□ 高等学校教材

竞赛数学
解题研究

第二版

张同君　陈传理　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

竞赛数学解题研究

第 二 版

张同君　陈传理　主编
编者　（以姓氏笔画为序）
毛东明　龙开奋　刘永生
沈文选　吴建平　杨春宏
张鹏程　张生春　张燕勤
罗增儒　周春荔　赵　洁
翁凯庆　翁世有　梅全雄
程传平　葛　军　熊　斌
熊昌雄　濮安山

高等教育出版社

内容提要

本书为《竞赛数学教程》(第二版)的配套教材,与教材的篇、章、节的编排一致。每章或节基本上是由 A 组和 B 组两部分内容组成。A 组除对教材中的习题进行详细分析和解答外,还在同一水平上补充了一些题目。B 组篇幅大致与 A 组相同,但水平、难度及技巧都有所提高。全书所选题目大都为国内外数学竞赛题。这些题目思维层次高,更富于数学创造力。

本书为各类师范院校数学教育专业本、专科生的教材和研究生的学习用书,也可作为数学奥林匹克教练员培训班教材。

图书在版编目(CIP)数据

竞赛数学解题研究 / 张同君,陈传理主编. —2 版.
北京:高等教育出版社,2006.5
ISBN 7-04-019376-0

Ⅰ.竞... Ⅱ.①张...②陈... Ⅲ.数学-竞赛题-解题-研究 Ⅳ.O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 016703 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 王凌波
责任绘图 郝　林　**版式设计** 王　莹　**责任校对** 俞声佳
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2000 年 6 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2006 年 5 月第 2 版
印　　张	26.5	印　　次	2006 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	490 000	定　　价	32.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　19376-00

开展数學競賽提高同学們
學習数学的興趣与開發他们
的智力培養更多的優秀人才

祝賀

竞賽数學教程出版

一九九六元月

王元

数学竞赛可以促進数
学教育的改革和啓迪
同学们的数学才能
祝竞赛数学教程出版

一九九六年元月 王壽仁賀

第二版前言

"竞赛数学"是随着高等师范院校数学教育课程的发展而产生的一门新课程。《竞赛数学教程》和《竞赛数学解题研究》是全国二十一所师范院校协作编写的为开设这门课程使用的教材。本教材出版八年来，已有五十多所院校使用它；另外，各省市数学教练员培训班，国家级、省级骨干中学教师培训班及数学教育硕士课程班多选用本教材为教学用书。

随着数学竞赛和数学教育理论的发展，"竞赛数学"课程也相应在发展，教材改革已成为必要。本教材被列入"高等教育百门精品课程教材建设计划"的选题项目。第二版保持了原书精华，锐意创新，力图成为中国高等师范院校数学教育精品教材，同时具有对数学竞赛发展的指导意义。修订教材的指导思想是，进一步加强理论性，反映学科前沿进展水平，同时还顺应数学竞赛发展对数学教师能力的需求，加强教材的实用性，以教育理论的最新成果以及竞赛数学丰富资源中提炼出新的内容融于教材中，相应地删减陈旧内容，以保持教材的领先地位。

修订教材工作历时两年多，2003 年 11 月在北京召开了教材协编研讨会，确定了教材修订的原则和方案，并分工对全书各章节进行修订。2004 年 6 月在长春召开了第二版定稿会议，2004 年 10 月完成审定工作。

教材协编组原有十五所师范院校，修订时又增加了华南师范大学、南京师范大学、天津师范大学、河北师范大学、广西师范大学、长春大学六所院校。参加修订执笔的有陕西师范大学罗增儒、东北师范大学张同君、赵洁、毛东明、程传平，哈尔滨师范大学濮安山、首都师范大学周春荔、张燕勤、吴建平，华中师范大学梅全雄、陈传理、刘永生，广西师范大学龙开奋，西华师范大学熊昌雄，四川师范大学翁凯庆，福建师范大学张鹏程，长春大学翁世有，湖南师范大学沈文选，南京师范大学葛军，河北师范大学杨春宏、张生春，华东师范大学熊斌。分章审稿的有周春荔、吴建平、沈文选、翁凯庆，最后由陈传理、张同君两位主编对全书统稿定稿。

