湖南省普通高校成人教育系列教材

高等数学（下）

■ 湖南省教育科学研究院
■ 湖南省成教学会成教研究专业委员会 组编 审定

◎ 朱惠延　周世琼　主编
◎ 黄立宏　　　　　主审

GAODENGSHUXUE

【理工类】

湖南人民出版社

湖南省普通高校成人教育系列教材

高等数学(下)

■ 湖 南 省 教 育 科 学 研 究 院
■ 湖南省高教学会成教研究专业委员会 组编 审定

◎ 朱惠延 周世琼 主编
◎ 黄立宏 主审

GAODENGSHUXUE

湖 南 人 民 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册:理工类/朱惠延,周世琼主编.—长沙:湖南人民出版社,2005.12

ISBN 7-5438-4245-9

Ⅰ.高... Ⅱ.①朱...②周... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第155235号

责任编辑:杜小念
装帧设计:卜艳冰

高等数学(理工类)下册

朱惠延 周世琼 主编

*

湖南人民出版社出版、发行

网址:http://www.hnppp.com

(长沙市营盘东路3号 邮编:410005)

湖南省新华书店经销 国防科大印刷厂印刷

2005年12月第1版第1次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:14.75

字数:327,000 印数:1-10,000

ISBN7-5438-4245-9

G·1014 定价:19.80元

湖南省普通高等学校
成人教育教材编写指导委员会

主　任：张学军
副主任：杨仁斌　黄宜峰
委　员：（按姓氏笔画为序）

王继平　卢先明　冯　涛　叶震琪　寻立祥　张登玉
李卫宁　李达轩　汤放华　阳柏苏　李晓阳　李桂源
刘鸿翔　刘绪幌　杨仁斌　张学军　孟昭武　陈家玉
宋楚华　张冀南　周小青　欧小松　欧阳河　屈林岩
柳见成　殷志云　曹福祥　章　兢　曾宝成　鲁亮深
蒋景萍　廖端芳　瞿树林

湖南省普通高等学校
成人教育教材编审委员会

主　任：杨仁斌　黄宜峰
副主任：欧阳河　杨　敏
委　员：（按姓氏笔画为序）

马宏铁　王超英　申白沙　叶　进　宁国良
冯革非　申桂荣　李汉林　朱平华　李　光
刘伟辉　邬贤斌　李茯梅　闫家灿　刘晓林
宇振寰　刘　彪　陈立人　陈邦杰　沈国强
陈润叶　肖超苏　杜慎仲　吴移谋　姜大良
唐际昂　黄万华　常富林　彭剑飞　谢剑虹
蔡　瑛　潘辉英

前　言

根据教育部加强教材建设和管理的文件精神，在省教育厅的直接领导和支持下，湖南省教育科学研究院和湖南省普通高等成教研究专业委员会共同组织编写了湖南省普通高校成人教育系列教材，并于2004年成立了湖南省普通高校成人教育教材编写指导委员会和湖南省普通高校成人教育教材编审委员会。在对我省普通高等学校成人教育所用教材进行充分调查的基础上，研究制定了组织编写出版成人教育系列教材的实施计划。经全省普通高校学校申请推荐、专家评审、教材编写指导委员会审定，实行主编负责制。2005年3月首期编写出版了《计算机应用基础教程》《英语基础语法》《学士学位英语考试指南》等4本教材，本期编写出版《大学语文》《管理学》《高等数学》《线性代数》《概率论与数理统计》等6本教材。

湖南省普通高等学校成人教育系列教材充分考虑了成人教育的多学科多层次和学员在职学习的特点，本着为成人教育服务的目的，在保证教材科学性的前提下，力求教材适应成人学员自学，注重加强教材的应用性。该系列教材作为普通高等学校成人教育的本科和专科层次的教材，在教材内容上保持了一定广度，理论上保持了一定深度，各校在教学中，可根据教学计划和学员的情况进行教材内容的选用。

本书在编写出版过程中得到了各级领导、各高等学校的大力支持，整套教材凝聚了众多教授、科研人员和工作人员的集体智慧，谨在此对本书付出辛勤劳动的全体人员表示衷心感谢！

本册为理工类《高等数学》（下册），全书共6章，第7～8章由周世琼编写，第9～10章由谢楚农编写，第11～12章由唐宝庆编写。

由于编写和出版时间仓促，书中难免存在错误，请各学校将使用过程中发现的问题及时反馈给我们，以便再版时修正、完善。

湖南省教育科学研究院
湖南省普通高校成教研究专业委员会
2005年10月15日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何是学习多元函数微积分必备的基础知识.在本章中我们首先介绍空间直角坐标系的概念,然后引进有广泛应用的向量代数知识,并以此为工具,讨论空间的平面和直线,最后简要介绍空间曲面和空间曲线的部分内容.

