国家自然科学基金资助项目

SPECIALLY DESIGNED FOR ENGINEERS AND TECHNICIANS OF ELECTRONICS

ELECTRONIC ENGINEER

XIDIAN UNIVERSITY PRESS

Scales Transformation Theory of Electromagnetic Field and Its Applications

电磁场的多尺度变换理论及其应用

李应乐　黄际英　著

西安电子科技大学出版社

http://www.xduph.com

电磁场的多尺度变换理论及其应用

国家自然科学基金资助项目

电磁场的多尺度变换理论及其应用

李应乐　黄际英　著

西安电子科技大学出版社

2006

内 容 简 介

本书系统地研究了电磁场与波的多尺度理论及其应用。其内容包括四大部分：第一部分介绍了电磁场与波的基本理论、研究方法、几种典型目标对电磁波的散射特性及仿真结果；第二部分详细地研究了典型坐标与伸缩坐标的变换关系，同时，在保证 Maxwell 方程组的形式不变的前提下，研究了有关电磁场量的多尺度理论及有关的尺度不变量并给出其物理意义，还研究了伸缩坐标系中的电磁波传播特性；第三部分利用电磁场的多尺度理论研究了椭球目标对电磁波的散射、极化特性；第四部分给出了将离散随机介质连续化的模型，得出了雨介质的等效介电常数，研究了其中的脉冲波传播特性，最后研究了目标与背景的电磁相互作用对目标散射特性的影响。

本书物理概念清晰，理论公式推导严谨、简明，其主要读者对象为从事电磁散射、电波传播、雷达系统和隐身技术等研究的技术人员，也可作为高等院校相关专业高年级本科生及研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场的多尺度变换理论及其应用/李应乐，黄际英著.
一西安：西安电子科技大学出版社，2006.7
ISBN 7-5606-1685-2
Ⅰ.电…　Ⅱ.①李…　②黄…　Ⅲ.电磁场-变换　Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 055693 号

责任编辑　云立实　王晓杰
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2006 年 7 月第 1 版　　2006 年 7 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　印张 10.75
字　　数　211 千字
印　　数　1～4000 册
定　　价　16.00 元
ISBN 7-5606-1685-2/TN·0340

XDUP 1977001-1

前　言

本书系统地研究了电磁场与波的多尺度理论及其在目标散射、目标与背景介质电磁相互作用中的应用。第1章简要叙述了麦克斯韦(Maxwell)方程组的物理意义、媒质的电磁特性、边界条件以及矢量位函数等的基本理论。第2章介绍了有关散射的基本知识以及粒子散射近似计算的几种方法，最后研究了几种简单形体目标对电磁波的散射目标(如球体等)的散射特性。第3章研究了用于求解椭球散射问题的电磁理论的多尺度分析(典型坐标与伸缩坐标的变换关系)，接着讨论了电流密度矢量、电荷体密度的变换关系，进而研究了麦克斯韦方程组的形式及有关电磁场量的尺度变换关系，最后讨论了介质的本构变换关系及极化强度矢量与磁化强度矢量的变换关系、边界条件的尺度变换关系以及有关的尺度不变量及其物理意义，伸缩坐标系中的电磁波传播特性。第4章简要介绍了用于求解椭圆柱类电磁问题的理论，我们称其为圆柱系中电磁场的多尺度理论，研究了将各向异性的介质看成各向同性的介质时引起的散射误差以及减小这种误差的方法。第5章利用第3章的多尺度变换理论研究了当入射的平面电磁波任意极化时的椭球目标散射特性，导出了目标的微分散射截面、交叉极化分辨率表达式，然后在毫米波段对这些目标特征量进行了仿真计算，利用目标的尺度关系，仿真了“箔条”、“圆盘”等目标的散射极化特性，并给出了多层介质椭球的研究方法。第6章研究了椭圆柱导体的散射特性，讨论了散射宽度与电波工作频率、涂层厚度及涂层折射率的关系，其仿真结果具有明显的物理意义，并给出了双层介质椭圆柱的散射宽度和仿真结果，研究了平板散射的一般规律，对有关结果进行了较为详细的物理解释。第7章建立了将离散介质连续化的模型，得出了雨介质的等效介电常数，研究了其中脉冲波的传输特性。第8章研究了目标与背景媒质的电磁相互作用给目标的散射极化特性所造成的影响，给出了估计这种相互作用的一般方法，在考虑相互作用时给出了椭球目标等的散射截面及交叉极化分辨率的解析表达式，得出了电磁波任意极化

