范畴论

贺伟 著

科学出版社
www.sciencep.com

范 畴 论

贺 伟 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是一本关于范畴论的基本内容和方法，同时介绍现代范畴论的一些最新发展的书籍. 本书的前 3 章是范畴论的基础内容，包括范畴与函子、极限理论、函子的伴随性与模结构；第 4 章和第 5 章分别介绍了加法范畴、Abel 范畴及层范畴等内容. 书中使用的是现代范畴论通用的概念和术语，但是在对一些基本概念和理论的处理过程中，尝试使用比较简洁的方法，避免繁琐的论述.

本书适合数学或计算机专业的高年级本科生和研究生及与范畴论有关的科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

范畴论/贺伟著. —北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-017096-2

I. 范… II. 贺… III. 范畴论 IV. O154.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 028788 号

责任编辑：张 扬 贾瑞娜／责任校对：张 琪

责任印制：安春生／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006 年 7 月第一次印刷 印张：7 1/2

印数：1—2 500 字数：134 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

范畴论产生于 20 世纪 40 年代对同调代数的研究. 1942 年, Eilenberg 和 Macl-ane 引入了范畴、函子和自然变换的概念用来描述某些“自然”同构的概念, 但是这个时期范畴论仅仅被作为研究同调代数的一种方法, 还没有发展成为一门独立的学科. 1956 年, Cartan 与 Eilenberg 的著作《同调代数》使人们意识到许多关于模的有限图表的命题其实在一般的范畴中仍然成立, 并且由对偶原理这些命题的对偶命题仍然成立. 1955 年, Buchsbaum 关于 Abel 范畴的研究 [6] 和随后 Grothendieck 的论文 [18] 标志着范畴论作为一门独立的学科开始得到迅速的发展. 现在范畴论已经发展成为一门具有广泛应用的新理论. 在现代数学研究中, 范畴论为日趋多样的数学分支以及各个分支之间多样化的联系提供了一种统一的简洁的“符号语言”, 目前已经在代数学、拓扑学、代数几何学等领域有着深刻的应用. 在逻辑学中, 以范畴论为基础的 Topos 理论正在发展成为现代数学全新的统一的基础. 在理论计算机科学研究中, 范畴论在函数程序指令、程序语义学和程序逻辑学等领域有着广泛的应用.

本书的目的是给读者提供一本关于范畴论的基本内容和方法的基础读物, 同时能够介绍现代范畴论的一些最新发展. 作者在书中使用的是现代范畴论通用的概念和术语, 但是在对一些基本概念和理论的处理过程中, 作者尝试使用比较简洁直接的方法, 避免烦琐的论述, 希望能够对初学者产生好的效果. 本书的前 3 章是范畴论的基础内容, 适合高年级本科生和研究生的教学以及科研人员对范畴论基础知识的需要, 第 4 章可供从事代数拓扑学尤其是同调代数研究的研究生和科研人员学习和参考, 第 5 章既可以为从事代数几何的科研人员参考, 同时也可为希望进一步学习 Topos 理论的读者提供层论方面的预备知识.

本书的初稿是作者于 2004 年 9 月至 2005 年 9 月在英国剑桥大学数学中心访问期间完成的, 作者感谢 Peter Johnstone 教授的邀请, 感谢他在本书写作过程中所提供的热情帮助和有益的建议. 作者同时要感谢四川大学刘应明院士多年来的鼓励和教诲, 感谢罗懋康教授多年来的帮助, 感谢张德学教授提出的有益建议. 本书的初稿曾在南京师范大学数学系拓扑学专业 04 级和 05 级的硕士生和博士生中试讲, 听讲的研究生认真发现了许多打印错误, 并提出了一些文字修改意见, 卢涛同志绘制了全书的插图, 作者在此表示感谢. 由于本书是第一本中文版的范畴论读物, 许多名词的中文翻译也是第一次出现, 希望读者能够提出批评意见以便进一步改进. 由于作者的水平有限, 书中难免会有失误和不足, 诚挚希望国内同仁和广大读者批评指正.

