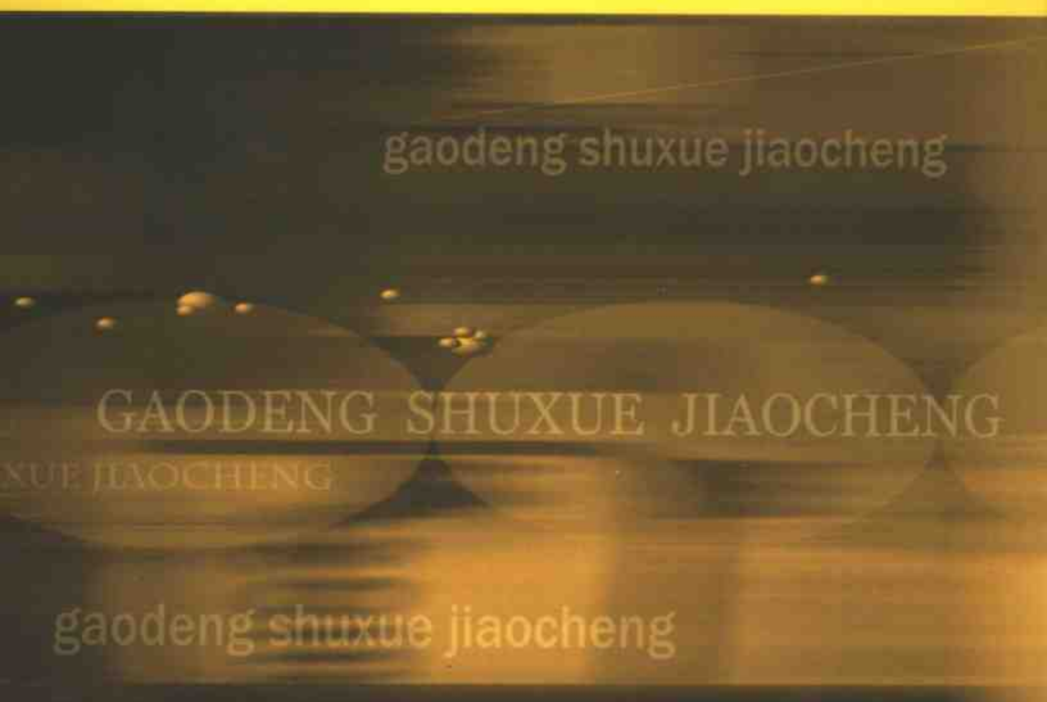
上海大学理学院数学系 编

高等数学教程

（上册）



上海大学出版社
SHANGHAI DAXUE CHUBANSHE

高等数学教程

（上册）

上海大学理学院数学系　编

上海大学出版社
·上海·

内 容 提 要

本书是按照全国高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》编写而成的，分上、中、下三册. 上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分. 中册的内容为定积分、定积分的应用、级数、微分方程. 下册的内容为空间解析几何与向量代数、多元微分学、重积分、曲线与曲面积分.

本册力图从数学的实际应用背景出发，引入一些数学建模的基本思想，围绕高等微积分的主要思想、理论和方法，突出其广泛的应用，并根据学生学习的需求，在书中每节安排了习题(A)、(B)，在每章安排了总复习题，以供学生系统地练习与复习. 本册逻辑推理严谨清晰，叙述通顺浅显，例题典型而广，适合学生自学. 可供综合性大学、高等师范院校的非数学理工类及管理类的本科学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程. 上册/上海大学理学院数学系编.
—上海：上海大学出版社，2005.8(2006.8 重印)
ISBN 7-81058-884-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 上… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 086129 号

责任编辑 王悦生
封面设计 孙 敏

高等数学教程(上册)

上海大学理学院数学系 编
上海大学出版社出版发行
(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)
(http://www.shangdapress.com 发行热线 66135110)
出版人：姚铁军
*
上海第二教育学院印刷厂印刷 各地新华书店经销
开本 890×1240 1/32 印张 9.25 字数 271 千
2005 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 2 次印刷
印数：5 101—11 200 册
ISBN 7-81058-884-2/O·030 定价：19.00 元

序　　言

微积分是人类最伟大的创造发明之一. 在微积分诞生的三百多年间,它已为阐述和解决现实世界中所提出的各种问题提供了强有力的工具. 微积分作为"高等数学"课程的核心内容,也已成为人才培养必须掌握的重要内容.

