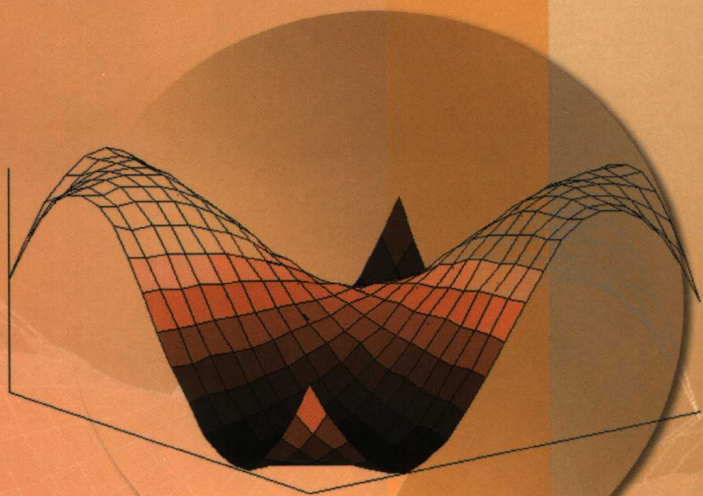


平板的弯曲、 振动和屈曲

王克林 刘俊卿 赵冬 著



冶金工业出版社

平板的弯曲、振动和屈曲

王克林 刘俊卿 赵 冬 著



北 京

冶金工业出版社

2006

内 容 简 介

本书用重傅里叶级数分析薄板、中厚板、复合材料板在各种边界条件下静力、振动和屈曲问题。内容是近年的研究成果。以前的著作只用重傅里叶级数解简支和固定边的矩形薄板,本书不仅把重傅里叶级数用于自由边矩形薄板,而且用于求解中厚板、复合材料板矩形板及平行四边形板。作者把解振动和屈曲的问题转化成矩阵广义特征值问题,不仅具有数值法的优点,且简单易学,适用范围广。

本书附光盘一张,其中有书中的各个解的 MATLAB 程序,便于读者使用。

本书可作为工程技术人员参考书,也可作为大学本科生和研究生的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

平板的弯曲、振动和屈曲/王克林等著. —北京:冶金工业出版社,2006.7
ISBN 7-5024-3968-4

I. 平… II. 王… III. ① 平板结构—弯曲 ② 平板结构—振动 ③ 平板结构—屈曲 IV. TU33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 022780 号

出版人 曹胜利(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009)

责任编辑 俞跃春 美术编辑 李 心

责任校对 王永欣 李文彦 责任印制 牛晓波

北京兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2006 年 7 月第 1 版,2006 年 7 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16; 13.25 印张; 286 千字; 201 页; 1—2000 册

36.00 元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100711) 电话:(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

冶金工业出版社部分图书推荐

书 名	作 者
混凝土及砌体结构	王社良 等主编
材料力学	王克林 等主编
结构力学	赵 冬 等主编
土力学地基基础	朝晓雷 主编
AutoCAD2002 计算机辅助设计	王 茹 等主编
现代建筑设备工程	郑庆红 主编
施工企业会计	朱宾梅 主编
施工技术	王士川 等编
建筑工程经济与项目管理	李慧民 主编
建筑施工组织	赵仲琪 主编
轻钢结构	王 燕 等编著
新编建筑工程常用材料手册(第2版)	刘麟瑞 等编
简明建筑结构设计实用手册	王晓鹏 等主编
建筑物的检测、鉴定、加固与改造	张有才 等编著
桩基动力学	雷林源 著
尾矿建材开发	徐惠忠 著
实用建筑结构设计手册	施岚青 主编
建筑钢结构设计手册(上、下)	赵熙元 主编
混凝土结构工程施工及验收手册	周振喜 主编
简明混凝土结构设计手册(第2版)	施岚青 主编
钢筋混凝土结构构造手册(第3版)	郝士信 等主编
建筑装饰工程施工及验收手册	周振喜 主编
冶金建设工程技术	李慧民 主编