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

为了沟通空间图形与数的研究,就需要建立空间点与有序数组之间的联系,因面就必须建立空间直角坐标系.

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广.过空间一定点 O,作三条两两互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位.这三条数轴分别叫做x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴),统称为坐标轴.通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线;它们的正向按右手法则来确定,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 7-1).这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系,点 O 叫做坐标原点(或原点).

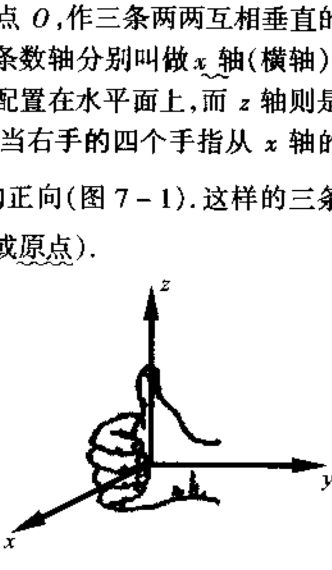

图 7-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面.其中 x 轴和 y 轴、y 轴和 z 轴、z 轴和 x 轴所确定的坐标面分别叫做xOy 面、yOz 面、zOx 面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限.上半空间($z>0$)中,从含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限数起,按逆时针方向分别叫做Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限,下半空间($z<0$)中,与Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限分别对应的卦限依次叫做Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限(图 7-2).

建立了空间直角坐标系后,就可以建立起空间点与数组之间的对应关系了.

设 M 为空间的一个点,过点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为P、Q、R(图 7-3),这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为x、y、

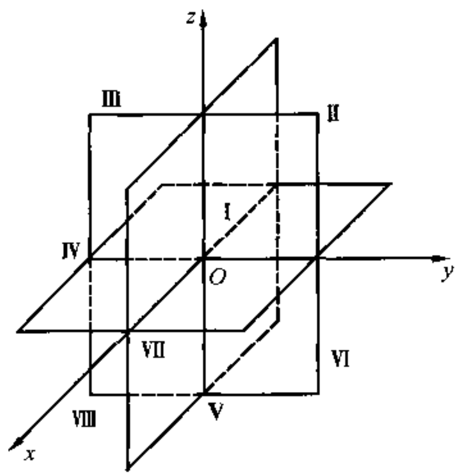

图 7-2

z. 于是,空间点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z),这个有序数组称为点 M 的直角坐标,并依次把 x, y, z 叫做点 M 的横坐标,纵坐标,竖坐标. 坐标为(x,y,z)的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

反之,若给定了一个有序数组(x,y,z),我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后通过 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面,这三个平面的交点 M 就是由有序数组(x,y,z)所确定的唯一的点(图 7-3).

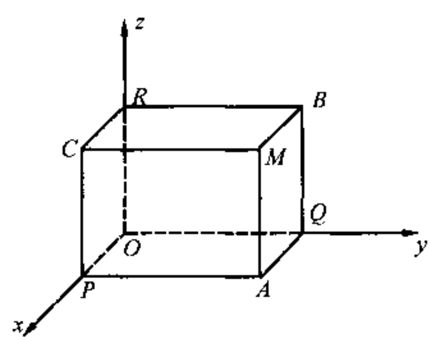

图 7-3

综上所述,我们建立起了空间点 M 与有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系.

容易知道, x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$;而 xOy 面、yOz 面、zOx 面上的点的坐标分别为$(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$. 坐标原点 O 的坐标为$(0,0,0)$. 请注意它们各自所具有的特征.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,为了用两点的坐标来表示它们之间的距离 d,我们过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 7-4). 根据直角三角形的勾股定理,有

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 \\ &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2. \end{aligned}$$

由于 $|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$,

$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$, $|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

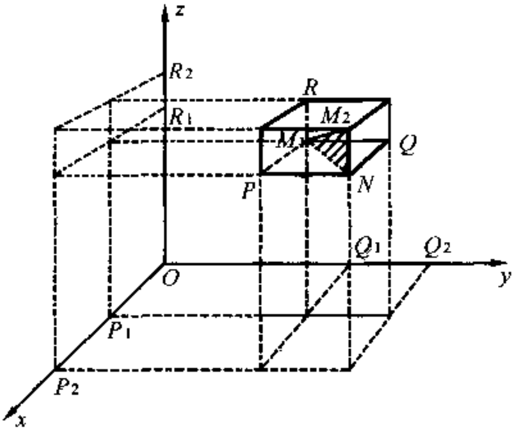

图 7-4

所以　$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

这就是空间两点间的距离公式.

