中学学科能力训练

BEIKAO JIAOCHENG

备考教程

高二数学

[第二版]

唐国庆◎主编

大连理工大学出版社 Dalian University of Technology Press

中学学科能力训练

备考教程

高二数学

图书在版编目(CIP)数据

备考教程 高二数学/唐国庆主编.—2版.—大连:大连理工大学出版社,2002.6
中学学科能力训练
ISBN 7-5611-1781-7

Ⅰ.备… Ⅱ.唐… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第05918号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码 116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连业发印刷有限公司印刷

开本:880毫米×1230毫米 1/32 字数:501千字 印张:12.875 插页:2
印数:30001—60000册
2001年7月第1版 2002年6月第2版
2002年6月第2次印刷

责任编辑:郑淑芹 责任校对:董作同
封面设计:孙宝福 版式设计:孙宝福

定价:14.00元

BEIKAO JIAOCHENG

第二版

主　编／唐国庆
副主编／黄仁寿　贺功保
编　者／陈　锋　黄仁寿　涂立奇
李　爽　李　建　李松云
张晓辉　吴有根　吴江根
张晓霞

大连理工大学出版社　Dalian University of Technology Press

Xu Yan 序言

中学是人生最重要的学习阶段之一，中学时期奠定了什么样的学习基础，不仅对学生是否能成才具有决定性的影响，而且和人的一生的发展都有密切关系。同时，在中学教育中，培养出高素质的下一代，更是祖国未来的希望，社会进步的保证。

新中国成立后特别是改革开放以来，我国基础教育的改革与发展取得了举世瞩目的巨大成就，基础教育课程体系随着社会的进步也在不断发展和完善。当前，科学技术高速发展，信息技术广泛应用，国际竞争日趋激烈，基础教育在培养新一代建设者和接班人方面肩负的责任更加重大。在第三次全国教育工作会议上，中共中央和国务院发布了《关于继续深化教育改革，全面推进素质教育的决定》；2000年春，江泽民主席发表了《关于教育问题的谈话》，新一轮基础教育课程改革正逐步在全国推进。这次改革的目标，是要全面贯彻国家教育方针，提高国民素质，培养学生的创新能力和实践能力，培养学生终身学习的愿望和能力，培养学生对自然和社会的责任感，为造就德智体美等全面发展的社会主义事业接班人奠定基础。

随着基础教育课程设置、培养目标、课程内容、教学过程、教学方法、评估与考试制度等的改革，对中学生的综合素质、学习能力等

也都提出了新的挑战和要求。如何在当前教育体制改革、素质教育全面展开的背景下，科学有效地提高学习能力，成为摆在每一个中学生、教师和家长面前的重要问题。就目前来看，高质量、创造性地掌握教材要求的学习内容，仍是中学生学习的主要方面，而对这种学习的评价方式，考试仍是一个重要的手段。具有较高质量的教辅读物，对学生的学习能力和备考能力以及考试成绩的提高，仍还有一定的作用。大连理工大学出版社组织有关教师和教学研究人员编写出版的《中学学科能力训练——备考教程》，就是这样的一套与中学新版教材配套的同步学习、能力训练和检测的综合性备考辅导书，对学生的学习和备考都具有一定的参考价值。

该丛书包括了初中、高中阶段的主要学科，分为语文、数学、英语、物理、化学、生物等系列。每一种都分别设置了知识精讲、经典题析、拓展迁移和能力训练等几个栏目。在这些栏目中，编者简明扼要地指出了教材知识的重点难点，精心设计了知识和能力的拓展迁移讲解，点拨了相应的学习方法技巧，精选和设计了典型例题，并对解题的技巧加以讲解。编者在丛书中，非常注重实用性，紧扣新教材，注意方法的点拨，重视训练的方法，较好地体现了素质教育的要求。我相信，如果运用得当，这套丛书是能够给渴望在学习中取得好成绩的莘莘学子以切实帮助的。

中国教育学会中学语文教学专业委员会副秘书长
教育部课程教材研究所中学语文教材研究开发中心副主任
人民教育出版社中学语文室副主任

顾之川

修订版 Xiu Ding Ban QianYan 前言

《中学学科能力训练——备考教程》丛书问世已经两年了。两年来，该丛书得到了广大中学师生的认可，在众多的教辅读物中产生了很好的反响，并占据了很大的市场份额，同时广大中学师生对本套丛书也提出了很多有价值的宝贵意见。编者根据这些意见及教育部最新教学大纲和 2002 年新版教材重新精心修订编写了这套丛书。