前 言

著名的纳维叶解,即用重傅里叶级数解简支边矩形板,简单方便。但大多数人觉得不能解其他边界条件的问题,甚至有的作者断言重傅里叶级数只能解简支边矩形板。其实不然,早在 20 世纪 40 年代 A E Green^[2]就用重傅里叶级数解固定边矩形板的弯曲问题。S J Levy^[34]用与 Green 不同的方法得到固定边矩形板振动问题的解。还有许多作者将重傅里叶级数用于固定边矩形板的大挠度问题。1984 年由科学出版社出版的张福范的《弹性薄板》^[12],用重傅里叶级数,采用与 S J Levy 相同的方法求解了简支和固定边的矩形薄板。但是此方法不能用于自由边,因此该书的后半部分采用单傅里叶级数法求解自由边问题。

本书用重傅里叶级数分析薄板、中厚板、复合材料板在各种边界条件下静力、振动和屈曲问题。内容是近年的研究成果,其中大部分发表在国内一级刊物上。对重傅里叶级数解法的发展和创新有如下几点:

(1) 把重傅里叶级数解法推广到自由边,使其能解各种边界条件的矩形板。

(2) 除了应用单独的半周期正弦级数外,还应用单独的半周期余弦级数、单独的四分之一周期的正弦或余弦级数,以及正弦和余弦级数共同应用。

(3) 振动和屈曲问题用了独创的解法,把此问题转换成矩阵的广义特征值问题,使计算极大简化。更重要的是能方便的解各种弹性支撑问题,例如点支撑、变系数曲线支撑和非匀质地基等。

(4) 把重傅里叶级数解法应用到除矩形薄板以外的厚矩形板、复合材料矩形板、正交各向异性矩形板、各向异性矩形板以及各向异性平行四边形板等。

重傅里叶级数解法使用不多的原因是级数收敛慢,以前的作者或只作理论推导或将其转换成单傅里叶级数解,这样就没有多大的实用价值。现在计算机已经很普及,并且性能已极大地提高,重傅里叶级数收敛慢的问题已不再是问题,况且还采取了加快级数收敛的方法,使得重傅里叶级数解能达到足够的精度。

本书第 1 章是傅里叶级数解法的基础,介绍傅里叶级数的基本知识,并用傅里叶级数解了悬臂梁的弯曲、振动、屈曲和动态稳定问题。这些问题虽然简单,但是包含了所有技巧和方法。希望读者能认真阅读。此外还有几个高级问题,

输液管道的临界流速和深梁的动态稳定。第 2、3 章是矩形薄板的弯曲、振动和屈曲问题。给出了多种边界条件下的解。第 2 章用的是四分之一周期的正弦级数,第 3 章用的是四分之一周期的余弦级数。这两章用的级数不同,但解了相同的问题。这样可进一步掌握重傅里叶级数解法,并比较两种级数的异同和优缺点,以便对具体问题选用最合适的解法。第 4 章是各向异性平行四边形板的弯曲、振动和屈曲问题,解答虽然比较复杂,但是有前面的基础后也不难理解。所有各向异性矩形板、正交各向异性平行四边形板、各向同性平行四边形板、正交各向异性矩形板和各向同性矩形板都是本问题的特例。第 5 章是正交各向异性矩形厚板的振动、屈曲和动态稳定问题。第 6 章是复合材料矩形板的弯曲、振动和屈曲问题。第 7 章是各向同性矩形薄板的大变形弯曲问题。因为解法相似,所以弯曲、振动、屈曲和动态稳定问题各以一种类型的板为重点。

著 者

2005 年 12 月

目 录

1 傅里叶级数及梁	1
1.1 傅里叶级数基本知识	1
1.2 悬臂梁的弯曲	4
1.3 悬臂梁的稳定	6
1.4 悬臂梁的自由振动	7
1.5 悬臂梁的动态稳定	8
1.6 两端弹性约束的输液管道	10
1.7 弹性约束输液管道	12
1.8 铁摩辛科梁的动态稳定	17
2 矩形薄板(正弦级数)	21
2.1 基本方程	21
2.2 叠加解	21
2.2.1 叠加解 1	22
2.2.2 叠加解 2	24
2.2.3 叠加解 3	25
2.2.4 叠加解 4	25
2.2.5 叠加解 5	26
2.3 角点支撑的矩形板	27
2.4 任意点支矩形板	29
2.5 弹性地基上自由边矩形板	30
2.6 悬臂板	32
2.7 两邻边固定两邻边自由的矩形板	34
2.8 其他边界条件的矩形板	36
2.8.1 两邻边固定另两边简支的矩形板	36
2.8.2 三边简支一边固定的矩形板	36
2.8.3 对边自由一边固定一边简支的矩形板	37
2.8.4 对边自由对边简支的矩形板	37
2.9 矩形板的自由振动	39