时的目标散射矩阵以及散射矩阵的特征值及特征矢量。

本书物理概念清晰，理论公式推导严谨、简明。本书是作者在完成国家自然科学基金项目(60171010)过程中写成的，得到了国家自然科学基金的部分资助。全书由李应乐执笔，黄际英教授对全书的内容、结构进行了统稿，并对部分内容进行了推导。另外，王一平教授在百忙中审阅了书稿的全部内容，提出了许多宝贵的意见，傅君眉教授以及葛德彪教授也给予了热情的支持，作者在此一并表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，殷切希望广大读者、专家批评指正！

作　者

2006 年 3 月

目　录

第 1 章　电磁理论基本方程

自从 19 世纪 J.C. 麦克斯韦提出描述电磁场理论的一组方程以来，人们不断地开展了有关电磁波的理论研究与应用研究。特别是在利用电磁波实现越洋通话和二战期间无线电雷达系统在战场上发挥巨大作用之后，有关电磁波传播、散射、电磁兼容、电磁防护等的理论与应用研究得到了空前的发展。可以预料，麦克斯韦方程组作为这些应用的基石，其丰富内容还远没有被我们所利用。它不仅涵盖了迄今电磁现象上已经发现的所有定律，而且还可以通过它预测实验上尚未发现的新结果。由此可见，麦克斯韦方程组是研究一切宏观电磁问题的基础。

本章将简要叙述麦克斯韦方程组的物理意义、媒质的电磁特性、边界条件以及矢量位函数等基本理论。

1.1　麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组可以写成微分形式与积分形式。其微分形式准确地反映了空间观察点上同一时刻有关电磁量的关系。因此，该方程组中的有关物理量一般来讲应是时间 t 和空间 r 的函数，是四元函数。

微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.4}$$

积分形式的麦克斯韦方程组为

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \, \mathrm{d}V \tag{1.5}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.6}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.7}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.8}$$

其中，$\boldsymbol{E}$ 为电场强度，单位是 V/m；$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度，单位是 A/m；$\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量，单位是 C/m^2；$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度或磁通密度，单位是 Wb/m^2；$\boldsymbol{J}$ 为电流密度矢量，单位是 A/m^2；ρ 为电荷密度，单位是 C/m^3。

式(1.1)、(1.5)实际上为矢量场、电场的高斯定理，它定义了电位移矢量的散度；式(1.2)、(1.6)为磁场的高斯定理；式(1.3)、(1.7)为法拉第电磁感应定理，它确定了电场矢量的旋度；式(1.4)、(1.8)为全电流安培环路定理，该定理表明：位移电流与传导电流一样，都可以产生磁场。

电荷守恒定理可以表述为

$$\oiint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V \tag{1.9}$$

其微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.10}$$

以上公式(1.1)～(1.10)并不完全独立，可以由一个公式推出另一个公式，在此不再详述。

电荷守恒定律的物理意义是：空间任意电流密度矢量的散度等于该点电荷体密度时间增量的负值。从广义四维空间的角度考虑，电荷不是在空间上变化，就是在时间上变化，空间上增加了，时间上就要减小，反之亦然。式(1.10)说明四维电流密度矢量在四维空间上是无源的，其散度为零。