本丛书是与人教社最新版统编教材配套使用的同步学习、能力训练和检测的综合性备考辅导书，本次修订在原语文、数学、英语、物理、化学五个学科基础上，又增补了生物学科，共六个学科系列。尤其是本次修订针对最新的中考、高考改革精神和命题方向，***围绕"创新"二字更换了新的典型例题及能力训练题，并精选了一些 2001 年最新的中考、高考真题。***

本次修订，我们对本丛书的体例结构也做了精心调整，每册书均与教材同步，每节设置了*知识精讲*、*经典题析*、*拓展迁移*和*能力训练*四个栏目，每章末设置有*本章小结*及*综合能力检测*两个板块。

▶*知识精讲*：对本节的学习要求及知识点简明扼要透彻

讲解，同时把考纲的要求分解到每节的知识点中。

▶*经典题析*：精心选编具有代表性、新颖性、技巧性与综合性的例题，包括选择近年来若干中考、高考真题，予以详细的分析、点评或说明。

▶*拓展迁移*：本栏目此次修订较大，它围绕“创新”二字，努力体现“3+X”高考改革背景下的教育新理念，从知识和能力两个层面上拓展，对解题思路及方法做发散思维迁移训练，并注重学科之间的上下联系、相互贯通，力求做到“一题多解”、“举一反三”。

▶*能力训练*：对应本节知识点内容，针对中考、高考要求，精心选择适量的训练题。特别是，此次修订时我们将训练题按从易到难的程度分为基础题、综合题、创新题三个层次，供学生强化训练，并在其后附有答案，对较难的题给予一定的提示。

▶*本章小结*：对本章所学知识进行归纳梳理，尤其是对本章的重难点及中考、高考命题方向和热点进行分析。

▶*综合能力检测*：通过具有一定难度的学科内综合性试题或跨学科综合性试题，让学生对掌握本章内容的程度进行检测，进一步提高综合解决问题的能力，循序渐进巩固所学知识。

本丛书特色在于：在注重提高学生智能素质的基础上，突出综合性和应试性，同时在同步讲练中追求层次和梯度的适度把握。*综合性*既体现在学科内知识的贯通、衔接上，又反映出学科间知识的相互渗透、纵横联系。*应试性*体现在，对应每部分知识点练习时，尽量择取近年来中考、高考真题，充分关注最新的中考、高考的动态信息，强化备考意识和实战训练。

本丛书由长期从事一线教学的具有丰富教学经验和备考辅导经验的中学特级、高级教师编写，作者队伍阵容庞大、经验丰富，因此它既可作为教师备课、教学的参考，更可成为广大中学生朋友学习、备考的好帮手。

目录 MULU

第六章

不等式

6.1 不等式的性质

知识精讲

1.不等式的对称性

若 $a>b$,则 $b<a$,反之亦然。

2.不等式的传递性

若 $a>b,b>c$,则 $a>c$。

3.加法的单调性

若 $a>b$,则 $a+c>b+c$。

由加法的单调性可得:

(1)不等式的移项法则:若 $a+c>b$,则 $a>b-c$;

(2)同向不等式可以相加:若 $a>b,c>d$,则 $a+c>b+d$;

(3)异向不等式可以相减:若 $a>b,c<d$,则 $a-c>b-d$。

4.乘法的单调性

若 $a>b$,则

$$ac\begin{cases}>bc & (c>0\text{时})\\=bc & (c=0\text{时})\\<bc & (c<0\text{时})\end{cases}$$

对于等式,$a=b\Rightarrow ac=bc$,不论 c 是正数、负数还是零都是成立的。而对于不等式 $a>b$,两边同乘以 c 之后,ac 与 bc 的大小关系就需对 c 加以讨论而确定。由此造成了关于不等式的乘法、除法、乘幂和方根等性质与相应等式的不同。事实上,不等式的此条性质与前面的三条相结合,可推出如下的关系:

(1)若 $a>b>0,c>d>0$,则 $ac>bd$;

(2)$a>b>0,c>d>0$,则$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$;

(3)若 $a>b>0$,则 $a^n>b^n(n\in N^*)$;

(4)若 $a>b>0$,则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N)$。

经典题析

【例1】 1993年全国高考题　若 a,b 是任意实数，且 $a>b$ 则（　）。

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

解析　答案：D　$a>b$ 并不保证 a,b 均为正数，从而不能保证 A、B 成立。又 $a>b\Rightarrow a-b>0$，但不能保证 $a-b>1$，从而不能保证 C 成立。显然只有 D 成立。事实上，指数函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 是减函数，所以 $a>b\Leftrightarrow(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$。

➡**点评**　这是一道非常基础的题目，直接考查不等式的基本性质成立的条件以及对数函数、指数函数的基本性质。

【例2】 设 $60<a<84,28<b<33$，求 $a-b,\frac{a}{b}$ 的取值范围。

分析　$a-b$ 的取值范围由同向不等式可以相加，或异向不等式可以相减直接推出，求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围可用不等式乘法的单调性及其推出的结论。

