

俄罗斯数学
教材选译

数学分析讲义

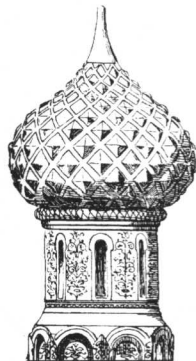
(第3版)

□ Г. И. 阿黑波夫 В. А. 萨多夫尼奇 В. Н. 丘巴里阔夫 著

□ 王昆扬 译



高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

数学分析讲义

(第3版)

☐ Г. И. 阿黑波夫 В. А. 萨多夫尼奇 В. Н. 丘巴里阔夫 著

☐ 王昆扬 译



高等教育出版社

Higher Education Press

图字: 01-2006-2998 号

Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков
Лекции по Математическому Анализу, 2004

Originally published in Russian under the title
Lectures of Mathematical Analysis

by G. I. Arhipov, V. A. Sadovnichii, V. N. Chubarikov

Copyright © G. I. Arhipov, V. A. Sadovnichii, V. N. Chubarikov
All Rights Reserved

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析讲义: 第 3 版 / (俄罗斯) 阿黑波夫, (俄罗斯) 萨多夫尼奇, (俄罗斯) 丘巴里阔夫著; 王昆扬译. —北京: 高等教育出版社, 2006.6

ISBN 7-04-018306-4

I. 数... II. ①阿...②萨...③丘...④王...

III. 数学分析 - 高等学校 - 教材 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 057603 号

策划编辑 张小萍
责任印制 朱学忠

责任编辑 赵天夫

封面设计 王凌波

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000
经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京新丰印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×1092 1/16
印 张 35.75
字 数 650 000

版 次 2006 年 6 月第 1 版
印 次 2006 年 6 月第 1 次印刷
定 价 65.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18306-00

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话: (010) 58581897/58581896/58581879

传 真: (010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址: 北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编: 100011

购书请拨打: (010)58581118

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

原书的序

在高等学校中完善教学内容和教学方法这个由来已久的问题，在我们的社会变革中获得了特别的现实性。数学教育的最重要的基础是编写针对教学理论与实践的现代需要的教科书。

大科学家常有这样的风格，即以局外人的角度来观察通往所考察的问题的本质的各种相互矛盾的途径。我们著名的同胞 Н. И. 罗巴切夫斯基写道：“我确信这一真理，概念不应该靠死记硬背来获得，而应该从一开始就准确地、明晰地、确定地进行举一反三的消化，然后通过练习来巩固，以便通过练习将其深印于记忆之中，从而在日后的研究中能容易地予以使用。”本讲义的编写原则与著名学者的话是相近的。

《数学分析讲义》一书是一部符合综合大学和高等师范院校数学力学系该学科的大纲的教科书。如实践所表明，此书亦可成功地为注重深入的数学研究的工科高等学校的学生所使用。

书中还解决了这样一个问题，即分离出必要的最低限度的为学好基本知识提供保障的附加材料。作者们力图把叙述的通俗性与教科书所固有的严谨性结合起来。高等学校的高等数学教学进程是从数学分析这一学科开始的。此时，新概念之复杂及其数量之庞大常常压抑了对于课程内容的创造性理解。为了正确地帮助读者尽快地进入状态，我们有意识地允许论断具有一定的局限性——在学习过程中，读者自己会扩展到事物的各种不同的观点之间相互联系着的各个方面去。

数学分析的教学应该服从于为高级专门人才做必要的准备的特定的要求。这些高级专门人才应该能在将来不仅获得新的学术成果而且还能在很大程度上决定数学的世界性的发展。据此，数学分析课程作为整个数学教育的基础应该具有这样的特点：广泛地占有材料，严格而完全地进行证明。此课程应该顾及数学发展的现代趋

势, 同时应与顽固的保守主义相区别而继承保持祖国的数学的学校教育世代代居于领先地位的教学传统. 分析课程也还应该准备好吸收更深刻的数学概念.