上海大学是一所全面实行短学期制、学分制和选课制的高等学校,"我们希望学生来到学校是为掌握一种正确的学习方法、工作方法和思想方法,也就是辩证唯物主义的方法. 所学课程也好,专业也好,仅仅是一种载体,通过这个载体使大家掌握这种方法."因此,结合学校的办学理念、体制和机制,编写出一本既反映学习内容和思想方法,同时又能满足学校人才培养目标的教材,是我校培养高素质人才战略的重要组成部分.

"高等数学"是上海大学理工类和管理类大学生的必修课程,微积分中的"以直代曲、先分后合"的这种综合分析方法的辩证思想,其作为一种科学研究方法正逐渐成为各专业大学生必须掌握的一种思想方法,因此"高等数学"也逐步成为其他专业学生的必修或选修课程,它已在我校人才培养中占据极其重要的地位.

教育的目的是培养人,教学应以学生为中心,因此在教学过程中仅仅是教师的讲解是不够的. 一个好的教学过程应该是教师和学生共同构建的互动的整体,充分发挥教师在教学中的核心指导作用,教学为学生着想,学生在学习中能够不断地有所反应和互动作用,这样的教学才会富有成效. 本教材即在以上这些方面作了一些有益的尝试和实践.

上海大学理学院数学系拥有一批长期活跃在教学与科研第一线的教师,他们结合我校教育教学改革的特点,在教学过程进行了许多探索和实践,今天编写完成的《高等数学教程》一书,就是他们长期坚持将教

学和科研相结合的结晶.本教材结合微积分的思想,并试图把数学建模的思想和方法有机地融入到《高等数学教程》的课程教学之中,这是对大学"高等数学"教学改革的初步尝试.它也许能使学生通过对《高等数学教程》的学习,逐步掌握起一种用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力,更能使学生在学习"高等数学"的过程中提高学习兴趣和学习主动性,同时能起到提高学生的自学能力的作用.

在本教材出版之际,我借此机会衷心感谢我校理学院数学系广大教师所发挥的聪明才智和爱岗敬业的精神,为基础理论课程的教学工作所做出的探索和创新.同时也希望使用本教材的广大老师们对教材中存在的不足提出批评和意见,为进一步提高"高等数学"的教学质量,为培养高素质人才做出贡献.

上海大学副校长叶志明

2005 年 7 月 19 日于上海大学新校区

前　言

本书是为综合性大学、高等师范院校的理工类、管理类本科学生编写的高等数学教程，是上海大学组建十多年以来，为满足广大学生后续学习要求，经过多年的教学实践而编写完成的公共基础课教材.

20 世纪后半叶，信息技术获得了超乎想像的发展，数学的应用空前地向一切领域渗透，数学教学的需求也随之不断地扩大. 如何以学生为中心，满足他们后继课程的需要，编写出一本与时俱进的教材是我们努力追求的目标.

本书力图从数学的实际应用背景出发，引入一些数学建模的基本思想，围绕高等微积分的主要思想、理论和方法，突出其广泛的应用. 此外根据学生不同的需求，精心设计了课后习题(A)、(B)和总复习题. 习题(A)是为本课程所有学生准备的必须进行且必须掌握的训练内容，习题(B)是为继续深造的学生准备的训练内容.

本书根据上海大学实行短学期制(三学年三个教学学期、一个实践学期)的特点而编写，分上、中、下三册. 上册主编唐一鸣，中册主编俞国胜，下册主编屠立煌. 全书由邬冬华统稿.