麦克斯韦方程组反映了电荷与电流激发电磁场以及它们相互作用的基本规律。它包含丰富的内容，具有广泛的应用和深刻的物理意义。伟大的物理学家爱因斯坦和波兰物理学家英费耳德给与麦克斯韦方程组以高度的评价：“这个方程组的提出是牛顿时代以来物理学上一个重要的事件，这是关于场定律的定量的描述，方程中所包含的内容比我们所能指出的要丰富得多。在它们简单的形式下隐藏着深奥的内容，这些内容只有依靠仔细的研究才能显现出来，它是表示场的结构的定理。它不像牛顿定理那样，把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是此处现在的场只与最邻近的刚过去的场发生关系。假使我们知道此处现在所发生的事件，这些方程便可帮助我们预料在空间上稍微远一些、在时间上稍微迟一些将会发生什么。”

值得注意的是，尽管麦克斯韦方程组是电磁理论的基础，而且也已证明在高速运动的电磁领域该方程组已被成功地应用，但是更进一步的研究表明，仅仅依靠麦克斯韦方程组是不够的。如许多形状较为简单的散射体散射场的解析解难以得到，只能依靠数值方法得到其近似解；对于热辐射的能量分布、光电效应、原子的精细结构理论等涉及的物质微观结构的题目，麦克斯韦方程组就不再适用了，必须借助量子电动力学的有关理论才能圆满地解决。

1.2 磁荷存在时的麦克斯韦方程组

电场和磁场是电磁场的具体表现形式，离开了变化的电场，就不能产生变化的磁场，反之亦然。这就预示着电场和磁场有着同等重要的地位，体现在麦克斯韦方程组中为对称的形式和相加的形式。自然界中至今还没有发现磁荷及磁流的存在，但是，为了方便，在处理电磁场理论的某些问题时引入磁荷、磁流的概念。那么，当电荷与磁荷同时存在时，麦克斯韦方程组应修改为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_{\mathrm{m}} \tag{1.12}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.14}$$

如果将只有磁荷存在时的源称为磁型源，此时的电磁场物理量用下标“m”表示，将只有电荷存在时的源称为电型源，此时的电磁场物理量用下标“e”表示，那么式(1.11)～(1.14)将变为磁型方程组，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{m}} = 0 \tag{1.15}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} = \rho_{\mathrm{m}} \tag{1.16}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = -\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} - \frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}}{\partial t} \tag{1.17}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}}{\partial t} \tag{1.18}$$

电型方程组为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{e}} = \rho_{\mathrm{e}} \tag{1.19}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} = 0 \tag{1.20}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}}{\partial t} \tag{1.21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{e}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}}{\partial t} \tag{1.22}$$

同理，磁流密度矢量与磁荷密度的关系，即磁荷守恒定律变为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} + \frac{\partial \rho_{\mathrm{m}}}{\partial t} = 0 \tag{1.23}$$

式(1.17)中的第二项可称为位移磁流。显然，式(1.19)～(1.22)与式(1.15)～(1.18)有如下的对应关系，即

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}} \to -\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}, \quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} \to -\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}, \quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}} \to \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}, \quad \boldsymbol{D}_{\mathrm{e}} \to \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}$$

$$\rho \to \rho_{\mathrm{m}}, \quad \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}, \quad \varepsilon \to \mu, \quad \mu \to \varepsilon$$

一般情况下，空间任意点的场是电型源单独存在时激发的电磁场与磁型源单独存在时激发的电磁场的矢量和，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} \\ \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{D}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{m}} \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

时谐电磁场在研究电波的传播与散射等问题中占有重要的地位。时谐电磁场是指电磁场随空间变化的同时随时间按正弦规律变化的电磁场，这是由于任何随时间变化的场都可在时域进行傅里叶变换，等效成一系列振幅、频率不同的时谐电磁场。而且在有关的电子系统中，相关参数(如目标散射截面等)都是按时谐场定义的。在直角坐标系、柱坐标系以及球坐标系中，时谐电磁场有着不同的表现形式，直角坐标系中的形式较为简单，如电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ 可以写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \sqrt{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cos\omega t = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{1.24}$$