作者们首先力图通过通俗易懂的叙述以及证明的简化来减轻学习知识的负担. 应该注意, 短的证明并不总是简单的. 有时候越是短的证明越是难懂, 且实质上使内容的掌握更为困难. 我们的作法的出发点是, 应该使命题的证明和引入的例子都明显地具有鲜活性、趣味性, 有说服力并且具有非同寻常的简洁性. 为使论述和命题的写法更为简洁, 人们常常使用量词符号. 但是这常会使直接掌握所学内容变得困难, 并可能会限制对于逻辑推理的关注. 我们决不随便使用这些符号, 以便更易于把抽象概念与我们所能感知的外部世界的类似现象进行对照, 使概念更为直观.

下述内容似乎是首次载入教科书的: 依海涅意义的函数极限的一般概念, 欧拉求和公式、阿贝尔求和公式以及泊松求和公式的简单叙述, 关于若尔当可测性与黎曼可积性的联系的定理, 关于多重极限与累次极限的联系的定理, 关于沿集合基的两个累次极限相等的马尔可夫-戈登准则, 关于无穷行列式的庞加莱定理, 一般的斯托克斯公式基于推广三维向量分析的经典定理的经典方法的证明的叙述, 等等.

最后, 作者们对于 M. 3. 伽拉叶夫, Φ . M. 马雷舍夫, A. M. 波罗苏叶夫, E. A. 什里亚叶夫以及我们的全体同事为本书以前各版的内容所作的各种有益的评论表示深深的感谢.

俄罗斯科学院院士

B. A. 萨多夫尼奇

俄罗斯数学教材选译

• 数学天元基金资助项目 •

书名	作者
* 数学分析 (第一卷) (第 4 版)	B. A. 卓里奇
数学分析 (第二卷) (第 4 版)	B. A. 卓里奇
* 微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 数学分析讲义 (第 3 版)	Г. И. 阿黑波夫, B. A. 萨多夫尼奇, B. H. 丘巴里阔夫
代数学引论 I: 基础代数	A. И. 柯斯特利金
代数学引论 II: 线性代数	A. И. 柯斯特利金
代数学引论 III: 代数结构基础	A. И. 柯斯特利金
* 微分几何与拓扑学简明教程	A. C. 米先柯, A. T. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (第一卷) 几何曲面、变换群与场 (第 5 版)	B. A. 杜布洛文, C. П. 诺维可夫, A. T. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	B. A. 杜布洛文, C. П. 诺维可夫, A. T. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 5 版)	B. A. 杜布洛文, C. П. 诺维可夫, A. T. 福明柯
* 函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	A. H. 柯尔莫戈洛夫, C. B. 佛明
* 复变函数论方法 (第 6 版)	M. A. 拉夫连季耶夫, B. B. 沙巴特
* 常微分方程 (第 6 版)	Л. С. 庞特里亚金
随机过程论	A. B. 布林斯基, A. H. 施利亚耶夫
* 经典力学中的数学方法 (第 4 版)	B. И. 阿诺尔德
* 理论力学 (第 3 版)	A. П. 马尔契夫
连续介质力学 (I)	Л. И. 谢多夫
连续介质力学 (II)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 * 者已出版.

订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购. 书款通过邮局汇款或银行转帐均可.
购书免邮费, 发票随后寄出.

通过邮局汇款:

北京西城区德外大街 4 号高教读者服务部
邮政编码: 100011

通过银行转帐:

单位名称: 北京高教沙滩读者服务部
开户行: 北京银行德外支行
银行帐号: 700120102030302
单位地址: 北京西城区德外大街 4 号
电 话: 010-58581118, 010-58581117,
010-58581116, 010-58581115, 010-58581114
传 真: 010-58581113

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序

原书的序

第一部分 单变量函数的微分学	1
第一章 引论	3
第一讲	
§1. 集合, 集合的运算, 集合的笛卡儿乘积, 映射和函数	3
第二讲	
§2. 对等的集合, 可数集和不可数集, 连续统的势	9
第三讲	
§3. 实数	13
第四讲	
§4. 实数集的完备性	19
§5. 关于集合的分离性的引理, 关于嵌套闭区间系的引理以及关于收缩闭区间序列的引理	22