作　者

2006 年 4 月于南京师范大学

符 号 说 明

ob$\mathcal{C}$	范畴 $\mathcal{C}$ 的全体对象
$\mathcal{C}(A,B)$	对象 A 到 B 的态射集
Mor$\mathcal{C}$	范畴 $\mathcal{C}$ 的全体态射
dom(f)	态射 f 的定义域
cod(f)	态射 f 的值域
1_A	对象 A 到自身的单位态射
$1_\mathcal{C}$	范畴 $\mathcal{C}$ 到自身的单位函子
Set	集合范畴
Gp	群范畴
AbGp	Abel 群范畴
Rng	环范畴
Mod_R	R 模范畴
Top	拓扑空间范畴
Haus	Hausdoff 拓扑空间范畴
TopGp	拓扑群范畴
Diff	可微流形范畴
Htop	拓扑同伦范畴
Top*	点拓扑空间范畴
Rel	关系范畴
Mat_R	实数域上的矩阵范畴
Poset	偏序集构成的范畴
Frm	frame 范畴
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	范畴 $\mathcal{C}$ 的对偶范畴
$\mathcal{C}/B$	B 上的切片范畴
$B/\mathcal{C}$	B 下的余切片范畴
Cat	小范畴构成的范畴
$[\mathcal{C},\mathcal{D}]$	范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的函子范畴
$C(A,-)$	关于 A 的态射函子
$C(-,B)$	关于 B 的反变态射函子
Sub(B)	B 的子对象族
Quot(A)	A 的商对象族

Met	度量空间范畴
Idem	幂等算子范畴
Tors	扭群范畴
ATop	Alexandroff 拓扑空间范畴
SmGp	半群范畴
B^A	幂对象
UPS	完备格和保持定向上确界映射的范畴
$\ker(f)$	态射 f 的核
$\mathrm{coker}(f)$	态射 f 的余核
$A \oplus B$	对象 A 与 B 的双积
$\mathrm{im}(f)$	态射 f 的像
$\mathcal{C}^{\mathbb{T}}$	范畴 $\mathcal{C}$ 上的 $\mathbb{T}$ 代数范畴
Top_0	T_0 拓扑空间范畴
Tych	Tychonoff 拓扑空间范畴
$\Delta \downarrow D$	D 上的锥形范畴
$\Delta \uparrow D$	D 上的余锥形范畴
$e : A \times B^A \to B$	计值态射
$\mathrm{coim}(f)$	态射 f 的余像
$a \in^* A$	a 是 A 的伪元素
$a =^* a'$	a 与 a' 伪相等
$\Gamma(X)$	拓扑空间 X 上的开集格
$t\|_V$	t 在 V 上的限制
$\mathrm{Sh}(X)$	拓扑空间 X 上的层范畴
LH	拓扑空间与局部同胚映射范畴
Ω	子对象分类子
f_*	由 f 确定的定向层函子
f^*	由 f 确定的逆向层函子
$\mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}(X)}(1)$	常值层 1 在层范畴 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的子对象集
$A \downarrow G$	函子 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 和对象 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{A}$ 确定的态射范畴
$(F \dashv G) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	F 与 G 是一对伴随函子
$F(V \subseteq U) : F(U) \to F(V)$	限制映射
$(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	F 与 G 是一对伴随函子使得 $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to GF$ 是伴随单位, $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{B}}$ 是伴随的余单位
$(\mathcal{C}, J)$	范畴 $\mathcal{C}$ 赋予 Grothendieck 拓扑 J 的场

目　录

第 1 章　范畴与函子

1.1　范畴的定义

现代数学许多领域的研究都可以概括为对特定的数学对象及这些对象之间的映射的研究. 例如, 集合及集合之间的映射是集合论研究的主要对象, 群 (或环) 和群同态 (或环同态) 构成了群论 (或环论) 的主要研究对象, 拓扑空间及拓扑空间之间的连续映射构成了拓扑学的主要研究对象, 等等. 范畴的概念正是这些特定的数学对象和映射的概括和抽象.

定义 1.1.1　一个**范畴**(category)$\mathcal{C}$ 是由:

(1) 一族对象 (object)ob$\mathcal{C}$.

(2) 任意一对对象 A, B, 对应一个集合 $\mathcal{C}(A,B)$, 其元素称为 **态射** (morphism), 使得当 $A\neq A'$ 或者 $B\neq B'$ 时, $\mathcal{C}(A,B)$ 与 $\mathcal{C}(A',B')$ 不交.

组成, 满足下面条件:

(a) 复合运算律 (composition law): 若 $A,B,C\in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, $f\in\mathcal{C}(A,B)$, $g\in\mathcal{C}(B,C)$, 则存在唯一的 $gf\in\mathcal{C}(A,C)$, 称为 f 与 g 的复合.

