弹性力学及有限单元法

王润富　陈国荣　编

高等教育出版社

弹性力学及有限单元法

王润富　陈国荣　编

高等教育出版社

内容简介

本书根据《弹性力学课程教学基本要求》(教育部高等学校非力学类专业力学基础课程教学指导分委员会结构力学与弹性力学课程教学指导小组制定,2004),安排了下列内容:平面问题的基本理论及解答、平面问题的有限单元法以及空间问题的基本方程和一般定理的简介。

每章安排有学习指导、内容小结、思考题、例题及求解过程、习题的提示和答案等。书后附有《有限单元法程序及其使用说明》(光盘),供读者上机实习使用。

本书可作为工科本科生少学时的弹性力学课程的教材,尤其适用于以自学为主的函授生、专升本学生和自学人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学及有限单元法 / 王润富,陈国荣编. —北京:高等教育出版社,2005.12

ISBN 7-04-017769-2

Ⅰ.弹... Ⅱ.①王...②陈... Ⅲ.①弹性力学-高等学校-教材②有限元法-高等学校-教材

Ⅳ.①O343②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 129913 号

策划编辑 姜　凤　**责任编辑** 张玉海　**封面设计** 于　涛　**责任绘图** 朱　静
版式设计 胡志萍　**责任校对** 胡晓琪　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	2005年12月第1版
印　张	13	印　次	2005年12月第1次印刷
字　数	230 000	定　价	23.40元(含光盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　17769-00

前　言

本书根据《弹性力学课程教学基本要求》(教育部高等学校非力学类专业力学基础课程教学指导分委员会结构力学与弹性力学课程教学指导小组制定,2004),安排了下列内容:绪论,平面问题的基本理论,平面问题的直角坐标解答,平面问题的极坐标解答,空间问题的基本理论,及平面问题的有限单元法。本书的重点是,向读者介绍弹性力学平面问题的基本理论和平面问题的有限单元法。当读者掌握这两部分知识之后,就可为学习弹性力学其他问题的理论及其有限单元法,并为解决工程实际问题打下良好的基础。

本书在编写中,力求突出简明扼要和便于自学的特点。即突出教学基本要求所规定的内容,使读者集中精力学好弹性力学的基本知识。在书中强调了基本理论(基本概念、基本方程和基本解法)的阐述;突出重点,分化和讲清难点;介绍解题的思路、方法和较多例题的求解过程。每章还安排了学习指导,内容小结,思考题,例题的求解,习题的提示和答案,以及学习参考等。书后附有《有限单元法程序及其使用说明》(光盘),其中包含平面三角形单元、四结点等参数单元、空间八结点和二十结点等参数单元的程序及详细的使用说明,可供读者上机实习和解决工程实际问题使用。编者希望,本科生和以自学为主的函授生及自学人员,应用本书能学懂、学好弹性力学的基本知识。

本书原为河海大学本科函授生的弹性力学教材。现对其内容做进一步的精炼,并增加了便于自学的一些措施,经较多修改后出版。本书在编写时,重点引用和参考了徐芝纶编写的《弹性力学简明教程》和王润富编写的《弹性力学简明教程学习指导》。编者认为,随着世界经济的迅速发展,弹性力学及有限单元法已得到了广泛应用,应该在工科院校普遍地设置弹性力学课程,以提高学生的科学知识素质和解决工程实际问题的能力。

本书可作为工科本科生少学时的弹性力学课程的教材,尤其适用于以自学为主的函授生、专升本学生和自学人员使用。

本书的编写,要感谢高等教育出版社和河海大学的支持和帮助,特别要感谢徐慰祖教授、张元直编审和赵光恒教授等的帮助、审稿和提出的宝贵意见,特此致谢。

河海大学　王润富　陈国荣

2005 年 7 月

主要符号表

弹性力学

坐标　直角坐标 x,y,z；极坐标 ρ,φ

体力分量　f_x,f_y,f_z（直角坐标系）；f_ρ,f_φ（极坐标系）

面力分量　$\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z$（直角坐标系）；$\bar{f}_\rho,\bar{f}_\varphi$（极坐标系）