第二章 数列的极限	24
第五讲	
§1. 数学归纳法、牛顿二项式以及伯努利不等式	24
§2. 数列、无穷小数列和无穷大数列及其性质	27
第六讲	
§3. 数列的极限	30
§4. 不等式中的极限过程	33
第七讲	
§5. 单调数列, 魏尔斯特拉斯定理, 数“ e ”和欧拉常数	35
第八讲	
§6. 关于有界数列存在部分极限的波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理	41
§7. 数列收敛的柯西准则	42
第三章 函数在一点处的极限	45
第九讲	
§1. 数值函数的极限的概念	45
§2. 集合基, 函数沿着基的极限	47
第十讲	
§3. 在不等式中取极限	52
§4. 函数沿着基存在极限的柯西准则	53
第十一讲	
§5. 柯西的收敛定义与海涅的收敛定义的等价性	55
§6. 关于复合函数的极限的定理	56
§7. 无穷小函数的阶	59
第四章 函数在一点处的连续性	61
第十二讲	
§1. 在一点处连续的函数的性质	61
§2. 初等函数的连续性	63
第十三讲	
§3. 重要的极限	65
§4. 函数在集合上的连续性	67

第十四讲

- §5. 闭区间上的连续函数的一般性质 73

第十五讲

- §6. 一致连续的概念 75
- §7. 闭集和开集的性质. 紧致性. 紧致集上的连续函数 76

第五章 单变量函数的微分 80**第十六讲**

- §1. 函数的增量. 函数的微分和导数 80

第十七讲

- §2. 复合函数的微分 84
- §3. 微分法则 86

第十八讲

- §4. 高阶导数和高阶微分 89
- §5. 函数在一点处的增与减 93

第十九讲

- §6. 罗尔定理, 柯西定理以及拉格朗日定理 94

第二十讲

- §7. 拉格朗日定理的推论 98
- §8. 一些不等式 99
- §9. 以参数形式给出的函数的导数 100

第二十一讲

- §10. 不定式的展开 101

第二十二讲

- §11. 局部泰勒公式 106
- §12. 带有一般型余项的泰勒公式 110

第二十三讲

- §13. 泰勒公式对于某些函数的应用 112

第二十四讲

- §14. 借助于导数研究函数. 极值点. 凸性 115

第二十五讲

- §15. 拐点 120

第二十六讲	
§16. 插值	124
第二十七讲	
§17. 割线法和切线法 (牛顿法). 快速计算	126
第六章 不定积分.	131
第二十八讲	
§1. 真实原函数. 可积函数	131
第二十九讲	
§2. 不定积分的性质	133
第三十讲	
补充. 按海涅方式的极限概念向沿集合基收敛的函数的推广	137
第二部分 黎曼积分. 多变量函数的微分学	143
第七章 定积分	145
第一讲	
§1. 引言	145
§2. 黎曼积分的定义	146
第二讲	
§3. 黎曼可积的准则	150
第三讲	
§4. 函数黎曼可积的三个条件的等价性	154
§5. 函数黎曼可积的特殊准则	156
§6. 积分和方法	158
第四讲	
§7. 黎曼积分作为沿着基的极限的性质	161
§8. 黎曼可积函数类	165
第五讲	
§9. 定积分的性质	167
§10. 黎曼积分的可加性	171

第八章 黎曼积分理论的基本定理	173
第六讲	
§1. 黎曼积分作为其积分上限 (下限) 的函数. 积分的导数	173
§2. 牛顿-莱布尼茨定理	174
第七讲	
§3. 定积分的变量变换公式与分部积分公式	177
§4. 关于积分中间值的第一定理和第二定理	178
第八讲	
§5. 带有积分形式余项的泰勒公式	183
§6. 包含积分的不等式	188
第九讲	
§7. 函数黎曼可积的勒贝格准则	189
§8. 勒贝格准则的证明	191
第九章 反常积分	194
第十讲	
§1. 第一类和第二类反常积分的定义	194
§2. 反常积分收敛的柯西准则和收敛的充分条件	196
§3. 反常积分的绝对收敛和条件收敛. 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法	196
第十一讲	
§4. 第二类反常积分	198
§5. 反常积分的变量变换及分部积分	200
第十章 曲线的长度	202
第十二讲	
§1. 多维空间中的曲线	202
§2. 关于曲线长度的定理	203
第十一章 若尔当测度	207
第十三讲	
§1. 平面图形的面积和立体的体积. 若尔当测度的定义	207
§2. 集合的若尔当可测准则	209
第十四讲	
§3. 若尔当测度的性质	211