(b) 结合律 (associativity): 若 $A,B,C,D\in\mathrm{ob}\mathcal{C}$, $f\in\mathcal{C}(A,B)$, $g\in\mathcal{C}(B,C)$, $h\in\mathcal{C}(C,D)$, 则有

$$h(gf)=(hg)f.$$

(c) 单位态射 (identity morphism): 每一个对象 A, 存在一个态射 $1_A\in\mathcal{C}(A,A)$ 使得对任意的 $f\in\mathcal{C}(A,B)$ 及 $g\in\mathcal{C}(C,A)$ 有

$$f1_A=f,\qquad 1_Ag=g.$$

关于范畴的定义在一些文献中有着不同的表达形式. 一些文献中的范畴定义不要求任意两个对象之间的态射的全体是一个集合, 这样做主要是出于逻辑上的考虑 (不用预设任何集论模型). 但是作者认为从应用的角度来考虑, 我们的定义是恰当的.

在看一些范畴的例子之前, 我们先做一些记号上的约定. 我们用花体字母如 $\mathcal{D},\mathcal{C}$ 等表示范畴, 范畴中的对象用大写英文字母表示而态射用小写英文字母或小写希腊字母表示. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $\mathcal{C}$ 的态射的全体记作 Mor$\mathcal{C}$.

若 $A,B\in\mathrm{ob}\mathcal{C}, f\in\mathcal{C}(A,B)$, 类似于习惯上对映射的表示, 我们用一个箭头表示为 $f:A\to B$, 称 A 是 f 的定义域, B 为 f 的值域, 记作 $\mathrm{dom}(f)=A,\mathrm{cod}(f)=B$.

下面的一些范畴例子, 我们只给出对象和态射, 读者可以容易验证其满足范畴定义的条件.

例 1.1.2　集合范畴 Set(在某个给定的集合论模型中), 其对象为集合, 态射为映射.

例 1.1.3　群范畴 Gp, 其对象为群, 态射为群同态. 类似地我们有 Abel 群范畴 AbGp, 环范畴 Rng 和 R 模范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$.

例 1.1.4　拓扑空间范畴 Top, 其对象为拓扑空间, 态射为连续映射. 类似地有拓扑群范畴 TopGp, 其对象为拓扑群, 态射为连续的群同态. 可微流形为对象光滑映射为态射的范畴 Diff.

例 1.1.5　拓扑空间同伦范畴 Htop, 其对象为拓扑空间, 态射为连续映射的同伦等价类.

例 1.1.6　点拓扑空间范畴 Top^*, 其对象为序对 (X,x), 其中 X 是非空拓扑空间, $x \in X$, 态射为保点连续映射 ($f:(X,x) \to (Y,y)$ 称为一个保点连续映射当且仅当 $f:X \to Y$ 是连续映射并且满足 $f(x)=y$).

例 1.1.7　设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴. 以 $\mathcal{C}$ 的对象为对象, 以 $\mathcal{C}$ 的态射的反向为态射形成一个新范畴, 称为 $\mathcal{C}$ 的对偶, 记作 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$$\Big($即 $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A,B)$ 当且仅当 $f \in \mathcal{C}(B,A)\Big)$.

设 P 是一个关于范畴 $\mathcal{A}$ 的命题, 即命题 P 的条件和结论都是由范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象和态射构成. 如果将命题 P 中所有的态射反向, 则我们可以得到一个新的命题 P^*, 称之为命题 P 的对偶命题. 容易看出命题 P 关于范畴 $\mathcal{A}$ 成立当且仅当对偶命题 P^* 关于范畴 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 成立. 注意到对任意范畴 $\mathcal{A}$ 都有 $(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}=\mathcal{A}$ 成立, 我们有下面的对偶原理.

对偶原理 (duality principle)　设 P 是一个关于所有范畴的真命题, 则将命题 P 中所有的态射反向得到的新命题 P^* 也是一个关于所有范畴的真命题.

对范畴论中的任意一个命题 P, 我们有 $(P^*)^*=P$ 成立, 由对偶原理可知, 命题 P 成立当且仅当其对偶命题 P^* 成立. 因此对于范畴论中的任意一对对偶命题, 我们只需要证明其中一个命题成立, 另一个即成立.

