解: 当 $x \neq 0, 1, 2$ 时, $f(x)$ 连续,

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界.

故应选(A).

【名师点拨】一般地, 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界; 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

方法综述

1. “复合”是函数的一种基本运算, “复合”问题是有关函数表达式的重要问题之一. 主要题型为

(1) 已知 $f(x), g(x)$, 求 $f[g(x)]$. 这类问题中要特别注意分段函数的复合, 采取的方法一般应按照由自变量开始, 先内层后外层的顺序逐次复合.

(2) 设 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为已知函数, 已知 $f(x)$ 求 $g(x)$, 或已知 $g(x)$ 求 $f(x)$. 这类问题是讨论反函数的问题.

2. 本节中我们应特别注意函数四大特性的讨论, 这类问题常用定义来解题.

第二节



极限

考点分布

分 值 内 容		年 份						
		1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
极 限	数学一	8	14	6	8	3	9	3
	数学二	5	6	3	9	8	11	15
	数学三	15	3	5	3	6	3	
	数学四	10	15	3		6	6	3

年份	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
数学一				8		5	16
数学二	12	3	18	8	14	11	12
数学三	3	6	8		12	12	4
数学四	6	6	8	4	12	12	4

考纲预览

最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲对本节的要求是

1. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

2. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,会应用两个重要极限.

3. 会应用等价无穷小代换定理求极限.

本节的重点内容是极限,我们既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件,又要能正确求出各种极限.求极限的方法很多,从真题详解中不难看出.

真题详解

一、极限的定义与性质

4. (1999203)“对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的_____.

- (A) 充分条件但非必要条件
- (B) 必要条件但非充分条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既非充分条件又非必要条件

解:由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义得“对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq \varepsilon_1$ ”.显然可推导出“对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$.”

反过来,若有“对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”,则对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$ (不妨设 $0 < \varepsilon_1 < 1$, 当 $\varepsilon_1 > 1$ 时, 取 $\varepsilon_1, 0 < \varepsilon_1 < 1 < \varepsilon_1$, 代替即可), 取 $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_1 > 0$, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon < \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$, 令 $N_1 = N - 1$, 则满足“对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq \varepsilon_1$ ”.

可见上述两种说法是等价的.

故应选(C).

【名师点拨】数列极限定义中有“任意小”和“无限大”两个术语,二者均不是确定的值,至于它们用什么符号表示并不重要,应注意 2ε 同样是一个无穷小量.

5. (2000303, 2000403) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ _____.

- (A) 存在且等于零
- (B) 存在但不一定为零
- (C) 一定不存在
- (D) 不一定存在

解:若取 $\varphi(x) = x, f(x) = x + e^{-|x|}, g(x) = x + 2e^{-|x|}$. 此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在;若取 $\varphi(x) = 0, f(x) = e^{-|x|}, g(x) = 2e^{-|x|}$, 此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 存在.

故应选(D).

6. (1998203) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$,

则下列断言正确的是_____.

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散
- (B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
- (C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小
- (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

解:(A), (B) 显然不对. 若 x_n 有界, 且 y_n 为无穷小, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 但反之不一定. 所以(C) 也不对. (D) 正确. 因为, 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$. 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}} = 0$. 所以必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

故应选(D).

7. (2003104, 2003204) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有_____.

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立
- (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
- (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在
- (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

解: 取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{n}{2}, (n=1, 2, \dots)$

则选项(A)、(B)、(C) 均可排除.

对于选项(D), 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = 0,$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

故应选(D).

【名师点拨】

为了正确而迅速地解答选择题, 首先要对题意和备选项进行整体的对比考查, 弄清题目的考查目标, 从题干和备选项中获得解决问题的充分信息, 其次选择适当的解题方法, 下面归纳几种解题方法, 供读者参考.

直接法: 直接从题目的已知条件出发, 经过严密的推导、合理的运算, 从而得出结果和判断的方法. 其选择过程是先计算, 然后将计算的结果与备选项对照, 找到正确选项. 当题目中给出已知条件, 备选答案列出所需求的结果时, 一般首先考虑直接法.

验证法: 把可供选择的各备选项代入题目中的已知条件或将题干中的条件代入备选项进行验算, 从而得到正确选项的方法.

排除法: 又叫筛选法, 通过找出已知和结论的矛盾, 用特例或特殊值验证或举出反例等方法, 排除错误选项, 从而得到正确选项的方法.

图象法: 通过画出直观的几何图形, 帮助分析, 便于做出正确的选择的方法.

每种方法都不是孤立的, 有时同一试题可用多种方法求解, 有时需借用几种方法综合求解.

二、利用极限的四则运算定理求极限

$$8. (1993503) \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\dots+n} - \sqrt{1+2+\dots+(n-1)}] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\dots+n} - \sqrt{1+2+\dots+(n-1)}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+2+\dots+n} + \sqrt{1+2+\dots+(n-1)}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故应填 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. (1999403) 设函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$,

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\dots f(n)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \ln[a^1 \cdot a^2 \cdot \dots \cdot a^n]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \ln a = \frac{1}{2} \ln a$$

故应填 $\frac{1}{2} \ln a$.

$$10. (1993305) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+100} + x)$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x}{(\sqrt{x^2+100} - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}} - 1}$$

$$= -50$$

【名师点拨】 本题考查求极限的基本方法和极限的四则运算法则. 首先进行分子有理化, 为使用四则运算法则对分子分母同除 x 时, 应注意 $x < 0$, 故放到根号中时应注意符号.

$$11. (1997205) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1} + x + 1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$$

解: 原式

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + \sin x} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}} (\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x})}$$

$$= 1$$

$$12. (1999205) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解:原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x) - x]} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-x} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

【名师点拨】含有根式函数的极限问题,一般应先有理化,然后再用四则运算法则、等价无穷小代换以及洛必达法则求极限,求极限过程中,先利用等价无穷小代换可使计算简单,另外非零因子项的极限要先计算出来.如本题有理化后,应先把 $\frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$ 的极限求出,再用洛必达法则计算就简便多了.

13. (2001203) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$\begin{aligned}\text{解:原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{(x+2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)} \\ &\quad \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

故应填 $-\frac{\sqrt{2}}{6}.$

三、利用等价无穷小代换定理求极限

14. (2004304, 2004404) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b)$

$= 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:由 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x (\cos x - b) = 0$

知 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$

从而 $a = 1.$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = 1 - b = 5$

得 $b = -4.$

故应填 $1, -4.$

【名师点拨】讨论极限的问题,首先要确定极限的类型,本题为“ $\frac{0}{0}$ ”型,由此可确定参数的值.

15. (2005304, 2005404) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} =$

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = 2.$

故应填 $2.$

16. (1994103, 1994203) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) =$

解:原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x \sin x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$

故应填 $\frac{1}{6}.$

17. (1995305) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})}$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{2}x \cdot (1 + \sqrt{\cos x})}$

$= \frac{1}{2}$

故应填 $\frac{1}{2}.$

18. (1997103, 1997203) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}$

$= \underline{\hspace{2cm}}.$

解:原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$