2.10 矩形板的屈曲	41
2.11 纵横载荷共同作用的矩形板的弯曲	43
3 矩形薄板(余弦级数)	44
3.1 叠加解	44
3.1.1 叠加解 1	44
3.1.2 叠加解 2	46
3.1.3 叠加解 3	46
3.1.4 叠加解 4	47
3.1.5 叠加解 5	48
3.2 角点支撑的矩形板	49
3.3 四边自由的任意点支矩形板	50
3.4 弹性地基上自由边矩形板	52
3.5 悬臂板	53
3.6 两邻边固定两邻边自由的矩形板	54
3.7 其他边界条件的矩形板	56
3.7.1 四边固定的矩形板	56
3.7.2 对边简支对边固定的矩形板	56
3.7.3 对边固定一边自由一边简支的矩形板	57
3.7.4 一边自由三边简支的矩形板	58
3.8 矩形板的自由振动	59
3.9 矩形板的屈曲	62
3.10 纵横载荷共同作用的矩形板的弯曲	67
3.11 进一步分析	68
4 各向异性平行四边形板	72
4.1 基本方程	72
4.1.1 弯曲	72
4.1.2 弹性地基上平行四边形板的弯曲	76
4.1.3 振动	77
4.1.4 屈曲	77
4.1.5 一般方程	79
4.2 叠加解	80
4.2.1 叠加解($u=0$ 边)	80
4.2.2 叠加解($u=a/2$ 边)	90
4.2.3 叠加解($v=0$ 边)	94

4.2.4 叠加解($v=b/2$ 边)	98
4.2.5 叠加解(特解)	102
4.3 各种边界条件下的解	106
4.3.1 无自由角点的平行四边形板	106
4.3.2 有自由角点的平行四边形板	117
4.3.3 振动、屈曲和一般问题	123
4.3.4 傅里叶级数的收敛性	124
4.4 计算结果	126
4.4.1 四边固定	126
4.4.2 四边简支	130
4.4.3 简支与固定组合	133
4.4.4 对边自由对边支撑板	137
4.4.5 一边自由三边支撑板	139
4.4.6 悬臂板	140
4.4.7 邻边自由邻边固定板	143
4.4.8 四边自由板	145
4.4.9 点支撑四边自由板	147
5 正交各向异性中厚矩形板	151
5.1 基本方程	151
5.2 变系数曲线支撑矩形板的自由振动	152
5.3 其他支撑的矩形板的振动	158
5.4 各种边界条件下的矩形板的自由振动	160
5.5 变系数曲线支撑矩形板的屈曲	162
5.6 自由边矩形厚板的动态稳定	168
5.7 非匀质地基上矩形厚板的动态稳定	173
5.8 线支矩形厚板的动态稳定	176
6 反对称角铺设层合矩形板	178
6.1 基本理论	178
6.2 反对称角铺设层合矩形板的弯曲	181
6.3 反对称角铺设层合矩形板的自由振动	184
6.4 反对称角铺设层合矩形板的屈曲	185
7 矩形板的非线性弯曲	187
7.1 基本方程	187

7.2 傅里叶级数解	188
7.3 四边对于转动和横向位移弹性约束的矩形板	190
7.4 四边弹性梁支撑的矩形板	191
附录	194
附录 A 第 4 章公式中的系数	194
附录 B 程序使用说明	197
参考文献	199

1 傅里叶级数及梁

1.1 傅里叶级数基本知识

在区间 $[0, l]$ 定义的函数 $f(x)$,以 l 反对称延拓。 $f(x)$ 以 l 为二分之一周期的傅里叶正弦级数为^[1]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

在区间 $[0, l]$ 定义的函数 $f(x)$,以 l 对称延拓。 $f(x)$ 以 l 为二分之一周期的傅里叶余弦级数为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2\epsilon_n}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \quad \left\{ \epsilon_n = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases} \right.$$