位移分量　u,v,w（直角坐标系）；u_ρ,u_φ（极坐标系）

边界约束分量　$\bar{u},\bar{v},\bar{w}$（直角坐标系）

方向余弦　l,m,n（直角坐标系）

应力分量　正应力 σ，切应力 τ；全应力 p；斜面应力分量 p_x,p_y,p_z（直角坐标系）；σ_n,τ_n；体积应力 Θ

应变分量　线应变 ε，切应变 γ；体应变 θ

势能和功　形变势能 U，外力势能 V，总势能 E_P；功 W

艾里应力函数　Φ

弹性模量　E

切变模量　G

体积模量　K

泊松比　μ

有限单元法（平面直角坐标系，三结点三角形单元）

体力列阵　$\boldsymbol{f}=(f_x\quad f_y)^{\mathrm{T}}$

面力列阵　$\bar{\boldsymbol{f}}=(\bar{f}_x\quad \bar{f}_y)^{\mathrm{T}}$

集中力列阵　$\boldsymbol{f}_{\mathrm{P}}=(f_{\mathrm{P}x}\quad f_{\mathrm{P}y})^{\mathrm{T}}$

位移函数列阵　$\boldsymbol{d}=(u(x,y)\quad v(x,y))^{\mathrm{T}}$

单元结点位移列阵　$\boldsymbol{\delta}^e=(\boldsymbol{\delta}_i\quad \boldsymbol{\delta}_j\quad \boldsymbol{\delta}_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\delta}_i=(u_i\quad v_i)^{\mathrm{T}}$　(i,j,m)

单元结点力列阵　$\boldsymbol{F}^e=(\boldsymbol{F}_i\quad \boldsymbol{F}_j\quad \boldsymbol{F}_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F}_i=(F_{ix}\quad F_{iy})^{\mathrm{T}}$　(i,j,m)

单元结点荷载列阵　$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}^e=(\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}i}\quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{L}j}\quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{L}m})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}i}=(F_{\mathrm{L}ix}\quad F_{\mathrm{L}iy})^{\mathrm{T}}$　(i,j,m)

单元位移矩阵　$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e$（$\boldsymbol{N}$ 为形函数矩阵）

单元应变矩阵　$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e$

单元应力矩阵　$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\delta}^e$，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵，$\boldsymbol{S}$ 为应力转换矩阵）

单元结点力矩阵 $\boldsymbol{F}^{e} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta}^{e}$, $\boldsymbol{k} = \iint_{A} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}yt$（$\boldsymbol{k}$ 为单元劲度矩阵）

单元结点荷载矩阵 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}^{e} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{P}}t + \int_{s_{\sigma}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{f}}\,\mathrm{d}st + \int_{A} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}yt$

结点平衡方程组 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{K}_{ij} = \sum_{e} \boldsymbol{k}_{ij}$（$\boldsymbol{K}$ 为整体劲度矩阵）

郑重声明

目　录

第一章

绪　　论

学习指导

在学习本章时，要求掌握：

1. 弹性力学的内容、研究对象和研究方法，及其与材料力学的区别。

2. 弹性力学的几个基本假定，及其在建立弹性力学理论中的应用。

3. 弹性力学的几个主要物理量的定义、量纲、正负号规定等，及其与材料力学相比的不同之处。

§1-1　弹性力学的内容

弹性力学　研究弹性体由于受外力，边界约束或温度改变等作用而发生的应力、形变和位移。

从**研究对象**来看，弹性力学研究的是各种弹性体，包括杆件、平面体、空间体、板和壳体等。而材料力学主要研究杆件，如梁、柱、轴等；结构力学主要研究杆系结构，如桁架、刚架等。因此，弹性力学的研究对象比较广泛，可以适用于土木、水利、机械等工程中各种结构的分析。