例 1.1.8　设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$. 考虑 $\mathcal{C}$ 中以 B 为值域的态射 $f:A \to B$, 记作 (A,f). 我们可以构造一个以所有的 (A,f) 为对象的新范畴使得任意两个以 B 为值域的态射 $f:A \to B$ 和 $g:C \to B$, 态射 $h:(A,f) \to (C,g)$ 是指 $\mathcal{C}$ 中的态射 $h:A \to C$ 使得 $f=gh$, 即下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

这样得到的范畴称为 B 上的切片范畴 (slice category over B), 记作 $\mathcal{C}/B$. 对偶地我

们可以得到所谓的 B 下的余切片范畴 (coslice category under B), 记作 $B/\mathcal{C}$.

设 A, B 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象, $f: A \to B$. 如果存在态射 $g: B \to A$ 使得

$$gf = 1_A, \qquad fg = 1_B,$$

则称态射 f 是一个**同构**(isomorphism). 如果存在一个同构 $f: A \to B$, 则称 A 与 B 是**同构的对象**(isomorphic object). 容易验证同构是 ob$\mathcal{C}$ 上的一个等价关系.

例 1.1.9 设 $\mathcal{C}$ 是一个只有一个对象的范畴, 则 Mor$\mathcal{C}$ 在复合运算下是一个有单位元的半群. 反之设 G 是一个群, 如果将 G 自身看作唯一的对象, G 中的元素看作 G 到自身的态射, 则群 G 可以看作只有一个对象的范畴满足任意一个态射 f 都是一个同构.

例 1.1.10 关系范畴记作 Rel, 其对象是集合, 而态射 $f: X \to Y$ 是指一个二元关系 $f \subseteq X \times Y$, 态射 $f: X \to Y$ 与态射 $g: Y \to Z$ 的复合是态射 $gf = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y, (x,y) \in f, (y,z) \in g\}: X \to Z$.

例 1.1.11 如果一个范畴中的态射都是单位态射, 则称为离散范畴. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴满足任意两个对象 A 和 B, 集合 $\mathcal{C}(A,B)$ 最多只含有一个元素, 则态射箭头在 ob$\mathcal{C}$ 上定义了一个自反的, 传递的二元关系, 即一个预序关系. 反之, 给定集合 X 以及 X 上的一个预序关系 $\leqslant$, X 可以看作一个范畴使得对任意的 $x, y \in X$, 存在态射 $x \to y$ 当且仅当 $x \leqslant y$. 特别地每个偏序集可以看作一个范畴.

例 1.1.12 考虑以所有的自然数为对象. 对任意一对自然数 m, n, 一个态射 $f: m \to n$ 是指实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个 $m \times n$ 阶矩阵 (特别地单位态射 $1_n: n \to n$ 是 n 阶单位对角矩阵), 态射的复合即矩阵的乘积. 这样形成的范畴记作 $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$.

定义 1.1.13 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, 若范畴 $\mathcal{C}'$ 满足:

(a) ob$\mathcal{C}' \subseteq$ ob$\mathcal{C}$.

(b) $\mathcal{C}'(A,B) \subseteq \mathcal{C}(A,B)$; $A, B \in$ ob$\mathcal{C}$.

(c) $\mathcal{C}'$ 中的复合与 $\mathcal{C}$ 中的复合相同.

(d) $\mathcal{C}'$ 中的单位态射与 $\mathcal{C}$ 中的相同.

则称 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **子范畴** (subcategory). 进一步, 如果对子范畴 $\mathcal{C}'$ 中的任意两个对象 A, B, 都有 $\mathcal{C}'(A,B) = \mathcal{C}(A,B)$ 成立. 则称 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的 **满子范畴** (full subcategory).

例 1.1.14 任意范畴都有两个平凡的子范畴, 即空范畴和自身.

例 1.1.15 集合范畴 Set 是关系范畴 Rel 的子范畴, 但不是满子范畴.

例 1.1.16 Hausdorff 拓扑空间范畴 Haus 是拓扑空间范畴 Top 的满子范畴; Abel 群范畴 AbGp 是群范畴 Gp 的满子范畴; 拓扑群范畴 TopGp 是拓扑空间范畴 Top 的子范畴, 但不是满子范畴.

