高职高专公共基础课“十一五”规划教材

经济应用数学

JINGJI YINGYONG SHUXUE

皮利利◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

经济应用数学

主　编　皮利利
副主编　郭游瑞
参　编　何月俏　孙明岩
　　　　黄业文

机械工业出版社

本书是高职高专公共基础课“十一五”规划教材，本书注重以“数学为体、经济为用”的原则，以“掌握概念、强化应用”为重点，体现了以应用为目的，以必需、够用为度的高职高专教学特点。本书在体系编排上，注意到了高职高专自身的特殊性，注重突出数学课程循序渐进、由浅入深、循环学习的特点。本书主要包括预备知识、极限与连续、一元微积分、微分方程和数学建模简介、矩阵代数和线性方程组、概率统计及数学软件的应用等内容。

本书可作为高职高专经济管理类的教材，也可作为经济管理类人员参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/皮利利主编．—北京：机械工业出版社，2006.8

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 7-111-19853-0

Ⅰ.经… Ⅱ.皮… Ⅲ.经济数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 104803 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑：宋学敏 版式设计：张世琴 责任校对：申春香

封面设计：王伟光 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2006 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 8.25 印张 · 308 千字

0001—3000 册

定价：21.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

编辑热线电话(010)68354423

封面无防伪标均为盗版

前　言

面对众多的经济数学类教材，很多教师感到要为高职高专学生选取一套适用的经济数学教材却比较困难。原因之一是这部分学生生源多样，普高、职高、中专、技校毕业生均有，他们具备的初等数学知识参差不齐；原因之二是综观现有教材，理论严谨依旧、技巧训练过重、知识应用脱节。其使用结果是学生学得苦涩、学得无趣；老师教得辛苦、教得无奈。

在这本《经济应用数学》里，针对高职高专类学生的具体情况、具体要求，本着“激发兴趣、增强信心、打好基础、学以致用”的原则，我们对本课程微积分部分内容、体系作了较大改动。后续课程学习中不急需的内容采取少讲、不讲，而急需的知识则结合我们日常生活中的丰富案例进行详细讲解，使学生在轻松的学习中掌握经济数学的基本概念、基本理论，知道数学与经济的联系，掌握用所学知识解决经济问题的基本方法。

本书的最大特点是采取了“循环学习”的方法。即所学内容先从易学易懂的部分入手，激发学生的学习兴趣、增强学生的自信心；再由浅入深地展开后续部分内容的学习，这部分内容是对前一部分知识点的循环，只是难度略有增加而已。强化概念、弱化理论推导(用几何图形辅助说明来弥补理论推导的不足)，用简单的计算巩固概念及公式，复杂而又富有技巧的计算交由计算机用数学软件完成，这样做也符合够用为度、实用至上的原则。另外，我们所选择的例题、习题许多都饶有趣味，来自于社会生活、经济生活的方方面面。学生在学了例题、做了习题后，对经济数学的学习既有启发性，又有广泛的适用性，觉得数学知识离我们很近，日常生活的许多问题都可以用数学知识加以解决。

本书为高职高专类经济、管理各专业学生而编写，讲授学时约为72学时，建议安排如下(目录中带*部分可视学生的实际情况选讲)。

章　次	内　　容	学　时
第一章	预备知识	4
第二章	极限与连续	10
第三章	一元函数微积分	20
第四章	一元微积分的应用	16
第五章	微分方程和数学建模简介	4
第六章	矩阵代数和线性方程组	10
第七章	统计量和概率	8

本书的第一、第二章由何月俏副教授编写，第三、第四章由皮利利教授、郭游瑞副教授联合编写，第五、第七章由黄业文老师编写，第六章由孙明岩老师编写，数学软件应用部分由孙明岩老师和黄业文老师编写。皮利利教授对全书进行了统稿。李维东副教授对本书进行了详细的审阅。

由于水平所限，书中难免有错误之处或有不尽如人意的地方，敬请读者批评指正。

编　者

目 录

第一章　预 备 知 识

为了让不同数学基础的同学能在同一起点学习本课程的内容做好必要的准备，在学习本课程内容之前，我们先安排了在经济数学中常用的一些初等数学知识的复习．

第一节　集合与区间

一、常用集合的有关符号

$\varnothing$表示空集．　　　　　　　　**N** 表示非负整数集，即自然数集．

$\mathbf{N}^+$ 表示正整数集．　　　　　　**Z** 表示整数集．

Q 表示有理数集．　　　　　　　**R** 表示实数集．

$A \subseteq B$ 表示集合 A 是集合 B 的子集．$A \cup B$ 表示集合 A 与集合 B 的并集．

$A \cap B$ 表示集合 A 与集合 B 的交集．

二、区间

1．将满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 组成的集合叫做以 a，b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$．