第二版得到中国数学会的大力支持和帮助，奥林匹克委员会副主席裘宗沪教授、普及工作委员会主任黄玉民教授参加了修订工作会议；高等教育出版社及天津师范大学《中等数学》和首都师范大学《中学生数学》杂志社为本书修订版作了热情而富有成效的工作，在此一并表示深切的谢意。

全国二十一所师范院校教材协编组

2006 年 1 月

第一版序

从1981年中国数学会普及工作委员会相继举办了全国高中数学联赛以来，每年一次的数学竞赛吸引了上百万学生参加。1985年我国又步入国际数学奥林匹克殿堂，加强了数学课外教育的国际交流。短短十年我国已跻身于IMO强国之列。我国选手所取得的举世瞩目的成绩显示出我国数学教育的水平。这项活动也激励着广大青少年学习数学的兴趣，吸引他们去进行积极地探索，培养他们创造性思维的能力。数学竞赛的教育功能显示出这项活动已成为中学数学教育的一个重要组成部分。

随着数学竞赛的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。它涉及数学竞赛的内容、思想和方法；也涉及数学竞赛教育和数学课外教育的本质、方法、规律和途径问题，课外学习与课内学习的关系问题，普及与提高问题，数学尖子生的发现和培养问题，辅导教师的进修和提高问题，命题和解题研究问题等等。对上述问题，中国数学会已组织过多次各种形式的数学奥林匹克暨数学课外教育研讨会，也在数学竞赛刊物上进行过长时间的讨论，从实践和理论上做了认真的研讨，并具备了实践成果和初露锋芒的理论研究水平。已经建立了指导竞赛活动的"数学竞赛大纲"和系列数学竞赛教材，把数学竞赛引上健康的轨道。

奥林匹克数学教育水平的提高关键是教练员的培养和提高，师范院校的数学教育工作者们注意到了这个问题。1993年3月在重庆召开的中国数学会第七次普及工作会议暨数学奥林匹克研讨会期间，华中师范大学的陈传理先生和东北师范大学的张同君先生向我提出了组织建设高师院校竞赛数学教材的设想，正符合我多年来正在思索的问题，因此，我积极支持他们尽快去进行这项建设工程，编写一套高质量的反映我国数学竞赛教育水平的《竞赛数学教程》。经过一年多的筹备，全国十五所高师院校教材协编组成立，并于1994年6月在武汉召开了工作会议，会上交流了各校开设竞赛数学课程的经验，试用教材和讲义。经过充分讨论，在教材编写的主要方面取得了一致性意见。认为这套教材应当编写成既有较强的理论性、学术性，能够反映学科前沿进展水平，同时还应顺应我国教育的国情，具有普遍的适用性；起点要适中，内容深入浅出，层次清晰，以利于系统地展现出竞赛数学的基础理论、思想和方法，以及数学竞赛的解题技巧。作为师范教材，还应包含教学法的要求。通过本教材的讲授，开拓发展学生的思维能力与探究问题的能力，使他们走上工作岗位后，能够胜任中学数学课外教育的教练工作。与会者还认为，《竞赛数学教程》这套教材与高师院校开

设的初等数学研究、数学教育学、组合数学以及数论等课程有交叉内容，要注意它们之间的联系与区别；另外，竞赛数学有着极其丰富的资源，在编写教材时取材必须精选，充分体现课程的特色，绝不能成为“拼盘”。

我组织了几位专家认真审阅了教材底稿，教材所包含的丰富内容，总结了多年来我国数学教育工作者和科研工作者们的丰硕成果，也体现出教材编写的指导思想和特色。教材编写者们多年从事数学竞赛的教学工作经验、命题工作经验和组织工作经验也都溶于教材中。在他们成功实践的基础上编写的教材既有理论深度，更有实践的可操作性。因此，我认为这套教材对正在从事数学竞赛教练工作的教师和优秀竞赛选手都是一套很好的参考读本。