设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个范畴, 我们可以定义 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的乘积范畴 (product category) $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 如下:

$\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 中的对象是所有的序对 (A,B) 使得 $A\in \mathrm{ob}\mathcal{C}, B\in\mathrm{ob}\mathcal{D}$, $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 的一个态射 $(f,g):(A,B)\to(A',B')$ 是一个序对 (f,g) 使得 $f:A\to A'$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射而 $g:B\to B'$ 是 $\mathcal{D}$ 中的态射. 态射的复合按逐点复合, 则不难验证 $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 是一个范畴.

如果范畴 $\mathcal{C}$ 的全体对象 ob$\mathcal{C}$ 是一个集合, 则称 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴 (small category). 例 1.1.9 和例 1.1.12 中的范畴都是小范畴, 而例 1.1.2~ 例 1.1.6 都不是小范畴.

练习 1.1

1. 设 X 是一个非空集合, R 是 X 上的一个自反的, 传递的二元关系. 对任意的 $x,y\in X$, 定义

$$x\to y \iff (x,y)\in R$$

证明以 X 中的元素为对象, 以上面定义的箭头为态射构成一个范畴.

2. 证明以所有的偏序集为对象, 以保序映射为态射构成一个范畴 Poset.

3. 如果一个完备格 L 满足对任意的 $a\in L$ 和 $\{a_i\mid i\in I\}\subseteq L$, 下面的分配律

$$a\wedge\bigvee_{i\in I}a_i=\bigvee_{i\in I}a\wedge a_i$$

成立, 则称 L 是一个**frame**. 若 L 与 M 是 frame, 映射 $f:L\to M$ 保持有限交和任意并, 则称 f 是一个**frame 映射**. 证明以所有的 frame 为对象, 以 frame 映射为态射构成一个范畴 Frm.

4. 一个链复形是一个由 R 模和 R 模同态构成的序列:

$$\cdots\to M_n\xrightarrow{d_n}M_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}M_{n-2}\to\cdots\to M_0\xrightarrow{d_0}M_{-1}\to\cdots$$

满足 $d_{i-1}d_i=0$ 对任意的整数 $i\in\mathbb{Z}$ 成立, 记作 $(M_i,d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. 链复形 $(M_i,d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 到链复形 $(M_i',d_i')_{i\in\mathbb{Z}}$ 的一个链复形映射 $f=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是指一列 R 模同态 $f_i:M_i\to M_i'$, $i\in\mathbb{Z}$ 使得 $f_{i-1}d_i=d_i'f_i$ 对任意的 $i\in\mathbb{Z}$ 成立, 即下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & M_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_n' \arrow[r, "d_n'"] & M_{n-1}' \arrow[r, "d_{n-1}'"] & M_{n-2}' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_0' \arrow[r, "d_0'"] & M_{-1}' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

证明以所有的链复形为对象, 以链复形映射为态射构成一个范畴.

1.2 函 子

在范畴论中, 我们不仅关注对象, 而且更关注对象之间的对应关系. 这一节我们来介绍范畴之间的"映射"即函子.

定义 1.2.1　设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是范畴. 一个**函子**(functor)$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 由两个映射组成：

$$\mathrm{ob}\mathcal{C}\to\mathrm{ob}\mathcal{D}:A\mapsto F(A),$$

$$\mathrm{Mor}\mathcal{C}\to\mathrm{Mor}\mathcal{D}:f\mapsto F(f).$$

满足 $\mathrm{dom}(F(f))=F(\mathrm{dom}(f)),\mathrm{cod}(F(f))=F(\mathrm{cod}(f)),F(1_A)=1_{F(A)}$, 并且若 $\mathrm{dom}(g)=\mathrm{cod}(f)$ 则 $F(gf)=F(g)F(f)$.

例 1.2.2　任意范畴 $\mathcal{C}$ 都存在一个到自身的单位函子 $1_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 使得在对象和态射上的对应都是恒同的.

例 1.2.3　群范畴 Gp(拓扑空间范畴 Top, 环范畴 Rng, R 模范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{R}}$ 等) 存在一个到集合范畴 Set 的遗忘函子 G, 使得 G 把每个群 (拓扑空间, 环, R 模等) 对应为所在的集合, 而把每个群同态 (连续映射, 环同态, R 模同态) 对应为自己.

类似地, 我们可以定义从环范畴到群范畴的遗忘函子 Rng→Gp, 从拓扑群范畴到拓扑空间范畴的遗忘函子 TopGp→Top.