2．将满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 组成的集合叫做以 a，b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a < x < b\}$．

3．将满足不等式 $a \leqslant x < b$ 的所有实数 x 组成的集合叫做以 a，b 为端点的左闭右开区间，记作 $[a,b)$，即 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$．

4．将满足不等式 $a < x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合叫做 a，b 为端点的左开右闭区间，记作 $(a,b]$，即 $(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}$．

以上定义的四个区间统称为有限区间．以下定义的五个区间统称为无穷区间．

5．$(a,+\infty)=\{x \mid x > a\}$，表示满足不等式 $x > a$ 的全体实数．

6．$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$，表示满足不等式 $x \geqslant a$ 的全体实数．

7．$(-\infty,a)=\{x \mid x < a\}$，表示满足不等式 $x < a$ 的全体实数．

8．$(-\infty,a]=\{x \mid x \leqslant a\}$，表示满足不等式 $x \leqslant a$ 的全体实数．

9．$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，表示全体实数．其中，“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”．

第二节 基本初等函数的图像及其基本特征

一、基本初等函数

基本初等函数是指以下的六类函数，在中学这些函数已经学习过，这一节我们将其归类进行总结．为了后面经济数学的学习，有必要了解和掌握好它们．

1．常数函数 $y=c$

常数函数是定义域为$(-\infty,+\infty)$的有界函数，其图像是过点$(0,c)$，且平行于 x 轴的一条直线，如图1-1所示．

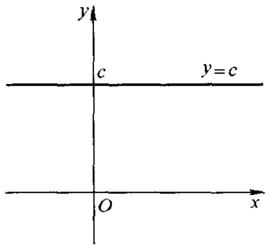

图 1-1

2．幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 是常数）

当 $\alpha>0$ 时，函数的图像通过原点和$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调增加且无界，如图 1-2 所示；

当 $\alpha<0$ 时，图像不过原点，但仍通过点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调减少、无界．常用的幂函数在第一象限的图像，如图 1-3 所示．

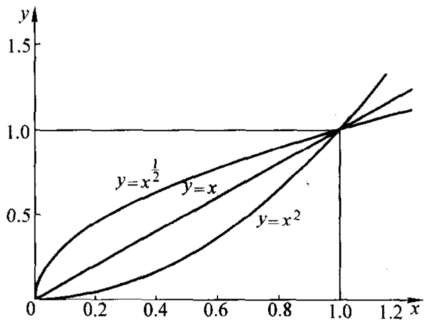

图 1-2

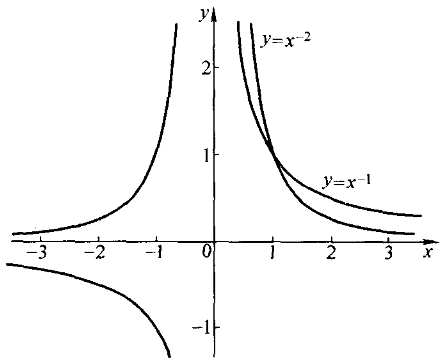

图 1-3

幂函数可用分式、根式形式表示，如下表：

幂函数表示	分式表示	根式表示
$x^{-\frac{m}{n}}$（m,n 为正整数）	$\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$
$x^{\frac{m}{n}}$（m,n 为正整数）		$\sqrt[n]{x^m}$

根据上述关系，幂函数和分式、根式形式可以互相转换．

例如：幂函数转换成分式、根式形式： $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$，$x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$

分式、根式形式的函数转换成幂函数形式： $\dfrac{1}{x}=x^{-1}$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$

3. 指数函数 $y=a^x$（$a>0$,且 $a\neq 1$）

定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,+\infty)$．它的图像过点$(0,1)$且全部在 x 轴上方，当$0<a<1$时，图像是减函数且无界；当$a>1$时，图像是增函数且无界，如图 1-4 所示．

特别值得注意的是指数函数与幂函数的区别：在幂函数 $y=x^\alpha$ 中，底数为自变量，指数 α 是常数；而在指数函数 $y=a^x$ 中，底数是常数 a，指数为自变量．