在式(1.24)中，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 为复振幅的有效值，其分量有可能相位不同。由于时间因子还有其它形式，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ 以及 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，它们对应着不同的空间因子，$\mathrm{i}=\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，为简单起见，在本书中采用 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$。同理，产生电磁场的源也可写成以上的形式，那么，时谐场的麦克斯韦方程组变为

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= \rho_{\mathrm{m}} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \end{aligned} \tag{1.25}$$

此时，电荷守恒定律与磁荷守恒定律变为

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{J} &= -\mathrm{j}\omega\rho \\
\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} &= -\mathrm{j}\omega\rho_{\mathrm{m}}
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

应注意的是，在式(1.25)、(1.26)中，有关的物理量既可理解为复振幅的有效值，又可理解为除去时间因子后的剩余部分。如何理解不会影响方程组的表现形式，但在计算电磁场的能量问题时，不同的理解会有不同的表达式。有关的表达式(如能量密度等相差系数为1/2)将在后续内容中进行讨论。显然，由于麦克斯韦方程组缺少时间变量，因此，求解时谐麦克斯韦方程组要比求解时变麦克斯韦方程组容易。也可认为时谐麦克斯韦方程组是时变麦克斯韦方程组在频域的表现形式。

1.3 媒质的电磁特性

在1.2节中我们研究了麦克斯韦方程组及其与有磁荷存在时的麦克斯韦方程组的相互关系，这是我们求解电磁问题的基本理论。但是，在实际问题的研究中，仅有麦克斯韦方程组是远不能解决问题的，还必须知道电磁波传输媒质的电磁特性及其有关的边界条件。本节首先介绍媒质的电磁特性。

在电磁场中，描述媒质电磁特性的方程也称为媒质的本构方程。在自由空间中，描述媒质电磁特性的本构方程为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{J} &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

其中，ε_0，μ_0 分别为自由空间的电容率(或介电常数)和磁导率，其大小(在国际单位制中)为

$$
\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \quad \mathrm{F/m}
$$

$$
\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \mathrm{H/m}
$$

就线性各向同性媒质而言，在电磁场的作用下，媒质内部电荷运动及其电磁相互作用将导致媒质的极化、磁化与宏观上传导电流的产生。这些参量分别用极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$、磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 以及传导电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 来描述。从物理上讲，极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 是媒质中单位体积内电偶极矩的统计平均值，表明了媒质中电荷运动所形成的杂乱无章的电偶极矩在电场力的作用下趋于电场方向的程度。磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 是媒质中单位体积中磁偶极矩的统计平均值，表明了媒质中电荷运动所形成的杂乱无章的磁偶极矩在磁场力的作用下趋于磁场方向的程度。由于媒质与电磁场的相互作用，电位移矢量、磁感应强度与电场和磁场

的关系变为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

式(1.28)是从麦克斯韦方程出发得到的，是对任何介质都适用的定义式。对线性各向同性媒质来说，式(1.28)可简化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

在式(1.29)中，ε_r，μ_r 分别为媒质的相对介电常数与相对磁导率。

在导电媒质中，由于有少量的自由电子存在，这些电子在电场的作用下将发生定向移动，形成宏观电流。可以证明：这一电流将与媒质中的电场成正比，即

$$
\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.30}
$$

式(1.30)也称为欧姆定律的微分形式。

以上各式是各向同性媒质中的本构关系。

媒质的介电常数 ε 和 μ 以及媒质的电导率 σ 描述了媒质的电磁特性，在电磁理论中占有重要的地位。当媒质的参数与频率有关时，这种媒质称为色散媒质。此时，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 不仅与电场、磁场有关，而且还和它们的变化率有关，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} + \varepsilon_1 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \varepsilon_3 \frac{\partial^3 \boldsymbol{E}}{\partial t^3} + \cdots \\
\boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H} + \mu_1 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \mu_3 \frac{\partial^3 \boldsymbol{H}}{\partial t^3} + \cdots
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