问题是函数 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数与其一阶导数 $f'(x)$ 的傅里叶余弦级数有何关系? 首先,考查函数 $f(x) = x$,其傅里叶正弦级数为

$$f(x) = \frac{-2l}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1-1)$$

函数 $f(x) = x$ 的导数

$$f'(x) = 1 \quad (1-2)$$

为傅里叶余弦级数,如果对式(1-1)的右边逐项微分,形式上得

$$f'(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1-3)$$

这与式(1-2)不相等。原因是把 $f(x) = x$ 展成傅里叶正弦级数使得函数在 $x = l$ 处产生间断,如图1-1所示,即在 $x = l$ 处傅里叶正弦级数的右极限为 l ,而 $f(l) = 0$ 。根据广义函数理论,间断点的导数是Dirac Delta函数 $-\delta(x - l)$ 。

Dirac Delta函数的定义为

$$\delta(x - \zeta) = \begin{cases} 0 & x \neq \zeta \\ \infty & x = \zeta \end{cases} \quad \int_a^b \delta(x - \zeta) dx = \begin{cases} 1 & \zeta \in [a, b] \\ 0 & \zeta \notin [a, b] \end{cases}$$

函数 $f(x)$ 与Dirac Delta函数乘积的积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \zeta) dx = \int_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} f(x) \delta(x - \zeta) dx = f(\xi) \int_{\zeta-\epsilon}^{\zeta+\epsilon} \delta(x - \zeta) dx = f(\xi)$$

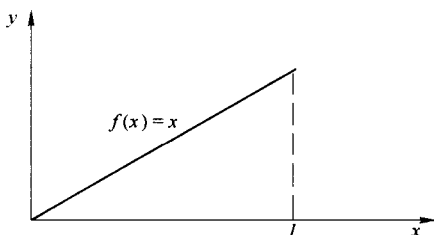


图1-1 函数图

$$\zeta - \varepsilon \leq \xi \leq \zeta + \varepsilon$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \zeta) dx = f(\zeta)$$

函数 $f(x)$ 与 Dirac Delta 函数的导数乘积的积分为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - \zeta) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\delta(x - \zeta) = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \zeta) df(x) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x - \zeta) dx = - f'(\zeta) \end{aligned}$$

所以逐项微分得到的是 $1 - l\delta(x-l)$ 的傅里叶余弦级数, 与 $f'(x)=1$ 比较多了 $-l\delta(x-l)$ 。所以要得到 $f'(x)=1$ 的傅里叶余弦级数, 必须给 $f(x)=x$ 的傅里叶正弦级数逐项微分再加上 $l\delta(x-l)$ 的傅里叶余弦级数。而 $\delta(x-l)$ 的傅里叶余弦级数为

$$\delta(x-l) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1-4)$$

给式(1-3)的右边加上式(1-4)的右边与 l 的积, 得到 $f'(x)=1$ 。

一般情况, 函数 $f(x)$ 在端点的值为 $f(0)=a, f(l)=b$, 其傅里叶正弦级数为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

则在 $x=0$ 和 $x=l$ 处, 分别有间断 a 和 $-b$, 因此对其逐项微分时, 会多了 $a\delta(x) - b\delta(x-l)$ 。为了得到正确的 $f'(x)$ 的余弦级数, 就必须从 $f(x)$ 的正弦级数的逐项微分中减 $a\delta(x) - b\delta(x-l)$ 的余弦级数。

$\delta(x)$ 的傅里叶余弦级数为

$$\delta(x) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l}$$

于是得

$$f'(x) = \frac{1}{l}(-a+b) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{l}a + \frac{2}{l}b \cos n\pi + \frac{n\pi}{l}a_n \right) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1-5)$$

还可以用另外的方法^[2]得到式(1-5), 假设

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad (1-6)$$

根据傅里叶级数理论得

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{2\varepsilon_n}{l} \int_0^l f'(x) \cos \alpha_n x dx = \frac{2\varepsilon_n}{l} \int_0^l \cos \alpha_n x df(x) \\ &= \frac{2\varepsilon_n}{l} \left(\cos \alpha_n x f(x) \Big|_0^l - \int_0^l f(x) d\cos \alpha_n x \right) \\ &= \frac{2\varepsilon_n}{l} \left[f(l) \cos n\pi - f(0) + \alpha_n \int_0^l f(x) \sin \alpha_n x dx \right] \end{aligned}$$