4. 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$,且 $a\neq 1$）

定义域是$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，图像过点$(1,0)$；

当$0<a<1$时，图像在$(0,+\infty)$上是减函数且无界；当 $a>1$ 时，图像在$(0,+\infty)$是增函数且无界，如图 1-5 所示．

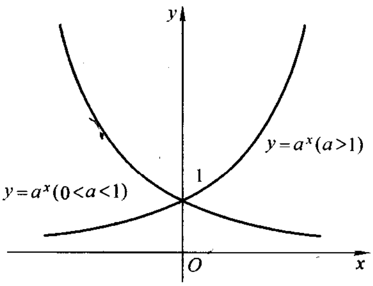

图 1-4

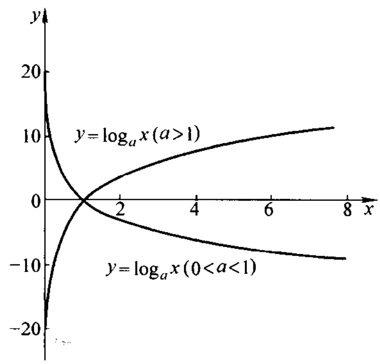

图 1-5

注：

1）对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图像关于 $y=x$ 对称．

2）以无理数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数，简记为 $y=\ln x$，在实际问题中常遇见，是微积分中研究的重要函数之一．

5. 三角函数

三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数六个函数．我们将它们的图像和常用的主要特征归类如下：

（1）正弦函数 $y=\sin x$（见图 1-6）　定义域为$(-\infty,+\infty)$；值域为$[-1,1]$，所以是有界函数；图像关于原点对称，是奇函数.

（2）余弦函数 $y=\cos x$（见图 1-7）　定义域为$(-\infty,+\infty)$；值域为$[-1,1]$，是有界函数；图像关于 y 轴对称，是偶函数.

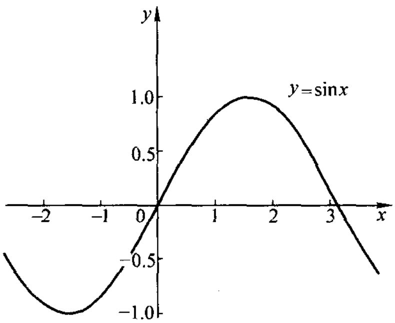

图　1-6

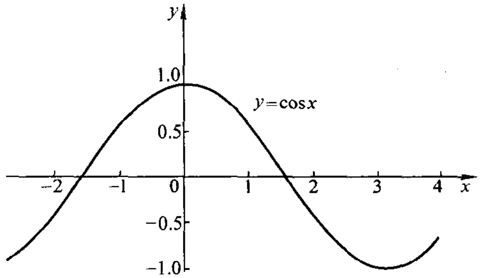

图　1-7

（3）正切函数 $y=\tan x$（见图 1-8）　定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的一切实数；值域为$(-\infty,+\infty)$，是无界函数；图像关于原点对称，为奇函数.

（4）余切函数 $y=\cot x$（见图 1-9）　定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数；值域为$(-\infty,+\infty)$，是无界函数；图像关于原点对称，为奇函数.

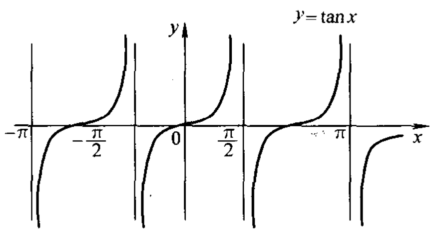

图　1-8

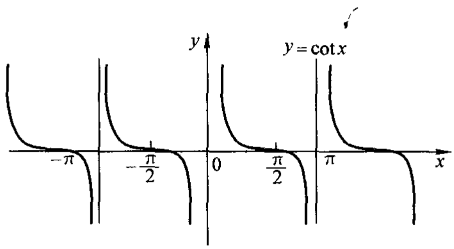

图　1-9

对于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不作详细讨论.

6. 反三角函数

常见的反三角函数有反正弦函数、反余弦函数、反正切函数和反余切函数四个：

反正弦函数 $y=\arcsin x$　　反余弦函数 $y=\arccos x$

反正切函数 $y=\arctan x$　　反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

关于反函数的性质我们在这里不再累述.