§4. 可求长曲线的可测性	213
§5. 函数的黎曼可积性与它所成的曲边梯形的若尔当可测性之间的关系 . .	214
第十二章 勒贝格测度论与勒贝格积分论初步. 斯蒂尔切斯积分 . .	217
第十五讲	
§1. 勒贝格测度的定义和性质	217
第十六讲	
§2. 勒贝格积分	222
第十七讲	
§3. 斯蒂尔切斯积分	226
第十三章 一般拓扑学的某些概念. 度量空间.	234
第十八讲	
§1. 空间的定义及基本性质.	234
第十九讲	
§2. 度量空间在自然拓扑之下的豪斯多夫性质.	239
§3. 度量空间中集合的内点、外点和边界点	240
§4. 关于收缩球序列的引理. 压缩映射原理	242
第二十讲	
§5. 度量空间的连续映射	243
§6. 紧集的概念. $\mathbb{R}^n$ 中的紧集及空间 $\mathbb{R}^n$ 的完备性. 紧集上的连续函数的性质	244
§7. 连通集及连续性	247
第十四章 多变量函数的微分学	248
第二十一讲	
§1. $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.	248
§2. $\mathbb{R}^n$ 上的可微函数.	250
第二十二讲	
§3. 复合函数的微分法	253
§4. 方向导数. 梯度	254
§5. 微分的几何意义	255
第二十三讲	
§6. 高阶偏导数	256

§7. 高阶微分, 泰勒公式	258
第二十四讲	
§8. 泰勒公式的应用, 多变量函数的局部极值	261
§9. 隐函数	263
第二十五讲	
§10. 隐函数组	267
§11. 多变量函数的条件极值	271
§12. 可微映射, 雅可比矩阵	273
 第三部分 函数级数与参变积分	 275
第十五章 数值级数	277
第一讲	
§1. 收敛级数的基本性质, 柯西准则	277
第二讲	
§2. 非负项级数	283
第三讲	
§3. 非负项级数收敛的基本判别法	287
第四讲	
§4. 级数的绝对收敛和条件收敛, 莱布尼茨级数	293
§5. 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法	295
第五讲	
§6. 级数的项的重排	297
第六讲	
§7. 对于收敛数列的算术运算	299
第七讲	
§8. 二重级数和累次级数	303
 第十六章 函数序列与函数级数	 309
第八讲	
§1. 函数级数之收敛	309
§2. 一致收敛	312

第九讲

- §3. 函数序列一致收敛的准则 314
- §4. 一致收敛判别法 316

第十讲

- §5. 迪尼定理 319
- §6. 级数的逐项微分和逐项积分 320

第十一讲

- §7. 沿集合基的二重极限与累次极限 324

第十二讲

- §8. 幂级数 327

第十三讲

- §9. 无穷乘积 331

第十四讲

- §10. 无穷行列式 335
- §11. 等度连续及阿尔泽拉定理 338

第十七章 依赖于参数的积分 340**第十五讲**

- §1. 正常参变积分及其连续性 340
- §2. 正常参变积分的微分和积分 342

第十六讲

- §3. 拉格朗日定理 346

第十七讲

- §4. 按海涅意义的一致收敛 348
- §5. 一致收敛的两个定义的等价性 349

第十八讲

- §6. 反常参变积分之一致收敛 352

第十九讲

- §7. 反常积分关于参数的连续性, 可微性和可积性 355

第二十讲

- §8. 第二类反常积分 360
- §9. 参变积分理论的应用 361