其中

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1/2, & n=0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}$$

把 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \sin \frac{i\pi x}{l}$, $f(0) = a$, $f(l) = b$ 代入上式, 并应用傅里叶函数的正交性得

$$r_n = \frac{2\epsilon_n}{l} (-a + b \cos \alpha_n l) + \alpha_n a_n \quad (1-7)$$

把式(1-7)代入式(1-6)就得到了式(1-5)。

因为余弦级数式(1-2)是对称延拓不会生成间断点, 所以可以直接逐项微分求导。

在区间 $[0, l/2]$ 定义的函数 $f(x)$, 以 $l/2$ 对称延拓, 再以 l 反对称延拓。 $f(x)$ 以 $l/2$ 为四分之一周期的傅里叶正弦级数为

$$f(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

如果 $f(0) = a$, 则不能用逐项微分的方法求一阶导数。假设

$$f'(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} r_n \cos \alpha_n x$$

根据傅里叶级数理论得

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f'(x) \cos \alpha_n x dx = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} \cos \alpha_n x df(x) \\ &= \frac{4}{l} \left[\cos \alpha_n x f(x) \Big|_0^{l/2} - \int_0^{l/2} f(x) d \cos \alpha_n x \right] \\ &= \frac{4}{l} \left[f(l/2) \cos \frac{n\pi}{2} - f(0) + \alpha_n \int_0^{l/2} f(x) \sin \alpha_n x dx \right] \end{aligned}$$

把 $f(x) = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} a_i \sin \alpha_i x$, $f(0) = a$ 代入上式, 并应用傅里叶函数的正交性得

$$r_n = -\frac{4}{l} a + \alpha_n a_n$$

最后得

$$f'(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(-\frac{4}{l} a + \frac{n\pi}{l} a_n \right) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1-8)$$

在区间 $[0, l/2]$ 定义的函数 $f(x)$, 以 $l/2$ 反对称延拓, 再以 l 对称延拓, $f(x)$ 以 $l/2$ 为四分之一周期的傅里叶余弦级数为

$$f(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

如果 $f(l/2) = a$, 则不能用逐项微分的方法求一阶导数。

假设

$$f'(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} r_n \sin \alpha_n x$$

根据傅里叶级数理论得

$$\begin{aligned}
 r_n &= \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f'(x) \sin \alpha_n x dx = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} \sin \alpha_n x df(x) \\
 &= \frac{4}{l} \left[\sin \alpha_n x f(x) \Big|_0^{l/2} - \int_0^{l/2} f(x) d \sin \alpha_n x \right] \\
 &= \frac{4}{l} \left[f(l/2) \sin \frac{n\pi}{2} - \alpha_n \int_0^{l/2} f(x) \cos \alpha_n x dx \right]
 \end{aligned}$$

把 $f(x) = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} a_i \cos \alpha_i x$, $f(l/2) = a$ 代入上式, 并应用傅里叶函数的正交性得

$$r_n = \frac{4}{l} a \sin \frac{n\pi}{2} - \alpha_n a_n$$

最后得

$$f'(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{4}{l} a \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{l} a_n \right) \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1-9)$$

总之, 把函数 $f(x)$ 展成傅里叶级数, 如果级数在某端的值为零, 而被展函数在此端的值不为零, 则造成函数在此端间断, 其一阶导数 $f'(x)$ 的傅里叶级数不能由 $f(x)$ 的傅里叶级数逐项微分得到, 而要加以修正。或者说对一个未知函数, 将其用傅里叶级数表示, 而级数在某端的自然值为零, 但未知函数在此端的值不为零时, 就强制傅里叶级数在此端的值不为零, 其导数不能用逐项微分的方法求得, 而要按上述方法求。

1.2 悬臂梁的弯曲

首先, 举一个简单的例子, 用傅里叶级数求解悬臂梁。梁的弯曲微分方程为^[3]

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

悬臂梁的边界条件为 $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(l)=0$, $y'''(l)=0$

$$\text{设 } y = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{2l} \quad (1-10)$$