例 1.2.4　对每个集合 X, 由 X 生成的自由群 $F(X)$ 具有性质：对任意的群 G, 及映射 $f:X\to G$, f 可以唯一地扩张为一个群同态 $F(X)\to G$. 给定集合 X 到集合 Y 的一个映射 $g:X\to Y$, 我们定义 $F(g):F(X)\to F(Y)$ 为复合 $ig:X\to Y\to F(Y)$ 的唯一扩张, 其中 $i:Y\to F(Y)$ 是包含映射. 这样我们就定义了一个从集合范畴到群范畴的函子 $F:\mathrm{Set}\to\mathrm{Gp}$, 称为自由群函子.

例 1.2.5　幂集函子：定义 $P:\mathrm{Set}\to\mathrm{Set}$ 为 $P(A)=2^A$, 若 $f:A\to B$, 则 $P(f):2^A\to 2^B$ 为 $P(f)(C)=f(C)$. 同样可以定义函子 $P^*:\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Set}$ 使得 $P^*(A)=2^A$, $P^*(f)(C)=f^{-1}(C)$.

一般地, 我们称一个函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**反变函子**(contravariant functor).

例 1.2.6　两个群 (看作范畴) 之间的函子就是群同态. 类似地两个偏序集 (看作范畴) 之间的函子就是保序映射.

例 1.2.7　设 G 是一个群, 看作只有一个对象的范畴, $F:G\to\mathrm{Set}$ 是一个函子. 则函子 F 等于给定了一个集合 $F(*)$ 以及对每个 $g\in G$, 一个双射 $F(g):F(*)\to F(*)$ 满足 $F(gh)=F(g)F(h)$. 因此函子 F 相当于给出了 G 的一个置换表示.

例 1.2.8　每个点拓扑空间 (X,x) 对应为基本群 $\pi_1(X,x)$ 确定了一个函子 $\pi_1:Top^*\to\mathrm{Gp}$.

例 1.2.9　设范畴 $\mathcal{C}'$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的子范畴, 则有一个从 $\mathcal{C}'$ 到 $\mathcal{C}$ 的包含函子 $\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$.

设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子. 如果对 $\mathcal{C}$ 中的任意一对对象 A,B 和 $f,g\in\mathcal{C}(A,B)$ 都有

$$F(f)=F(g)\Longrightarrow f=g,$$

即 F 在 $\mathcal{C}(A,B)$ 上的限制

$$\mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(A),F(B))$$

是一个单射, 则称函子 F 是一个 **局部单的函子** (faithful functor).

如果对任意的 $g \in \mathcal{D}(F(A),F(B))$, 存在 $f \in \mathcal{C}(A,B)$ 使得 $F(f)=g$, 即 F 在 $\mathcal{C}(A,B)$ 上的限制

$$\mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(A),F(B))$$

是一个满射, 则称 F 是一个 **局部满的函子** (full functor).

例 1.2.10 遗忘函子 $G:\mathrm{Gp}\to\mathrm{Set}$ 是局部单的但不是局部满的.

例 1.2.11 自由群函子是一个局部单同时也是局部满的函子.

例 1.2.12 设 X 是一个 T_0 拓扑空间, 我们可以在 X 上定义一个偏序关系:

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow \{x\}^- \subseteq \{y\}^-,$$

这里 $\{x\}^-$ 表示单点集 $\{x\}$ 的闭包, 记偏序集 $(X,\leqslant)$ 为 $P(X)$. 若 $f:X\to Y$ 是 T_0 拓扑空间之间的连续映射, 则不难验证 $f:P(X)\to P(Y)$ 是一个保序映射. 这样我们就定义了一个从 T_0 拓扑空间范畴 Top_0(即拓扑空间范畴 Top 中以 T_0 拓扑空间为对象的满子范畴) 到偏序集范畴 Poset 的一个局部单函子 $P:\mathrm{Top}_0\to\mathrm{Poset}$.

例 1.2.13 任意一个包含函子都是局部单的, 而一个包含函子是局部满的当且仅当对应的子范畴是一个满子范畴.

命题 1.2.14 设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}, G:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 是函子, 定义 $GF:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ 使得对 $\mathcal{A}$ 中的任意一个对象 A,

$$A \mapsto G(F(A)),$$

对 $\mathcal{A}$ 中的任意一个态射 $f:A\to B$,

$$(f:A\to B)\mapsto (G(F(f)):G(F(A))\to G(F(B))),$$

则 GF 是一个函子.