弹性力学问题的**研究方法**可以表述如下：

已知条件是：

（1）物体的几何形状，即边界面方程；

（2）物体的材料参数；

（3）所受的外力情况；

（4）所受的约束情况。

求解的未知函数是：**应力、应变和位移**。

为了求解这些未知函数，在弹性力学中分别建立了弹性体区域内的三套基本方程和边界条件。即

在物体区域内部：

（1）根据任一点微分体的平衡条件，建立**平衡微分方程**；

（2）根据任一点微分线段上应变和位移的几何条件，建立**几何方程**；

（3）根据应力和应变的物理条件，建立**物理方程**。

在物体的边界面上：

（1）若在 s_σ 部分边界面上给定了面力分布情况，相应地建立**应力边界条件**；

（2）若在 s_u 部分边界面上给定了约束条件，相应地建立**位移边界条件**。

弹性力学的任务，就是在边界条件下，从平衡微分方程、几何方程和物理方程求解应力、应变和位移等未知函数。

从**研究方法**来看，弹性力学严格地要求在边界条件下，求解上述三套方程，从而得出较精确的解答。而在材料力学中，为了简化问题的求解，常引用近似的计算假设（如平面截面假设），并近似地处理平衡条件和边界条件等，因此其研究方法是近似的，得出的是近似的解答。材料力学的解答虽然对于杆状构件具有较好的精度，可供工程设计中采用，但对于非杆状构件则往往有较大的误差。因此，对于非杆状结构的力学分析，需要应用弹性力学的方法。

弹性力学是固体力学的一个分支，也是其他各门固体力学分支的基础。弹性力学中考虑的平衡条件、几何条件、物理条件及边界条件等，也是其他固体力学分支所必须考虑的内容；弹性力学中的许多解答，也广泛地应用于其他固体力学分支。

由于弹性力学的研究对象广泛，其研究方法较为严格精确，因此弹性力学在工程结构分析中得到了广泛的应用。在土木、水利、机械等工程中，有许多非杆件形状的结构需要用弹性力学方法进行分析。特别是近代大型、复杂的工程结构大量涌现，如高重力坝、高拱坝、大型船闸、船坞等，其投资巨大，安全性又十分重要，因而其经济与安全的矛盾突出，就必须要用弹性力学方法进行严格的分析。

弹性力学已得出了许多解答，可供工程上应用。对于实际的工程问题，常由于边界形状、荷载和约束等的复杂性，难以求得弹性力学方程的函数式解答。因此，弹性力学中发展了几种数值解法，即**变分法、差分法和有限单元法**等。特别是最近半个世纪内发展起来的**有限单元法**，具有极大的适应性和通用性，对于任何复杂的工程结构都能求出符合精度要求的解答。因此，弹性力学及其有限单元法已经成为结构分析的最重要和有效的手段。

对于工程专业学生，学习弹性力学的目的是：

（1）掌握弹性力学的基本理论，即基本概念，基本方程和基本解法。

（2）在掌握弹性力学基本理论的基础上，能阅读和理解弹性力学文献，应用已有解答为工程服务。

（3）能应用弹性力学中的近似解法，如有限单元法，解决工程实际问题。

思考题

1. 理论力学、材料力学和弹性力学的研究对象有什么区别？试举例说明非杆状结构的工程实例。

2. 弹性力学和材料力学的研究方法有什么区别？试分析在材料力学中求解梁的问题时作了哪些近似处理？

§1－2　弹性力学中的基本假定

研究任何问题时，如果精确地考虑所有各方面的因素，则将使导出的方程非常复杂，以至于不可能求解。因此，首先需要对问题进行分析和简化。即略去其影响很小的次要因素，抓住其主要因素，并归结为若干基本假定，从而建立物理模型，然后才能作进一步的研究。