本书的第一、第二、第三章由唐一鸣执笔完成；第四、第五章由应立毅、唐一鸣执笔完成；第六章由应立毅、屠立煌执笔完成；第七章由吴寿柏、屠立煌执笔完成；第八、第九章由俞国胜执笔完成；第十章由姜勤执笔完成；第十一、十二章由任亚娣执笔完成. 各节习题由吴东红、任亚娣、姜勤、应立毅编写完成. 潘宝珍、刘彬清、岳洪、郭伟娟、耿辉、沈裕华、金石明、吴牧、何龙敏等和编写本书的作者一起参加了为编写本教程举行的多次教研活动，他们献计献策，为本书的出版做出了重要贡献.

在本书出版过程中，得到了上海大学校领导和教务处领导的大力

支持;同时也得到了理学院和数学系领导的鼓励和支持;上海大学出版社王悦生编辑为本书出版做了诸多卓有成效的工作,在此一并表示深深的谢意.

编写一本适合时代需求的高质量的高等数学教程实非易事,我们虽然做了一些探索,但限于作者水平,不妥和谬误之处在所难免,希望各位专家和广大师生不吝指正.

编　者

于2005年盛夏

记号与逻辑符号

符号	表示的意义
$\exists$	“存在”或“找到”
$\forall$	“对任何”或“对每一个”
$\Leftrightarrow$	等价，充分且必要，当且仅当
$A\Rightarrow B$	由 A 得到 B
$f: A\to B$	f 是从集合 A 到集合 B 的映射
$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集合
$\mathbf{J}$	无理数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$x\in A$	x 是集合 A 的元素
$A\subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$C=A\cup B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的并集
$C=A\cap B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的交集
$x\in A\cup B$	$x\in A$ 或 $x\in B$
$x\in A\cap B$	$x\in A$ 且 $x\in B$
$C=A\setminus B$	C 是集合 A 与集合 B 的差集
$x\in A\setminus B$	$x\in A$ 但 $x\notin B$(x 不属于 B)
$f\in C([a, b])$	f 属于在$[a, b]$上连续的函数类
$f\in C^1([a, b])$	f 属于在$[a, b]$上具有一阶连续导数的函数类
$f\in R([a, b])$	f 属于在$[a, b]$上黎曼可积的函数类

目　　录

第一章 函数与极限

数学是研究数量关系和空间形式的科学. 初等数学的研究对象基本上是常量,而高等数学的研究对象则是变量. 对于研究数量关系和空间形式来说,必须从变量之间的联系,即函数开始. 而极限方法是研究函数的一种基本工具. 本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 映射与函数

一、集合

1. 集合的概念

集合是数学的一个基础概念. 我们先通过例子来说明这个概念. 例如,一个班级的学生全体构成一个集合,某百货商店现有商品种类的全体构成一个集合,自然数的全体、有理数的全体、实数的全体等都是数的集合. 一般地,若干个(有限个或无限多个)固定事物的全体称为一个集合(简称集). 组成一个集合的事物称为集合的元素(简称元).

通常,用大写英文字母 A、B、C……表示集合,用小写英文字母 a、b、c……表示集合的元素.

设 A 是一个集合,如果 a 是 A 的一个元素,就说 a 属于 A,记作 $a \in A$; 如果 a 不是 A 的一个元素,就说 a 不属于 A,记作 $a \notin A$.

由有限个元素组成的集合,称为有限集. 如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有解就是一个有限集. 不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$. 如方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数解的全体是一个空集. 既不是空集又不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素列举出来，例如由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\};$$

另一种是描述法，如果集合 A 是具有某种确定性质 p 的元素 x 所构成的集合，则可表示成

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

例如集合 S 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集，就可表示成

$$S = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}.$$

对于数集，经常在表示数集的字母的右上角标上“ * ”来表示该数集内排除 0 的集，标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集. 例如，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^*$ 为排除数 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 为全体正实数的集.

下面讨论集合之间的关系.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B 中）或 $B \supset A$（读作 B 包含 A）. 例如自然数集 $\mathbf{N}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集.

如果 $A \subset B$，并且至少存在 B 的一个元素 x 不属于 A，则称 A 是

B 的真子集. 对于任何集合 A，显然有 $A\subset A$，并且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$.