式(1-10)自然满足的条件是

$$y(0)=0, \quad y''(0)=0, \quad y'(l)=0, \quad y'''(l)=0$$

条件 $y(0)=0$, $y'''(l)=0$ 是需要的, 但是, 固定端弯矩和自由端的转角不为零, 所以必须强制

$$y''(0) = \frac{l}{2} a, \quad y'(l) = \frac{l}{2} b$$

式中, a, b 是待定常数。

因为 $y(0)=0$, 所以 y' 可由式(1-10)逐项微分得到。因为 $y'(l) = \frac{l}{2} b$, 所以 y'' 利用公式(1-9)从 y' 求得。

因为 $y''(0) = \frac{l}{2} a$, 所以 y''' 利用公式(1-8)从 y'' 求得。

因为 $y'''(l)=0$, 所以 y''' 可由 y''' 逐项微分得到。

$$\begin{aligned}
 y' &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n A_n \cos \alpha_n x \\
 y'' &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(b \sin \frac{n\pi}{2} - \alpha_n^2 A_n \right) \sin \alpha_n x \\
 y''' &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\alpha_n b \sin \frac{n\pi}{2} - a - \alpha_n^3 A_n \right) \cos \alpha_n x \\
 y'''' &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(-\alpha_n^2 b \sin \frac{n\pi}{2} + \alpha_n a + \alpha_n^4 A_n \right) \sin \alpha_n x
 \end{aligned} \tag{1-11}$$

由边界条件 $y'(0)=0, y''(l)=0$ 得

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha_n A_n &= 0 \\
 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(b - \alpha_n^2 A_n \sin \frac{n\pi}{2} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{1-12}$$

把载荷 q 展成傅里叶级数

$$q(x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x \tag{1-13}$$

式中, $q_n = \frac{2}{l} \int_0^l q \sin \alpha_n x dx$ 。

把式(1-11)的第四式和式(1-13)代入平衡微分方程,得

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(-\alpha_n^2 b \sin \frac{n\pi}{2} + \alpha_n a + \alpha_n^4 A_n \right) \sin \alpha_n x = \frac{1}{EI} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} q_n \sin \alpha_n x$$

比较傅里叶级数的系数,得

$$\left(-\alpha_n^2 b \sin \frac{n\pi}{2} + \alpha_n a + \alpha_n^4 A_n \right) = \frac{q_n}{EI}$$

由此得

$$A_n = \frac{\alpha_n b \sin \frac{n\pi}{2} - a}{\alpha_n^3} + \frac{q_n}{EI \alpha_n^4} \tag{1-14}$$

把式(1-14)代入式(1-12)得

$$\begin{aligned}
 -a \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} + b \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\alpha_n} &= - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{q_n}{EI \alpha_n^3} \\
 a \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\alpha_n} &= - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{q_n}{EI \alpha_n^2} \sin \frac{n\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{1-15}$$

如果是均布载荷 q_0 , 则 $q_n = \frac{2q_0}{l\alpha_n}$ 。

利用已知的求和公式,由式(1-15)得

$$-\frac{l^2}{2}a + \frac{l}{2}b = -\frac{q_0 l^3}{3EI}$$

$$\frac{l}{2}a = \frac{q_0 l^2}{2EI}$$

解得 $a = \frac{q_0 l}{EI}$, $b = \frac{q_0 l^2}{3EI}$, 最后得

$$y = \frac{q_0}{EI} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{l^2}{3\alpha_n^2} - \frac{l}{\alpha_n^3} + \frac{2}{l\alpha_n^5} \right) \sin \alpha_n x$$

通过级数求和, 得

$$y = \frac{q_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2)$$

这与材料力学的解^[3]完全一样。

1.3 悬臂梁的稳定

梁的稳定微分方程为^[3]

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

梁自由端剪力不为零, 等于 P 在垂直于梁的轴线上的分量。所以得悬臂梁的边界条件为

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \quad y'''(l) = -k^2 y'(l)$$

式中, y 仍然取与上节相同的傅里叶级数。其各阶导数仍由式(1-11)得到, 但考虑到边界条件的第四式, y 的四阶导数为

$$y'''' = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[-(k^2 + \alpha_n^2) b \sin \frac{n\pi}{2} + \alpha_n a + \alpha_n^4 A_n \right] \sin \alpha_n x$$

这样, 由稳定微分方程得

$$\left(-\alpha_n^2 b \sin \frac{n\pi}{2} + \alpha_n a + \alpha_n^4 A_n \right) - k^2 \alpha_n^2 A_n = 0 \quad (1-16)$$