在弹性力学中，通过对研究对象的分析，确定以下五个基本假定，作为对研究对象的材料性质和变形状态主要特征的概括。其中四个是关于**材料性质的假定**，即假定物体的材料具有下列性质：

(1) **连续性**——假定在物体体积内都被连续介质所充满，没有任何空隙，亦即从宏观角度上认为物体是连续的。因此，所有的物理量均可以用连续函数来表示，从而可以应用数学分析的工具。

(2) **完全弹性**——假定物体是完全弹性的。这个假定包含两点含义：a. 当外力取消时，物体恢复到原状，不留任何残余变形，即所谓“**完全弹性**”；b. 应力与相应的应变成正比，即所谓“**线性弹性**”。根据完全弹性假定，物体中的应力与应变之间的物理关系可以用**胡克定律**来表示。

(3) **均匀性**——物体是由同种材料组成的，物体内任何部分的材料性质均相同。这样，物体的弹性常数等不随位置坐标而变化。

(4) **各向同性**——物体内任一点各方向的材料性质都相同。这样，弹性常数等也不随方向而变化。

凡符合以上四个假定的物体，称为**理想弹性体**。

第五个基本假定是关于物体变形状态的假定，即

(5) **小变形假定**——假定物体的位移和应变是微小的。这就是说，物体在受力后，其位移远小于物体的尺寸，其应变（线应变 ε 和切应变 γ，其中 γ 用弧度表示）远小于1。一般结构受力后，其变形是符合小变形假定的。例如：通常梁的挠度远小于梁的高度；梁的线应变一般小于 10^{-3}；切应变，即角度的改变，更远小于 1 rad（1 rad = 57.3°）。

小变形假定在导出弹性力学的基本方程中，有如下用途：

a. **简化几何方程**。由于应变远小于1，因此 $1 \gg \varepsilon \gg \varepsilon^2 \gg \cdots$，可以在几何方程中略去 ε^2 以上的项，而只须保留应变的一次幂项，从而使**几何方程成为线性方程**。

b. **简化平衡微分方程**。当考虑变形后微分体的平衡条件时，由于变形是微小的，因此可以用变形前的微分体尺寸代替变形后的尺寸，从而使平衡微分方程的推导得到很大的简化。

上述这些假定，确定了**弹性力学的研究范畴**，即**研究理想弹性体的小变形状态**。

思考题

1. 材料力学是否也是应用弹性力学的五个基本假定来研究的？
2. 许多工程问题是符合这五个基本假定的，试举例说明。
3. 试分析下列材料是否符合理想弹性体的假定，并加以说明：混凝土、钢材，竹、木材，钢筋混凝土，玻璃、环氧树脂，岩基、土基。

§1-3 弹性力学中的几个基本物理量

外力是其他物体作用于研究对象的力。外力分为体力和面力。

体力是作用于物体体积内的外力，例如重力和惯性力。体力是以单位体积内作用的力来量度的。对于某一点的体力，可以用下列极限求出，$\boldsymbol{f}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V}$，其中 $\Delta\boldsymbol{F}$ 是作用于 ΔV 体积内的总体力，体力 $\boldsymbol{f}$ 是矢量，常用其在坐标方向的投影（标量）来表示，即 $\boldsymbol{f}=(f_x \quad f_y \quad f_z)^{\mathrm{T}}$。按国际单位制，体力分量的量纲是 $\mathrm{L}^{-2}\mathrm{MT}^{-2}$①，体力分量均以沿坐标轴正向为正。

面力是作用于物体表面上的外力，例如液体压力和接触力。面力是以单位表面面积上的作用力来量度的。对于某一点的面力，可以用下列极限求出，$\bar{\boldsymbol{f}}=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S}$，其中 $\Delta\boldsymbol{F}$ 是作用于 ΔS 面积上的总面力。面力 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 也是矢量，常用其在坐标方向的投影（标量）来表示，即 $\bar{\boldsymbol{f}}=(\bar{f}_x \quad \bar{f}_y \quad \bar{f}_z)^{\mathrm{T}}$。面力分量的量纲是 $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{MT}^{-2}$，也均以沿坐标轴正向为正。