由命题 1.2.14, 我们知道函子也可以进行复合运算, 因此我们自然地想是否可以定义以所有范畴为对象, 函子为态射的范畴. 但遗憾的是一般地两个范畴之间的函子的全体未必是一个集合. 但是当我们把目光限制在所有的小范畴上时, 我们的确可以得到一个以所有小范畴为对象以小范畴之间的函子为态射的范畴 Cat.

定义 1.2.15 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个函子. 如果存在函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 使得 $GF=1_{\mathcal{C}}, FG=1_{\mathcal{D}}$, 则称 F 是范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的一个**同构** (isomorphism). 如果存在范畴 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的同构 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, 则称范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是**同构的**.

显然同构形成了范畴之间的一个等价关系. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 与范畴 $\mathcal{D}$ 是同构的, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个同构, 则 F 关于对象的映射和关于态射的映射都存在逆映射, 因此

这两个映射都是一一到上的. 反之如果 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个局部单且局部满的函子同时 F 在对象上是一一对应的, 则容易定义函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 使得 $GF=1_{\mathcal{C}}, FG=1_{\mathcal{D}}$. 因此我们可以得出函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个同构当且仅当 F 是一个局部单且局部满的函子同时 F 在对象上是一一对应的, 这说明相互同构的范畴具有完全相同的结构.

例 1.2.16　设 $(X,\leqslant)$ 和 $(Y,\leqslant)$ 是两个偏序集. 则 $(X,\leqslant)$ 和 $(Y,\leqslant)$ 作为范畴同构当且仅当它们是序同构的. 类似地, 两个半群 G 和 Q 看作范畴是同构的当且仅当它们是半群同构的.

例 1.2.17　集合范畴 Set 在单点集 $\{*\}$ 下的余切片范畴 $\{*\}/\mathrm{Set}$ 同构于点集范畴 (即对象为序对 (X,x) 其中 X 是集合, $x\in X$, 态射为保点映射).

若函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 在态射上的限制 $\mathrm{Mor}\mathcal{C}\to\mathrm{Mor}\mathcal{D}$ 是一个单射, 则称 F 是一个**嵌入**.

容易验证 F 是一个嵌入当且仅当 F 是局部单函子并且 F 在对象上的对应是一个单射.

例 1.2.18　定义函子 $D:\mathrm{Set}\to\mathrm{Top}$,

$$(f:X\to Y)\mapsto(f:D(X)\to D(Y)),$$

这里 $D(X)$ 表示 X 赋予离散拓扑的拓扑空间. 则 D 是一个局部满的嵌入.

我们称一个从两个范畴的乘积范畴到另一个范畴的函子为 **双函子** (bifunctor). 双函子在范畴论中广泛存在, 例如由乘积范畴我们可以自然地产生两个双函子:

$$P_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C},(A,B)\mapsto A,(f,g)\mapsto f,$$

$$P_{\mathcal{D}}:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{D},(A,B)\mapsto B,(f,g)\mapsto g.$$

我们称之为射影函子. 射影函子具有下面的“万有性质”:

对任意的范畴 $\mathcal{E}$ 及函子 $R:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 和 $T:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$, 存在唯一的函子 $F:\mathcal{E}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 使得 $P_{\mathcal{C}}F=R, P_{\mathcal{D}}F=T$, 即下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\times\mathcal{D} \arrow[r, "P_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "P_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{C} \\
\mathcal{D} & \mathcal{E} \arrow[l, "T"] \arrow[u, "R"'] \arrow[ul, dotted, "F"']
\end{tikzcd}$$

练习 1.2

1. 设 G 是一个 Abel 群, 看作一个范畴. 证明加法运算 $+:G\times G\to G$ 是一个双函子.

2. 设 $\mathbb{Z}$ 是整数加法群. 对任意的群 G, 记 $(\mathbb{Z}, G)$ 为整数加法群 $\mathbb{Z}$ 到群 G 的群同态构成的集合. 若 $h: G \to G'$ 是一个群同态, 记

$$(\mathbb{Z}, f): (\mathbb{Z}, G) \to (\mathbb{Z}, G'), \qquad p \mapsto hp,$$

证明 $(\mathbb{Z}, -): \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$ 是一个函子.

3. 设 X 是一个拓扑空间, 记 $\Gamma(X)$ 为 X 的开集格. 若 $f: Y \to X$ 是一个连续映射, 记 $\Gamma(f): \Gamma(X) \to \Gamma(Y)$, $\Gamma(f)(U) = f^{-1}(U)$. 证明任意 $\Gamma(X)$ 在包含序关系下是一个 frame, 从而 $\Gamma: \mathrm{Top} \to \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}}$ 定义了一个从拓扑空间范畴 Top 到 frame 范畴 Frm 的反变函子.