对于时谐电磁场，式(1.31)还可写为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= (\varepsilon + \mathrm{j}\omega\varepsilon_1 - \omega^2 \varepsilon_2 - \mathrm{j}\omega^3 \varepsilon_3 + \cdots) \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} &= (\mu + \mathrm{j}\omega\omega_1 - \omega^2 \mu_2 - \mathrm{j}\omega^3 \mu_3 + \cdots) \boldsymbol{H}
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

式(1.32)表明：这种情况下，描述媒质的电磁参数变成了复数。

降雨、沙尘暴、云、雾等对电磁波有着重要的影响，研究这些离散媒质的电磁特性可用等效介电常数和等效磁导率来描述。例如，在准静态下，降雨的等效介电常数可写为

$$
\varepsilon_i = \varepsilon_0 \left[1 + V \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 + A_i(\varepsilon - \varepsilon_0)} \right] \tag{1.33}
$$

式(1.33)是悬浮椭球粒子的等效介电常数。Maxwell-Garnett 给出的等效介电常数为

$$
\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_0 + \frac{\dfrac{3V(\varepsilon - \varepsilon_0)\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}}{1 - \dfrac{V(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}} \tag{1.34}
$$

其中，ε_0、ε 分别为背景和悬浮粒子的介电常数；V 为单位体积中粒子所占的体积；A_i 和粒

子的形状有关。由于这些离散媒质都会对电磁波产生一定的衰减，所以，这些媒质的等效介电常数和等效磁导率一般来说是复数形式的。

当媒质的电磁特性参数不随电磁场的强弱变化时，这种媒质称为线性媒质，否则，称为非线性媒质。对于非线性媒质有

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\chi_{e1}\boldsymbol{E} + \chi_{e2}|\boldsymbol{E}|\boldsymbol{E} + \chi_{e3}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{E} + \cdots) \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{M} = (\chi_{m1}\boldsymbol{H} + \chi_{m2}|\boldsymbol{H}|\boldsymbol{H} + \chi_{m3}|\boldsymbol{H}|^2\boldsymbol{H} + \cdots) \tag{1.36}$$

研究非线性媒质中电磁现象的理论称为非线性电磁学或非线性光学。

有些媒质的电磁参数还与电磁场的方向有关，这种媒质称为各向异性媒质，如做高速运动的各向同性媒质其电磁参数就与电磁场的方向有关。各向异性媒质的本构关系可以表示成矩阵形式，即

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.37}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{H} \tag{1.38}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.39}$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.40}$$

式(1.40)为描述媒质的参数矩阵。由于在各向异性媒质中，电磁场总是存在的，也就是说，由电位移矢量可以求出电场强度等，因此，参数矩阵一般来讲是可逆矩阵。例如，外磁场作用下的冷等离子体的电磁参数为

$$\varepsilon_r = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{X(1-Y_1^2)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} & \dfrac{X(Y_1Y_2-iY_3)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} & \dfrac{X(iY_2+Y_1Y_3)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} \\ \dfrac{X(iY_3+Y_1Y_2)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} & 1-\dfrac{X(1-Y_2^2)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} & \dfrac{X(Y_3Y_2-iY_1)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} \\ \dfrac{X(Y_1Y_3-iY_2)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} & \dfrac{X(Y_3Y_2+iY_1)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} & 1-\dfrac{X(1-Y_3^2)}{1-Y_1^2-Y_2^2-Y_3^2} \end{bmatrix}$$

其中，$X=\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2}$，$Y_i=\dfrac{\omega_{Hi}}{\omega}$，$\omega_{Hi}=\dfrac{eB_i}{m}(i=1, 2, 3)$。等效介电常数的实部由对称矩阵构成，虚部由反对称矩阵构成。

另外，还有一些媒质，其电场和磁场是互相耦合的，这种媒质可称为双各向异性媒质，它们的本构关系可以写成以下形式，即

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{H} \tag{1.41}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{H} \tag{1.42}$$