特别地,点 $M(x,y,z)$与坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　求证以 $M_1(5,\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{5-\sqrt{3}}{2})$、$M_2(5,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等边三角形.

解　因为

$$|M_1M_2|^2=(5-5)^2+(1-\frac{3+\sqrt{3}}{2})^2+(2-\frac{5-\sqrt{3}}{2})^2=2,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-5)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=2,$$

$$|M_3M_1|^2=(5-5)^2+(2-\frac{3+\sqrt{3}}{2})^2+(3-\frac{5-\sqrt{3}}{2})^2=2.$$

所以,$|M_1M_2|=|M_2M_3|=|M_3M_1|$,即 $\Delta M_1M_2M_3$ 为等边三角形.

例 2　已知 $A(-3,2,1)$,$B(0,2,5)$,求 ΔAOB 的周长.

解　由两点距离公式可得

$$|AB|=\sqrt{(-3-0)^2+(2-2)^2+(1-5)^2}=5,$$

$$|AO|=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{14},$$

$$|BO|=\sqrt{0^2+2^2+5^2}=\sqrt{29}.$$

所以,ΔAOB 的周长为

$$l=|AB|+|AO|+|BO|=5+\sqrt{14}+\sqrt{29}\approx 14.$$

习题 7-1

1. 在空间直角坐标系中,定出下列各点的位置:

   $A(1,2,3)$;$B(-2,1,3)$;$C(2,-3,4)$;

   $D(0,2,5)$;$E(3,0,4)$;$F(-1,3,0)$.

2. 在空间直角坐标系中,作出点 $A(3,1,2)$ 和点 $B(2,-1,3)$,并写出它们关于:(1) 各坐标面,(2) 各坐标轴,(3) 原点的对称点的坐标.
3. 求下列各对点之间的距离:
   (1)$(0,0,0),(2,3,4)$;　　(2)$(0,0,0),(2,-3,-4)$;
   (3)$(-2,3,-4),(1,0,3)$;　　(4)$(4,-2,3),(-2,1,3)$.
4. 求点 $M(4,-3,5)$ 到(1) 坐标原点,(2) 各坐标轴,(3) 各坐标面的距离.
5. 试证以 $A(4,1,9),B(10,-1,6),C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.
6. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7),B(3,5,-2)$ 等距离的点.
7. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2),B(4,-2,-2),C(0,5,1)$ 等距离的点.
8. 在 xOy 面上找一点,使它的 x 坐标为 1,且与点$(1,-2,2)$ 和点$(2,-1,-4)$ 等距离.

第二节　向量代数

一、向量及其线性运算

1. 向量概念

我们遇到过的物理量有两种,一种是只有大小的量,称为数量,如时间、温度、质量等;另一种是既有大小又有方向的量,称为向量或矢量,如速度、加速度、力等.

数学上,常用一条有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量,记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$(图 7-5).有时也用一个黑体字母或上面带箭头的字母来表示向量.例如向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ 或向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{v},\vec{u}$ 等.

以坐标原点 O 为起点,向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$,这个向量叫做点 M 对于点 O 的向径,常用黑体字 $\boldsymbol{r}$ 表示.

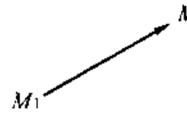

图 7-5

向量的大小叫做该向量的模.向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|$,$|\vec{a}|$.

在研究向量的运算时,常会碰到以下几个特殊向量.

单位向量:模等于 1 的向量称为单位向量.与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$.

零向量:模等于 0 的向量称为零向量,记作 0,零向量没有确定的方向.

逆向量(或负向量):与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的逆向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

此外,我们规定,两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 无论起点是否一致,只要它们平行、方向相同、模相等,就说它们是相等的,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.即经平行移动后两向量能完全重合.允许平行移动的向量称为自由向量.今后我们所讨论的向量都是自由向量.

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加减法

仿照物理学中力的合成,我们可定义向量的加减法如下.

定义1　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个(非零)向量,将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行移动使它们的起点重合于 $\boldsymbol{M}$,并以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,则以 M 为一端的对角线向量 $\overrightarrow{MN}$ 定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图7-6).这种用平行四边形的对角线来定义两个向量的和的方法称为平行四边形法则.