数学奥林匹克在不断发展中，竞赛数学是在发展中的一门学科，经过实践得到完善。本书是集体协作的成果，也希望更多的数学教育工作者使用这套教材，修改这套教材，使高质量高水平的数学教练员一批又一批地涌现，以保持我国数学教育的领先水平。

裘宗沪

1995年11月10日

第一版前言

本书是为高等师范院校、教育学院、教师进修学院的数学系(科)所开设的“竞赛数学”课程而编写的教材,可供高师院校数学系(科)的学生及中学数学教师进修使用,亦可供数学奥林匹克教练员培训班、优秀竞赛选手培训班选用。

这套教材分为两册,第一册《竞赛数学教程》为教学课本,第二册《竞赛数学解题研究》提供解题训练和解题研究的资料。全书是由华中师大、东北师大、陕西师大、湖南师大、浙江师大、福建师大、江西师大、贵州师大、四川师大、四川师院、山西大学、广州师院、哈尔滨师大、首都师大、华东师大等十五所院校数学系的《竞赛数学》研究室集体协编的。自 1993 年 3 月在重庆召开的第七次全国数学普及工作会议暨数学竞赛研讨会期间,提出了协编教材的意向开始,就开展了筹备工作,先后又在福州、武汉、上海、合肥等地召开过研讨会拟定编写大纲。1994 年 6 月在华中师范大学召开了编写工作会议,正式通过编写大纲并分工着手初稿的编写,同时推举了陈传理、张同君担任本书的主编。

参加编写执笔的有:陕西师大罗增儒,湖南师大沈文选,浙江师大傅克昌,四川师大翁凯庆,四川师院熊昌雄,山西大学张起林,贵州师大项昭,江西师大宋荣濂,首都师大周春荔、吴建平,东北师大张同君、毛东明、赵洁,哈尔滨师大贾广聚,广州师院熊萍,华中师大梅全雄、许光顺、陈传理,华东师大熊斌,福建师大林章衍,全书由陈传理和张同君统稿。参加大纲制定的还有林金榕、余文熊、许清华、宋乃庆、马顺业、吴宪芳等。

本书得到中国数学会大力支持和帮助,普委会主任、数学奥林匹克委员会副主席裘宗沪研究员(中科院系统科学所)参加了编写策划并亲自组织专家小组审稿,还有普委会副主任夏兴国(河南师大)、刘玉翘(天津市教研室)、魏有德(四川大学)等为本书的编写提出了不少宝贵意见,他们为这套教材生辉做出了建设性工作;还有人民教育出版社的蔡上鹤先生、高等教育出版社郭思旭主任、责任编辑邵勇先生为本书快速、高质量的出版做出了富有成效的工作,在此一并表示深切的谢意。

编写竞赛数学教材仍处于初步尝试阶段,书中若有缺点和错误,恳请读者指正。

十五院校教材协编组

1995 年 10 月 5 日

郑重声明

目　　录

第一篇　从数学竞赛到竞赛数学

第二篇　竞赛数学的主要内容

第三篇　竞赛数学解题的常用方法

第一篇 从数学竞赛到竞赛数学

第一章 数学竞赛

A 组

（作为史资，提供匈牙利，中国，IMO首届试题.）

1. 证明：对于同样的整数 x 和 y，表达式 $2x+3y$ 和 $9x+5y$ 能同时被 17 整除. （匈牙利，1894 年）

证明 设 $u=2x+3y, v=9x+5y$，

消去 y 得
$$3v-5u=17x,$$

但 $(3,17)=1,(5,17)=1$，所以当 x,y 使 u 被 17 整除时，v 也被 17 整除；当 x,y 使 v 被 17 整除时，u 也被 17 整除.

2. 给定一个圆和圆内的点 P 和 Q，求作内接于这个圆的直角三角形，使它的一个直角边通过点 P，另一个直角边通过点 Q. 点 P 和 Q 在什么位置时，本题无解？ （匈牙利，1894 年）

作法 （1）以 PQ 为直径作 $\odot O_1$，与已知 $\odot O$ 相交于 C.