假想将物体截开，则截面两边有互相作用的力，称为**内力**。如图1-1中的 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，其中 $\boldsymbol{F}_1$ 是Ⅱ部分物体对Ⅰ部分物体的作用力，$\boldsymbol{F}_2$ 则是Ⅰ部分对Ⅱ部

① 国际单位制(SI)中以长度、质量、时间、电流、热力学温度、物质的量和发光强度作为基本量，分别用L，M，T，I，Θ，N，J表示，并用这些基本量来表示其他物理量的量纲。

分的作用力，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的数值相同，方向相反。内力通常指的是截面上总的合力和合力矩。

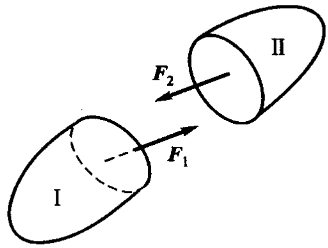

图 1－1

截面单位面积上的内力称为**应力**。截面上某一点的应力，可以用该点的下列极限来量度，$\boldsymbol{p}=\lim\limits_{\Delta A\to 0}\dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}$，其中 $\Delta \boldsymbol{F}$ 是作用于 ΔA 面积上的内力值。

应力 $\boldsymbol{p}$ 与其作用面有关，且具有方向性。在弹性力学中，首先表示出**各坐标面上的应力**，并以其沿坐标方向的投影来表示。对于坐标面，凡其外法线沿坐标轴正向的，称为**正面**，反之称为**负面**。x 面上的应力分量可以表示为：

σ_x——表示作用于 x 面上、沿 x 轴方向的正应力；

τ_{xy}——表示作用于 x 面上、沿 y 轴方向的切应力；

τ_{xz}——表示作用于 x 面上、沿 z 轴方向的切应力。

图 1－2 表示了空间正平行六面体上各坐标面上的应力分量。弹性力学中以坐标面上的应力分量为基本未知量，对于任意斜面上的应力，可以根据坐标面上的应力分量来求出，见 §2－3。

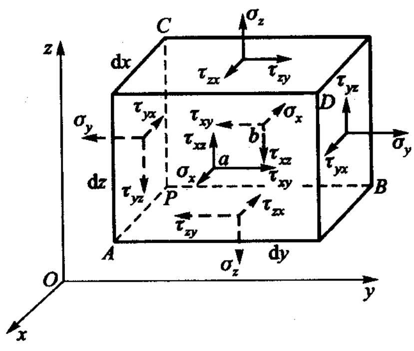

图 1－2

由于内力和应力都是成对出现的，因此应力的符号规定不同于面力。在弹性力学中，**正坐标面上的应力分量以沿坐标轴正向为正，负坐标面上的应力分量以沿坐标轴负向为正**，即以正面正向、负面负向的应力分量为正，反之为负。读

者试检查，图 1－2 中的应力分量均为正。应力分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$。

在材料力学中，正应力以拉为正，实际上与弹性力学中的正应力符号规定相同；切应力以使单元或其局部产生顺时针方向转动趋势的为正，这与弹性力学的切应力符号规定不一致，如图 1－3 所示，读者对此应加以注意。

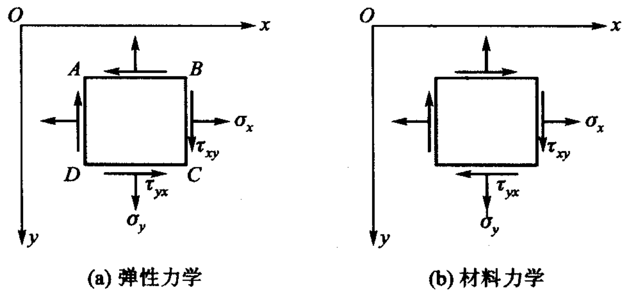

图 1－3

6 个切应力之间具有互等关系。例如，以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yz}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}y}{2}-2\tau_{zy}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}z}{2}=0$$