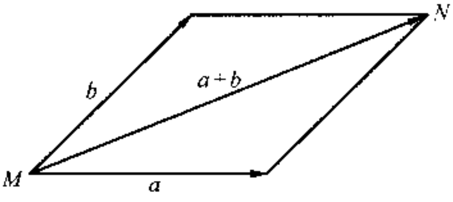

图7-6

由于平行四边形的对边平行而且相等,所以从图7-6可以看出,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可按如下方法得到:把 $\boldsymbol{b}$ 平行移动,使它的起点与 a 的终点重合,这时从 a 的起点到 b 的终点的有向线段 $\overrightarrow{MN}$ 就表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图7-7).这种确定两向量和的方法称为三角形法则.

定义2　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差规定为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的逆向量 $(-\boldsymbol{b})$ 的和:

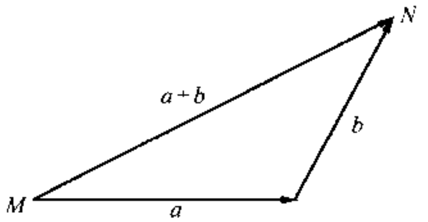

图7-7

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

按定义容易用作图法得到向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$:把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,则从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图7-8).

向量的加法满足下列运算规律:

① 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

② 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

此外,易知

$$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a};\qquad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0.$$

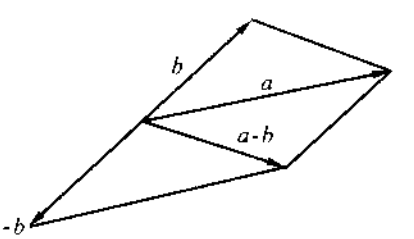

图7-8

(2) 向量与数的乘法

定义3　设 λ 是一个非零实数,$\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,定义 $(\lambda\boldsymbol{a})$ 是这样的一个向量:它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=0$ 时,规定 $(\lambda\boldsymbol{a})=0$.

向量与数的乘法满足下列运算规律(λ,μ 为实数):

① 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

② 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+b)=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda b$.

当 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量时,由向量与数的乘法定义可知,向量 $(\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a})$ 的模等于1,且与 $\boldsymbol{a}$ 同方向,所以有

$$a^0 = \frac{1}{|a|}a.$$

因此,任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 均可表示为

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

二、向量的坐标表示

向量的运算仅靠几何方法有所不便,为此需将向量的运算代数化.下面先介绍向量的坐标表示法.

在空间直角坐标系中,我们将与 x 轴、y 轴、z 轴正向同方向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称它们为基本单位向量.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O,终点为 $M(x,y,z)$.过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,设垂足依次为 P、Q、R(图 7 - 9),则点 P 在 x 轴上的坐标为 x,根据向量与数的乘法运算可得向量 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$,同理 $\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$.再根据向量的加法运算,有

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

我们称 $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式,也记作

$$\boldsymbol{a} = \{x,y,z\}.$$

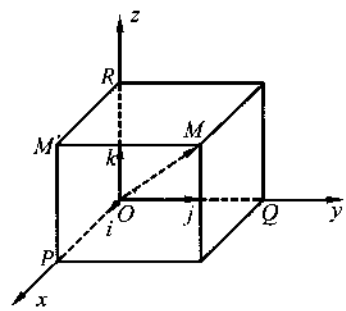

图 7 - 9

一般地,设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$,$M_1$,$M_2$ 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,如图 7 - 10 所示.则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

由此得 $\boldsymbol{a}$ 的坐标依次为:

$$\boldsymbol{a}_x = x_2 - x_1, \boldsymbol{a}_y = y_2 - y_1, \boldsymbol{a}_z = z_2 - z_1,$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 也可记为

$$\boldsymbol{a} = \{a_x,a_y,a_z\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

由此可知,起点不在原点的向量的坐标,恰好等于向量相应的终点坐标与起点坐标之差.

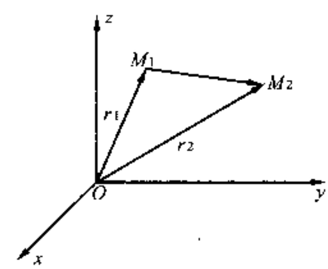

图 7 - 10

利用向量的坐标表示式、向量加法的交换律和结合律,以及数乘向量的结合律与分配律,向量的上述运算可转化为普通的代数运算.设

$$\boldsymbol{a} = (a_x,a_y,a_z), \qquad \boldsymbol{b} = (b_x,b_y,b_z)$$

即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \pm (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}$,($\lambda$ 为数量)

或

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$
$$\lambda \boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

例 1　已知 $\boldsymbol{a} = \{2, -1, -3\}$，$\boldsymbol{b} = \{2, 1, -4\}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{2+2, -1+1, -3+(-4)\} = \{4, 0, -7\}$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \{2-2, -1-1, -3-(-4)\} = \{0, -2, 1\}$，

$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} = \{6, -3, -9\} - \{4, 2, -8\} = \{2, -5, -1\}$.