二、常用的三角函数公式

为了便于后面的学习，我们将特殊三角函数的值和后面学习中常用的三角函数公式列表如下，以供查阅.

1. 同角三角函数关系公式

(1) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，　$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(2) $\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$，　$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，　$\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

(3) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

2. 倍角公式的几种表示形式

(1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

(3) $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$

(4) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$

3. 积化和差

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

(2) $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

(3) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

(4) $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

4. 特殊三角函数值表

α	0	$\frac{\pi}{6}(30°)$	$\frac{\pi}{4}(45°)$	$\frac{\pi}{3}(60°)$	$\frac{\pi}{2}(90°)$	$\pi(180°)$	$\frac{3\pi}{2}(270°)$	$2\pi(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

第三节 方程和不等式

在日常生活和实际工作中，常遇到一个或多个变量之间的关系用等号或不等号联系起来，怎样通过已知数量求未知数量，这就是本节要讨论的方程和不等式.

一、方程

能够使方程左右两边相等的未知量的取值叫做方程的解．含有一个未知量的方程的解叫做方程的根．求方程的解的过程叫做解方程.

1. 一元一次方程

形如 $ax+b=0\ (a\neq 0)$的方程叫做一元一次方程.

化成 $ax=-b\ (a\neq 0)$，得到方程的解 $x=-\dfrac{b}{a}$.

2. 一元二次方程

只含有一个未知量，并且未知量的最高次幂是二次的方程叫做一元二次方程，它的一般形式：$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$.

一元二次方程的解法主要有因式分解法和公式法.

一元二次方程的求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

下面举例说明求一元二次方程根的因式分解法和公式法.

例 1 解方程 $2x^2-x-6=0$.

解法 1 原方程分解因式化为：$(x-2)(2x+3)=0$,

则有 $$x-2=0 \quad 或 \quad 2x+3=0,$$

解得 $x_1=2$，$x_2=-\dfrac{3}{2}$为原方程的根.

解法 2 因为 $a=2$，$b=-1$，$c=-6$，所以

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-6)}}{2\times 2}=\frac{1\pm 7}{4},$$

从而得到原方程的两个根为 $x_1=2$，$x_2=-\dfrac{3}{2}$.

二、直线方程

形如 $ax+by+c=0$ 的二元一次方程的图形是一条直线(其中 a,b 不能同时为零)．特别地：

当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，$y=-\dfrac{c}{b}$表示过点$\left(0,\ -\dfrac{c}{b}\right)$且平行于 x 轴的一条直线.

当 $b=0$，$a\neq0$ 时，$x=-\frac{c}{a}$表示过点$\left(-\frac{c}{a},0\right)$且垂直于 x 轴的一条直线．

本书中求直线方程常用的方法：

1）已知直线的斜率 k 和直线上的一点(x_1,y_1)，由直线的点斜式，可写出方程：$y-y_1=k(x-x_1)$．

2）若直线平行于 y 轴，且过点$(x_1,0)$，则有：$x=x_1$．

3）若直线平行于 x 轴，且过点$(0,y_1)$，则有：$y=y_1$．

三、不等式

能够使不等式成立的未知量的值叫做不等式的解．

1．一元一次不等式

含有一个未知量，并且未知量的最高次幂是一次的不等式，叫做一元一次不等式．

解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程的步骤类似．

例 2　解不等式　$\frac{3x-1}{2}\leqslant\frac{6x-5}{3}$

解　去分母得　$3(3x-1)\leqslant2(6x-5)$，

去括号得　$9x-3\leqslant12x-10$，

移项，合并得　$-3x\leqslant-7$，即 $x\geqslant\frac{7}{3}$．

2．一元一次不等式组

含有相同未知量的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组．

同时满足不等式组中每一个不等式的解，叫做这个不等式组的解．

例 3　解不等式组$\begin{cases}8x-5\leqslant3x+2\\ \frac{x}{3}\leqslant2x+\frac{1}{4}\end{cases}$．

解　由第一个不等式得　$x\leqslant\frac{7}{5}$，

由第二个不等式得　$x\geqslant-\frac{3}{20}$，

所以不等式组的解为　$-\frac{3}{20}\leqslant x\leqslant\frac{7}{5}$．

3．一元二次不等式

含有一个未知量，并且未知量的最高次幂是二次的不等式，叫做一元二次不等式．

解一元二次不等式常与解一元二次方程结合在一起，具体解见下表：

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	有两个不同实根 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0\quad(a>0)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq-\dfrac{b}{2a}$ 的全体实数	全体实数
$ax^2+bx+c<0\quad(a>0)$	$x_1<x<x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

注：$\Delta=b^2-4ac$.