4. 设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个函子. 证明存在函子 $G: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $H: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 使得:

(1) $F = HG$.

(2) G 是局部满的而 H 是一个嵌入.

5. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 满足对任意两个对象 $A, B \in \mathrm{ob}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(A, B) \neq \emptyset$, 则称范畴 $\mathcal{C}$ 是**连通的**. 记 $\mathcal{T}$ 为只有一个对象和一个态射的范畴, 证明 $\mathcal{C}$ 是一个连通范畴当且仅当 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{T}$ 的唯一函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{T}$ 是局部满的.

6. 证明从拓扑空间范畴 Top 到集合范畴 Set 的遗忘函子 $F: \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ 是局部单的但不是一个嵌入.

7. 证明任意一个函子保持对象的同构, 即把同构的对象对应为同构的对象.

1.3 自然变换

上一节中我们介绍的函子是用来研究范畴之间的对应关系, 这一节我们来讨论函子之间的对应关系, 我们称之为自然变换.

定义 1.3.1 设 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是范畴, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 与 $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是两个函子. 一个**自然变换**(natural transformation)$\alpha: F \to G$ 是一个映射 $\mathrm{ob}\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\mathcal{D}$:

$$A \mapsto (\alpha_A: F(A) \to G(A)), \qquad A \in \mathrm{ob}\mathcal{C},$$

使得对 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f: A \to B$, $G(f)\alpha_A = \alpha_B F(f)$ 成立, 即下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

如果自然变换 $\alpha: F \to G$ 满足对任意的 $A \in \mathrm{ob}\mathcal{C}, \alpha_A: F(A) \to G(A)$ 是一个同构, 则称 α 是一个**自然同构**(natural isomorphism).

命题 1.3.2 设 $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是函子, $\alpha : F \to G, \beta : G \to H$ 是自然变换, 则:

(1) $\beta\alpha : F \to H : A \mapsto (F(A) \xrightarrow{\beta_A\alpha_A} H(A))$ 是一个自然变换.

(2) $\alpha T : FT \to GT : B \mapsto (FT(B) \xrightarrow{\alpha_{T(B)}} GT(B))$ 是一个自然变换.

(3) $T\alpha : TF \to TG : A \mapsto (TF(A) \xrightarrow{T(\alpha_A)} TG(A)$ 是一个自然变换.

证明 我们只证 (1), (2) 和 (3) 的证明留给读者作为练习.

(1) 对 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f : A \to B$. 由于 α 和 β 都是自然变换, 故下面图表中左右两边的方形均交换, 因此外面的大方形仍然交换.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B) \arrow[r, "\beta_B"] & H(B)
\end{tikzcd}$$

□

由命题 1.3.2, 自然变换之间可以进行复合运算并且每个函子 F 到自身都存在一个单位自然变换 $1_F : F \to F$ 使得任意对象对应的态射都是一个单位态射. 因此如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都是小范畴, 则以范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的所有函子为对象, 以自然变换为态射可以形成一个范畴 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, 称为**函子范畴**.

例 1.3.3 设 $P : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ 是例 1.2.5 中定义的幂集函子. 对任意集合 A, 定义 $\beta_A : A \to P(A)$ 为 $x \mapsto \{x\}$. 若 $f : A \to B$, 我们有 $P(f)(\{x\}) = \{f(x)\}$, 即下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "f"'] & P(A) \arrow[d, "P(f)"] \\
B \arrow[r, "\beta_B"] & P(B)
\end{tikzcd}$$

因此 β 是一个自然变换 $1_{\mathrm{Set}} \to P$.

例 1.3.4 设 $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Gp}$ 是例 1.2.4 中定义的自由群函子, $G : \mathrm{Gp} \to \mathrm{Set}$ 是遗忘函子. 对任意的集合 X, 令 $\gamma_X : X \to GF(X)$ 是包含映射. 则对任意的集合映射 $f : X \to Y$, 下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "f"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(f)"] \\
Y \arrow[r, "\gamma_Y"] & GF(Y)
\end{tikzcd}$$

因此 $\gamma : 1_{\mathrm{Set}} \to GF$ 是一个自然变换.