（2）连结 CP 并延长交 $\odot O$ 于 A，连结 CQ 并延长交 $\odot O$ 于 B. 连结 AB，则 $\triangle ABC$ 为所求.

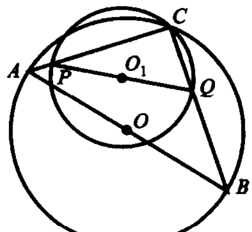

图 1.0.A.1

证明 如图 1.0.A.1，显然 P 在 AC 上，Q 在 BC 上，又 PQ 为直径，故 $\angle C=90°$，得 $\triangle ABC$ 为所作的直角三角形.

讨论 因 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，故 P,Q 均在圆内，否则无解. 当 P,Q 在 $\odot O$ 内时（已知），$\odot O_1$ 与 $\odot O$ 有几个公共点便有几个解.

记 $\odot O$ 的半径为 R，$OO_1=d$，则

（1）$\frac{1}{2}PQ > R-d$ 时，$\odot O_1$ 与 $\odot O$ 相交，有两解；

（2）$\frac{1}{2}PQ = R-d$ 时，$\odot O_1$ 与 $\odot O$ 相内切，有一解；

（3）$\frac{1}{2}PQ < R-d$ 时，$\odot O_1$ 与 $\odot O$ 相离，无解.

所以，当 P,Q 在圆外或 P,Q 虽在圆内但$\frac{1}{2}PQ < R-d$ 时，本题无解.

3. 三角形的边构成公差为 d 的等差数列，三角形的面积等于 S，求三角形的边长和角. 再对 $d=1, S=6$ 这个特殊情况，求解本题.　　　（匈牙利，1894 年）

解　设$\triangle ABC$ 的三边为

$$a = b-d, b, c = b+d \quad (0 < 2d < b),$$

则半周长为 $p=\frac{3b}{2}$，代入面积公式

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

则
$$S^2 = \frac{3}{4}b^2\left(\frac{b^2}{4}-d^2\right).$$

解关于 b^2 的二次方程，取正值，得

$$b^2 = 2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right),$$

得
$$b = \sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right)}, \qquad ①$$

从而
$$a = \sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right)}-d,$$

$$c = \sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right)}+d.$$

又由 $\angle C$ 为最大角知，$\angle A$，$\angle B$ 必为锐角. 据面积公式

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B,$$

得
$$\angle A = \arcsin\frac{2S}{bc},$$

$$\angle B = \arcsin \frac{2S}{ac},$$

$$\angle C = \pi - \angle A - \angle B.$$

把 $d=1, S=6$ 代入①，可得 $b=4$，从而 $a=3, c=5, \angle A = \arcsin \frac{3}{5} \approx 36°52'$，$\angle B = \arcsin \frac{4}{5} \approx 53°8'$，$\angle C = 90°$.

4. 证明：对任意正整数 n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约.　　（第 1 届 IMO，1959 年）

证明　因 $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$，
而 $(3,2)=1$，推出 $14n+3$ 与 $21n+4$ 互素，故原分数不可约.

5. 在实数范围内解方程：

（1）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$；

（2）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 1$；

（3）$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$.

解　设 $y = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} \left(x \geqslant \frac{1}{2}\right)$，

则
$$\frac{y^2}{2} = x + |x-1|,$$

有
$$\frac{y^2}{2} - 1 = |x-1| + (x-1) \geqslant 0,$$

从而
$$y \geqslant \sqrt{2}.$$

（1）当 $y = \sqrt{2}$ 时，

$$\begin{cases} |x-1| + (x-1) = 0, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

有
$$\begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

得
$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

（2）当 $y=1$ 时，与 $y \geqslant \sqrt{2}$ 矛盾，无解.