如果集合 A 与 B 互为子集，即 $A\subset B$，并且 $B\subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$. 例如：

$$\{x\mid x\in \mathbf{R},\ x^2-4\geqslant 0,\ x^2-4x<0\}=\{x\mid x\in \mathbf{R},\ 2\leqslant x<4\}.$$

设 A、B 为两个集合，由集合 A 与集合 B 的所有元素构成的集合称之为 A 与 B 的并（或和）集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由既属于 A 又属于 B 的元素全体构成的集合，称之为 A 与 B 的交（或通）集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由属于 A 但不属于 B 的元素全体构成的集合，称之为 A 与 B 的差集，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

如果 $B\subset A$，则称差集 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的余（或补）集，记作 $\complement_A B$.

2. 区间和邻域

在微积分中最常用的一类实数集是区间. 设 $a,\ b\in\mathbf{R},\ a<b$，记

$$(a,\ b)=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ a<x<b\};$$

$$[a,\ b]=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ a\leqslant x\leqslant b\};$$

$$[a,\ b)=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ a\leqslant x<b\};$$

$$(a,\ b]=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ a<x\leqslant b\}.$$

称它们为以 a 为左端点、b 为右端点的区间. 特别地，称 $(a,\ b)$ 为开区间，$[a,\ b]$ 为闭区间. 上述区间都称为有限区间，$b-a$ 称为上述区间的长度.

同样地，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），记

$$[a,\ +\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\geqslant a\};$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > a\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \leqslant b\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

上述区间都称为无限区间. 有限区间与无限区间统称为区间. 一般情况下,区间通常用 I 表示.

邻域是一种常用的集合,以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数,点 a 的 δ 邻域记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

或

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\};$$

点 a 的去心 δ 邻域记作 $\mathring{U}(a, \delta)$,即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

3. 常用的逻辑符号

符号"$\forall$"代表"任意给定"的意思. 如"任意给定的一个实数 x"可记作"$\forall x \in \mathbf{R}$".

符号"$\exists$"代表"存在"的意思.

符号"$\Rightarrow$"代表"蕴涵"或"推得". 例如"$A \Rightarrow B$"是指,若命题 A 成立,则命题 B 成立;或命题 A 蕴涵命题 B. 此时称 A 是 B 的充分条件,同时也称 B 是 A 的必要条件.

符号"$\Leftrightarrow$"代表"充分必要"或"等价". 例如"$A \Leftrightarrow B$"代表命题 A 与命题 B 等价,或命题 A 蕴涵命题 B,同时命题 B 也蕴涵命题 A. 即"$A \Rightarrow B$"与"$B \Rightarrow A$"同时成立.

二、映射

1. 映射的概念

定义 设 X、Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X

中每个元素 x，按照法则 f，使其在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的像，记作 $f(x)$，即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

对于映射的定义应当注意的是：

(1) 构成一个映射须具备三个要素：(i) 集合 X，即定义域 $D_f = X$；(ii) 集合 Y，即值域 $R_f \subset Y$；(iii) 对应法则 f，它使每一个 $x \in X$，有惟一确定的像 $y = f(x)$（见图 1-1）.

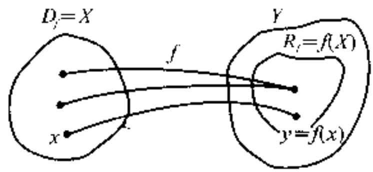


图 1-1

(2) 对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是惟一的；反之，对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是惟一的（见图 1-1）.

(3) 映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f = Y$（见图 1-1）.

例 1 映射 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. 对 $\forall x \in \mathbf{R}$，$f(x) = x^2$. 定义域 $D_f = \mathbf{R}$. 值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$，$R_f$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对 R_f 中元素 y，除 $y = 0$ 外，它的原像不惟一. 例如 $y = 9$ 的原像为 $x = 3$ 和 $x = -3$.

如果存在两个映射 f、g，它们的定义域相同，且映射的对应法则相同，则称映射 f 和 g 是相同的.