例 2　从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a} = \{8, 9, -12\}$ 的方向取线段 AB，使 $|\overrightarrow{AB}| = 34$，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为 (x, y, z)，则

$$\overrightarrow{AB} = \{x-2, y+1, z-7\}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的坐标表示式为

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{|M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2}$$
$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

把(7－3)代入(7－1)，又可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的坐标表示式：

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{cases} \tag{7-1}$$

把公式(7－4)的三个等式两边分别平方后相加，可得到

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{7-2}$$

这说明任一向量的方向余弦的平方和等于 1. 由此可见，由任一向量 a 的方向余弦所组成的向量 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 就是 a 方向上的单位向量.

例 3　已知两点 $P_1(2, -2, 5)$、$P_2(-1, 6, 7)$，试求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表示式，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦以及 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向上的单位向量.

解　$\overrightarrow{P_1P_2} = \{-1-2, 6-(-2), 7-5\} = \{-3, 8, 2\}$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{77}$$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦为：$\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{77}}$，$\cos\beta = \dfrac{8}{\sqrt{77}}$，$\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{77}}$. 而 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向上的单位向量为

$$\overrightarrow{P_1P_2}^0 = \frac{1}{\sqrt{77}}\{-3, 8, 2\}.$$

例 4　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$，$\cos\beta = \dfrac{2}{3}$，又 $|\boldsymbol{a}| = 6$. 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐

标.

解 由公式(7-5)可得 $\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} = \pm\frac{2}{3}$,然后由公式(7-1)得到

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha = 2, a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta = 4, a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma = \pm 4.$$

所以 $\boldsymbol{a} = \{2,4,4\}$,或 $\boldsymbol{a} = \{2,4,-4\}$.

按题意可知,$\overrightarrow{AB}$ 上的单位向量与 $\boldsymbol{a}$ 上的单位向量相等,即 $\overrightarrow{AB}^0 = \boldsymbol{a}^0$,又 $|\overrightarrow{AB}| = 34$,$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{8^2+9^2+(-12)^2} = 17$,所以

$$\overrightarrow{AB}^0 = \left\{\frac{x-2}{34},\frac{y+1}{34},\frac{z-7}{34}\right\}, \boldsymbol{a}^0 = \left\{\frac{8}{17},\frac{9}{17},-\frac{12}{17}\right\},$$

因此我们有

$$\frac{x-2}{34} = \frac{8}{17},\frac{y+1}{34} = \frac{9}{17},\frac{z-7}{34} = \frac{-12}{17},$$

解得 $x = 18, y = 17, z = -17$,所以点 B 的坐标为(8,17,-17).

我们知道,向量可由它的模和方向来确定,如果已知一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为(a_x, a_y, a_z),那么,它的模和方向能否用其坐标来表示呢?答案是肯定的.

与平面解析几何中用直线对坐标轴的倾斜角来表示直线的方向相类似,我们可以用向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 与三条坐标轴(正向)的夹角 α,β,γ 来表示其方向,并规定 $0\le\alpha\le\pi$,$0\le\beta\le\pi$,$0\le\gamma\le\pi$(图 7-11).α,β,γ 称为该向量的方向角.

过点 M_1, M_2 各作垂直于三条坐标轴的平面,如图 7-11 所示.可以看出由于 $\angle PM_1M_2 = a$,$M_2P\perp M_1P$,故

$$a_x = M_1P = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\cos\alpha = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$

同理,
$$a_y = M_1p = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\cos\beta = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \qquad (7-1)$$

$$a_z = M_1R = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\cos\gamma = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

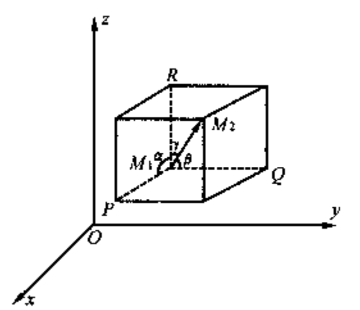

图 7-11

上面三式中出现的不是方向角 α,β,γ 本身而是它们的余弦,因而通常也用数组 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 来表示向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向,称它们为向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦.容易知道这时有

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}. \qquad (7-2)$$

即两向量的数量积等于它们的同名坐标的乘积之和.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,所以当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时有

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \qquad (7-3)$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.从这个公式可以看出,两个非零向量互相垂直的充要条件是

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com