以下利用边界条件式(1-12)和式(1-16), 把求 k^2 转化为求矩阵的广义特征值问题。把式(1-12)和式(1-16)用矩阵表示, 设级数共取 $N+1$ 项, 并记

$$\{A_n\} = [A_3 \quad A_5 \quad \cdots \quad A_{2N+1}]^T$$

由式(1-12)的第一式得

$$A_1 = [C] \{A_n\}, \quad [C] = -\frac{1}{\alpha_1} [\alpha_3 \quad \alpha_5 \quad \cdots \quad \alpha_{2N+1}] \quad (1-17)$$

由式(1-12)的第二式得

$$b = \frac{1}{(N+1)^2} (\alpha_1^2 A_1 + [D] \{A_n\})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha_3^2 \sin \frac{3\pi}{2} & \alpha_5^2 \sin \frac{5\pi}{2} & \cdots & \alpha_{2N+1}^2 \sin \frac{(2N+1)\pi}{2} \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

把式(1-17)代入式(1-18)得

$$b = [B]\{A_n\}, \quad [B] = \frac{2}{N+1}(-\alpha_1^2[C] + [D]) \quad (1-19)$$

由式(1-16)的 $n=1$ 得

$$a = \alpha_1 b - \alpha_1^3 A_1 + k^2 \alpha_1 A_1 \quad (1-20)$$

把式(1-17), 式(1-19)代入式(1-20)得

$$a = ([E_1] + k^2[E_2])\{A_n\}, \quad [E_1] = \alpha_1[B] - \alpha_1^3[C], \quad [E_2] = \alpha_1[C] \quad (1-21)$$

由式(1-16)的 $n=3, 5, \dots, 2N+1$ 得

$$\{H_1\}a + \{H_2\}b + [H_3]\{A_n\} + k^2[H_5]\{A_n\} = \{0\} \quad (1-22)$$

式中, H_1, H_2 是列向量, H_3, H_5 是对角矩阵, 分别为

$$\{H_1\} = [\alpha_3 \quad \alpha_5 \quad \dots \quad \alpha_{2N+1}]^T, \quad \{H_2\} = -\left[\alpha_3^2 \sin \frac{3\pi}{2} \quad \alpha_5^2 \sin \frac{5\pi}{2} \quad \dots \quad \alpha_{2N+1}^2 \sin \frac{(2N+1)\pi}{2}\right]^T$$

$$[H_3] = \text{diag}[\alpha_3^4 \quad \alpha_5^4 \quad \dots \quad \alpha_{2N+1}^4], \quad [H_5] = -\text{diag}[\alpha_3^2 \quad \alpha_5^2 \quad \dots \quad \alpha_{2N+1}^2]$$

把式(1-17), 式(1-19)代入式(1-20)得

$$([G] + k^2[K])\{A_n\} = 0 \quad (1-23)$$

其中

$$[G] = \{H_1\}[E_1] + \{H_2\}[B] + [H_3], \quad [K] = \{H_1\}[E_2] + [H_5]$$

式(1-23)是广义特征值问题, 由此可求得 k^2 。

表 1-1 是计算结果, 当级数项数增加时, k^2 迅速收敛于精确解。

表 1-1 悬臂梁的临界力

级数项数 N	4 项	10 项	20 项	40 项	精确解
$P_\alpha l^2 / (\pi^2 EI)$	0.280000	0.250000	0.250000	0.250000	0.25

1.4 悬臂梁的自由振动

梁的自由振动振幅的控制微分方程为

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - k^2 y = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2 \rho A}{EI}$$

式中, ω 是自由振动频率; ρ 是梁的密度; A 是梁的横截面的面积; EI 是梁的抗弯刚度。

悬臂梁的边界条件为

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \quad y'''(l) = 0$$

式中, y 的各阶导数仍由式(1-11)求得。由边界条件仍得式(1-12)。由振动微分方程得

$$\left(-\alpha_n^2 b \sin \frac{n\pi}{2} + \alpha_n a + \alpha_n^4 A_n\right) - k^2 A_n = 0 \quad (1-24)$$

采用与上节相同的方法得

$$([G] + k^2[K])\{a_n\} = 0 \quad (1-25)$$