（3）当 $y=2$ 时，

$$\begin{cases}|x-1|+(x-1)=1,\\ x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

必有 $x-1>0$,从而方程可变为

$$\begin{cases}2x-2=1,\\ x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

得
$$x=\frac{3}{2}.$$

6. 已知关于 $\cos x$ 的二次方程

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0,$$

其中 a,b,c 为已知实数. 求作一个以 $\cos 2x$ 为根的二次方程. 在 $a=4,b=2,c=-1$ 的情况下,对已知方程与作出的新方程进行比较. （第 1 届 IMO,1959 年）

解 由已知得
$$b\cos x=-(a\cos^2 x+c),$$

平方得
$$b^2\cos^2 x=(a\cos^2 x+c)^2,$$

即
$$2b^2(1+\cos 2x)=[a(1+\cos 2x)+2c]^2.$$

整理得
$$a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+(a^2+4ac+4c^2-2b^2)=0.$$

故以 $\cos 2x$ 为根的二次方程为

$$a^2y^2+(2a^2+4ac-2b^2)y+(a^2+4ac+4c^2-2b^2)=0,$$

当 $a=4,b=2,c=-1$ 时,上式变为

$$4y^2+2y-1=0,$$

与已知方程相比较知,它们的系数相同,解集相等.

7. 求作一个直角三角形,使其斜边等于给定的线段 c,斜边上的中线是两条直角边的比例中项.

作法 （1）作 AB 等于已知线段 c.

（2）以 AB 为直径作$\odot O$.

（3）作与 AB 的距离等于$\dfrac{c}{4}$的直线与$\odot O$ 相交于 C.

则$\triangle ABC$ 为所求.

证明 如图 1.0. A. 2,因为 AB 为直径,故$\angle C=90°$.

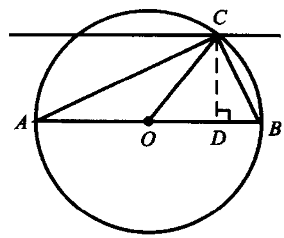

图 1.0. A. 2

又因为$\triangle ABC$斜边上的高为$CD=\frac{c}{4}$,所以它的面积为

$$\frac{1}{2}AB\cdot CD = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC,$$

有
$$AC\cdot BC = \frac{1}{4}AB^2 = OC^2.$$

故$\mathrm{Rt}\triangle ABC$为所求.

8. 在平面上已知一线段AB. M为AB上任一点,在AB的一侧分别以AM与BM为一边作正方形$AMCD$与$BMEF$. 这两个正方形的外接圆除相交于点M外,还相交于点N.

(1) 证明:直线AE与BC相交于点N.

(2) 证明:不论点M在线段AB上的位置如何,直线MN总通过一定点.

(3) 点M在线段AB上运动时,求上述两个正方形中心连线的中点的轨迹.

(第1届IMO,1959年)

证明 (1) 如图1.0.A.3,连NA,NE,NC,NB,NM,则

$$\angle ANM = 45°\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}\right),$$

$$\angle MNE = 135°\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{MBE}\right),$$

得N在AE上. 又

$$\angle MNC = 45°\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{MC}\right),$$

$$\angle MNB = 45°\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{MB}\right),$$

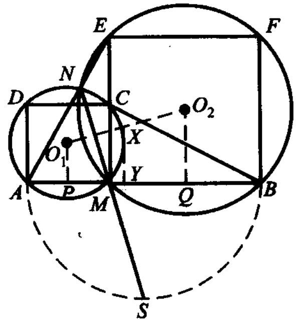

图1.0.A.3

得C在NB上. 从而N是AE与BC的交点.

(2) 以AB为直径在AB的另一侧作半圆,并记$\overset{\frown}{AB}$的中点为S,由$\angle ANM=\angle MNB=45°$知,$N$在以$AB$为直径的圆上,则$NM$通过定点$S$.

(3) 记O_1,O_2是两个正方形的中心,X为O_1O_2的中点. 过O_1,X,O_2作AB的垂线,垂足分别为P,Y,Q,则XY是梯形O_1PQO_2的中位线,有

$$XY=\frac{1}{2}(O_1P+O_2Q)$$
$$=\frac{1}{2}(PM+MQ)=\frac{1}{4}AB.$$