同样可以列出其余两个力矩方程，简化以后得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{1-1}$$

这就是**切应力互等定理：作用于两个互相垂直面上，并且垂直于该两面交线的切应力是互等的**（大小相等，正负号相同）。由于切应力的互等性，所以切应力记号中的两个下标可以对调，并且只作为一个未知量。读者还应注意，图 1－3a 中 *AB* 和 *AC* 面的面积不同，因此 *AB* 和 *AC* 面上的总切力并不相等。

所谓**形变**，就是**物体形状的改变**。在弹性力学中，**通过任一点作 3 个沿正坐标方向的微分线段，并以这些微分线段的应变来表示该点的形变**。例如，ε_x 表示 x 向微分线段的单位伸缩或相对伸缩，称为**线应变**或**正应变**。线应变以伸长为正，缩短为负。正的正应力对应于正的线应变。**切应变** γ_{xy} 表示 x 向和 y 向线段之间直角的改变，用 rad（弧度）表示，以直角减小为正。正的切应力对应于正的切应变，见例题 2。应变分量的量纲为一。

所谓**位移**，就是**位置的移动**。在直角坐标系中，物体内任一点的位移，用它在坐标方向的投影 u,v,w 来表示。变形前的一点 (x,y,z)，在变形后就移动到 $(x+u,y+v,z+w)$ 的位置。位移分量的量纲为 L，并均以沿坐标轴正向为正。

弹性力学中的各物理量，如体力、面力、应力、应变和位移等，一般都随位置而变，因而都是 x,y,z 的函数。

思考题

1. 如何求出图 1－2 所示的微分体中体力的合力、各微分面上面力和应力的合力。
2. 试画出图 1－3a 各面上的正的应力和正的面力，并加以比较。
3. 弹性力学和材料力学关于切应力符号规定的不同，主要由于后者便于用莫尔圆来求斜面上的应力，而前者不应用这种方法。

本章内容小结

1. **弹性力学的内容**——弹性力学研究弹性体由于受外力、边界约束或温度改变等作用而发生的应力、形变和位移。

2. **弹性力学中的几个基本物理量**

体力——分布在物体体积内的力，记号为 f_x, f_y, f_z，量纲为 $\mathrm{L^{-2}MT^{-2}}$，以坐标轴正向为正。

面力——分布在物体表面上的力，记号为 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$，量纲为 $\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$，以坐标轴正向为正。

应力——单位截面面积上的内力，记号为 $\sigma_x, \cdots; \tau_{yz}, \cdots$，量纲为 $\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$，以正面正向、负面负向为正；反之为负。

形变——用线应变 $\varepsilon_x, \cdots$ 和切应变 $\tau_{yz}, \cdots$ 表示，量纲为一，线应变以伸长为正，切应变以直角减小为正。

位移——一点位置的移动，记号为 u, v, w，量纲为 L，以正标向为正。

3. **弹性力学中的基本假定**

理想弹性体假定——连续性，完全弹性，均匀性，各向同性。小变形假定。

4. **弹性力学的研究方法**

已知：物体的边界形状，材料性质，体力，边界上的面力或约束。

求解：应力、形变和位移。

解法：在弹性体区域内，根据微分体上力的平衡条件建立平衡微分方程；根据微分线段上应变和位移的几何条件，建立几何方程；根据应力和应变之间的物理条件建立物理方程。

在弹性体边界上，根据面力条件，建立应力边界条件；根据约束条件建立位移边界条件。

然后在边界条件下，求解弹性体区域内的微分方程，得出应力、形变和位移。

例题

例题 1　试画出图 1－4 中微分体上正负 x、y 坐标面上正的应力和正的