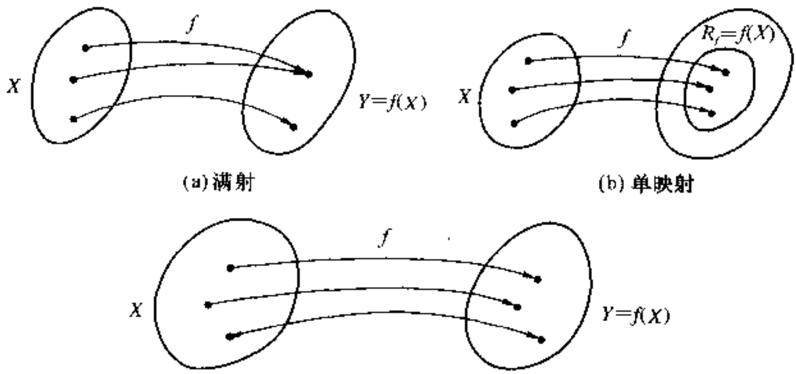
2. 几类重要映射、逆映射和复合映射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射：

(1) 如果 $R_f = Y$，即 $R_f = Y$ 中的任一元素 y，都存在 X 中的元素 x（一个或几个）使 $f(x) = y$，则称 f 为 X 到 Y 上的满射.

(2) 如果对于 R_f 中的任一元素 y，都存在 X 中惟一的元素 x，使 $f(x)=y$，或者等价地，对于 X 中任意两个不同的元素 $x_1 \neq x_2$，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是一个单(映)射.

(3) 如果 f 既是满射，又是单(映)射，也就是说，对于 Y 中的每个元素 y，都存在 X 中的惟一的元素 x，使 $f(x)=y$，则称 f 是一个双射(图 1-2).



(a) 满射　　(b) 单映射

(c) 双射

图 1-2

例 2　设 $X_1=(-\infty,+\infty)$，$X_2=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$Y_1=(-\infty,+\infty)$，$Y_2=[-1,1]$. 若 $f_1: X_1 \to Y_1$，$f_1(x)=\sin x$，则 f_1 为 X_1 到 Y_1 的映射，非满射，又非单射. 若 $f_2: X_1 \to Y_2$，$f_2(x)=\sin x$，则 f_2 为 X_1 到 Y_2 的满射，但非单射. 若 $f_3: X_2 \to Y_1$，$f_3(x)=\sin x$，则 f_3 为 X_2 到 Y_1 的单射，但非满射. 若 $f_4: X_2 \to Y_2$，$f_4(x)=\sin x$，则 f_4 为 X_2 到 Y_2 的满射，又是单射，是一个双射.

设 f 是 X 到 Y 的单射，则对于每个 $y \in R_f$，有惟一的 $x \in X$，适合 $f(x)=y$，这样我们可以定义一个从 R_f 到 X 的映射，称它为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，即

$$f^{-1}: R_f \to X,$$

其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域为 $R_{f^{-1}} = X$.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1, \quad f: Y_2 \to Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定义一个从 X 到 Z 的对应法则，它把任一个元素 $x \in X$ 映成 $f(g(x)) \in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，我们把满足上述条件的映射称为 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g: X \to Z,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in X.$$

例 3 若映射 $g: \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $g(x) = \sin x$; $f: [-1, 1] \to [0, 1]$, $f(u) = u^2$，则复合映射 $f \circ g: \mathbf{R} \to [0, 1]$, $(f \circ g)(x) = f(\sin x) = (\sin x)^2$.

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是 g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g \subset D_f$. 否则，不能构成复合映射. 由此可知，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 都有意义，复合映射 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 并不一定相同.

三、函数

我们通常把从实数集（或其子集）X 到实数集 Y 的映射称为定义在 X 上的函数.

定义 设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，或记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中集合 D 称为函数 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

定义域 D_f 中的数 x 所对应的数 y 记作 $f(x)$，称为点 x 的函数值. 此时，x 称为自变量，函数值 y 或 $f(x)$ 称为因变量. 函数值的全体称为函数 f 的值域，记作 R_f，或 $f(D)$，即