解　由题设　$60<a<84$　①

$28<b<33$　②

②可化为　$33>b>28$　③

由① - ③，得　$27<a-b<56$

由②得　$\frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28}$　④

由①×④，得　$\frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$

故 $a-b$ 的取值范围是 $(27,56)$，$\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $(\frac{20}{11},3)$。

➡**说明**　解题中要防止错用不等式的性质，出现下面的错解：

由① - ②得　$32<a-b<51$

由①÷②得　$\frac{60}{28}<\frac{a}{b}<\frac{84}{33}$

“同向不等式不能相减”，“异向不等式不能相加”，解题中要切记。

【例3】 若 $n\in Z$，且 $n^{200}<5^{300}$，求 n 的最大值和最小值。

分析　可先利用 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，将不等式两边“降次”处理，从而化简不等式。

解　$\because$　$n^{200}<5^{300}$，

$\therefore$　$(n^2)^{100}<(5^3)^{100}$

即　$n^2<5^3=125$

由此得 $$-\sqrt{125} < n < \sqrt{125}$$

又 $n \in Z$,故 n 的最小值为 -11,最大值为 11。

➡ **点评** 要注意 $n \in Z$ 的特点,否则得出错误结论:n 的最小值为 $-\sqrt{125}$,最大值为 $\sqrt{125}$。

【例 4】 已知 $a > b$,且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,求证:$a > 0, b < 0$,并判断它的逆命题是否成立。

分析 可由条件利用不等式的性质推出结论。

证明 $\because \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$$

即 $$\frac{b-a}{ab} > 0$$

又 $a > b$,故 $$b - a < 0$$

$\therefore \quad ab < 0$

即 a, b 符号相异,结合 $a > b$ 可知:$a > 0, b < 0$。

反之,若 $a > 0, b < 0$,显然有 $a > b$,且 $ab < 0$。

由不等式 $a > b$ 两边同除以负数 ab,可得 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$,即 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$。

故原命题的逆命题亦成立。

拓展迁移

1. 数式大小关系的比较

【例 5】 (1)若 $x < y < 0$,试比较 $(x^2+y^2)(x-y)$ 与 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小;

(2)设 $a > 0, b > 0$ 且 $a \neq b$,试比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小。

解 (1)根据题目的特征,可考虑差值比较法

$(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]$

$=-2xy(x-y)$

$\because \quad x < y < 0 \quad \therefore xy > 0, x-y < 0$

$\therefore \quad -2xy(x-y) > 0$

$\therefore \quad (x^2+y^2)(x-y) > (x^2-y^2)(x+y)$

(2)根据同底数幂的运算法则,可考虑用比值比较法。

$\frac{a^a b^b}{a^b b^a} = a^{a-b} b^{b-a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{(a-b)}$

当 $a > b > 0$ 时，$\frac{a}{b} > 1, a - b > 0$，则 $\left(\frac{a}{b}\right)^{(a-b)} > 1$

$\therefore \quad a^a b^b > a^b b^a$

当 $b > a > 0$ 时，$0 < \frac{a}{b} < 1, a - b < 0$，则 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$

$\therefore \quad a^a b^b > a^b b^a$

综上所述，不相等的两正数 a、b，都有 $a^a b^b > a^b b^a$

➡**说明** 实数大小的比较问题常用不等式的基本性质，用作差法或作商法进行比较，比较法的关键是第二步变形，一般说，变形越彻底，越有利于下一步的判断。

2. 关于不等式运算的同解变形

【例 6】 已知 $f(x) = ax^2 - c$，且 $-4 \leqslant f(1) \leqslant -1, -1 \leqslant f(2) \leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围。

分析 可以将从已知条件中解出 $f(x)$ 表达式中的两个未知数 a 与 c 用 $f(1)$ 与 $f(3)$ 表示，再代入到 $f(3)$ 表达式中求范围。

解 因为

$$\begin{cases} a - c = f(1) \\ 4a - c = f(2) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}[f(2) - f(1)] \\ c = -\frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(2) \end{cases}$$

所以

$$f(3) = 9a - c = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$$

因为 $-1 \leqslant f(2) \leqslant 5$，则

$$-\frac{8}{3} \leqslant \frac{8}{3}f(2) \leqslant \frac{40}{3}$$

又 $-4 \leqslant f(1) \leqslant -1$，则

$$\frac{5}{3} \leqslant -\frac{5}{3}f(1) \leqslant \frac{20}{3}$$

以上两式相加即得

$$-1 \leqslant f(3) \leqslant 20$$

3. 不等式的性质与函数的关系

不等式的许多性质具有“函数”的背景，如“$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in N^*)$”，其实就是幂函数 $y = x^n$ 在 R^+ 上的单调性。反之，不等式也是研究函数性质的有力工具，如函数单调性的定义就是通过不等式描述的。因此高考中考查不等式的基本性质常与函数结合在一起进行，如“经典题析”中例 1。下面再看一个这样的综合性问题。

【例 7】 设 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = f[f(x)]$，令 $F(x) = g(x) - \lambda f(x)$，问是否存

在实数 λ，使 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上是减函数且在区间 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 上是增函数？

分析 可先求出 $F(x)$ 的表达式，然后再根据函数单调性的定义，运用不等式的性质展开分析。

解 $\because$ $g(x)=(x^2+1)^2+1$

$\therefore$ $F(x)=x^4+(2-\lambda)x^2+2-\lambda$

假设存在实数 λ 的值，使 $F(x)$ 满足题设，则任取 $x_1<x_2<0$，有

$$-x_1>-x_2,x_1^2>x_2^2$$

$$F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2+2-\lambda)$$

(1)当 $x_1,x_2\in(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时

$\because$ $F(x)$ 单调递减，$\therefore$ $F(x_1)>F(x_2)$，则

$$x_1^2+x_2^2+2-\lambda>0$$

而

$$x_1^2+x_2^2>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

因此只要 $\lambda\leqslant 3$；

(2)当 $x_1,x_2\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ 时，$F(x)$ 单调递增，所以

$$F(x_1)<F(x_2)$$

则

$$x_1^2+x_2^2+2-\lambda<0$$

而

$$x_1^2+x_2^2<1$$

故只须 $\lambda\geqslant 3$。

综合(1)(2)知，当 $\lambda=3$ 时，$F(x)$ 符合题意。

➡**点评** 这是一道探索型的函数综合题，有关不等式的基础知识与基本概念贯穿始终。

能力训练

·基础题·

1. 若 $a>b,c>d$，则一定有(　　)。

A. $c>d+a-b$　　　　B. $b>c+d-a$

C. $d>a+b-c$　　　　D. $a>b-c+d$

2. 若 $a,b\in R$ 且 $a>b$，则一定有(　　)。

A. $a+c\geqslant b-c$　　　　B. $\quad\geqslant bc$

数学 第六章 不等式

C. $(a-b)c^2 \geq 0$　　　D. $\frac{c^2}{a-b} > 0$

3. 若 a,b 是任意实数，且 $a>b+1$，则(　　)。

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{a}{b}>1$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\lg a>\lg b$

4. 已知 $m<n<0$，下列不等式正确的是(　　)。

A. $m^2<n^2$　　B. $\frac{m}{n}<1$　　C. $m<4-n$　　D. $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$

5. 设 $a,b\in R$，有以下四个命题：

①$a<b<0 \Rightarrow a^2<b^2$　　②$ac^2>bc^2 \Rightarrow a>b$

③$\frac{a}{b}<c \Rightarrow a<bc$　　④$a<b<0 \Rightarrow \frac{b}{a}<1$

其中正确的命题是(　　)。

A. ①与③　　B. ②与④　　C. ②与③　　D. ③与④

6. 以下四个命题正确的是(　　)。

①$m>0 \Rightarrow m^2>m$　　②$m<0 \Rightarrow m^2>m$

③$m^2>m \Rightarrow m>1$　　④$m^2<m \Rightarrow m<1$

A. ①　　B. ②　　C. ①与③　　D. ②与④

7. 设 $0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\beta-\frac{\alpha}{2}$ 的取值范围是______。

8. 已知 m、$n>0$ 且 $m<n$，则 m^2 与 n^2 的大小关系是______。

9. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，则 a,ab,ab^2 的大小关系是______。

10. 若 $-1<a<b<0$，则 $\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$，a^2，b^2 按从小到大排列为______。

11. 已知 a,b 为非零实数，且 $a>b$，试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小。

12. $x\in R$，比较 $(x+1)(x^2+\frac{x}{2}+1)$ 与 $(x+\frac{1}{2})(x^2+x+1)$ 的大小。

·综合题·

13. $a\geq 1$，试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 和 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小。

14. 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调减函数，$\alpha,\beta,\gamma\in R$，且 $\alpha+\beta>0$，$\beta+\gamma>0$，$\gamma+\alpha>0$，试判断 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)$ 是大于0，还是小于0，或是等于0，并证明你的结论。

15. 用不等式的性质证明：若 $a>b>0$，$d<c<0$，则 $\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$。

16. 设 $a,b\in R$，比较 $(a^4+b^4)(a^2+b^2)$ 与 $(a^3+b^3)^2$ 的大小。