例 4 解不等式 $x^2-x-6>0$.

解 解方程
$$x^2-x-6=0,$$
得两个不等实根
$$x_1=-2,\ x_2=3.$$
所以不等式 $x^2-x-6>0$ 的解为 $x<-2$ 或 $x>3$.

第二章　极限与连续

大千世界中的一切都在运动着、变化着，从汽车的行驶到星转月移，从世界人口的不断增长到股市的涨跌，从国民经济的增长到商品价格的变化等. 这些变化的量都有一个共同的特点：就是它们的变化受到其他一些变化量的制约或者与其他一些变化的量相互制约. 这种制约关系在数学上表现为函数，它是我们定性、定量地研究各种变化的量的一个重要工具. 而人们研究事物变化的趋势，从有限到无限、从近似到精确、从离散到连续、从量变到质变，这些都需要极限的知识.

第一节　函　　数

一、函数的概念

函数是经济数学主要研究的对象，为了解它，我们先给出以下几个有关概念.

1. 常量与变量

(1) 常量　在考察的过程中不会发生变化的量称为常量，常用 a，b，c，d，…表示，例如圆周率 π.

(2) 变量　在考察的过程中会发生变化的量称为变量，常用 x，y，z，u，v，…表示，例如一天中气温的变化.

值得注意的是：

1) 常量、变量依赖于所研究的过程，同一个量在不同研究过程可为常量，也可为变量，如商品的价格.

2) 一个变量所能取的数值的集合称为这个变量的变化区域.

3) 连续变量的变化区域常用一个区间、多个区间的交、并或不等式表示.

2. 函数的定义及表示法

定义 2.1　设 x 和 y 是两个变量，D 为非空数集，若变量 x 在 D 内任取一值时，变量 y 依照某一规则 f 总有确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量或函数，f 称为函数符号，表示 y 与 x 的对应法则，集合 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，全体函数值组成的集合称为函数的值域.

由函数的定义可知，当 x 在定义域中取定一个值 x_0，即 $x=x_0$ 时，对应的函数值就是将 x_0 代替函数表达式中的 x 得到的值．这个函数值记为 y_0、$y|_{x=x_0}$、$y(x_0)$或$f(x_0)$.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$　　(2) $y=\sqrt{3x+4}$

(3) $y=\lg(2x-1)$　　(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

解 (1) 函数是分式，由分式的分母不为零，所以 $x^2-3x+2\neq0$，解得 $x\neq1$，$x\neq2$．故所求定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 所给函数是二次根式，所以被开方式应不小于零，即 $3x+4\geqslant0$，解得 $x\geqslant-\dfrac{4}{3}$．所以所求定义域为$\left[-\dfrac{4}{3},+\infty\right)$.

(3) 所给函数是对数函数，所以真数大于零，即 $2x-1>0$，解得 $x>\dfrac{1}{2}$．所以所求定义域为$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

(4) 所给函数是分式函数$\dfrac{1}{1-x^2}$与二次根式 $\sqrt{x+2}$之和，对于$\dfrac{1}{1-x^2}$，要求 $1-x^2\neq0$，即 $x\neq\pm1$；对于$\sqrt{x+2}$，要求 $x+2\geqslant0$，即 $x\geqslant-2$，所以所求定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

将以上例题总结，得到求定义域的常用方法，即自变量的取值要使

1）分式的分母不能为零.

2）在偶次根式中，被开方式必须大于或等于零.

3）对数函数的真数必须大于零.

4）若干项组成的函数式，它的定义域是各项定义域的公共部分.

例 2 设$f(x)=3x^2+2\sin x+5$，求$f(0)$，$f(a)$，$f(x+h)$.

解 已知 $f(\quad)=3(\quad)^2+2\sin(\quad)+5$，所以有

$$f(0)=3(0)^2+2\sin0+5=5;$$

$$f(a)=3a^2+2\sin a+5;$$

$$f(x+h)=3(x+h)^2+2\sin(x+h)+5.$$

函数表示法 除前面常用的解析法(公式法)、图形表示法外，还有表格法.

3. 分段函数

在实际应用中，也常用到形如 $f(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2} & \text{当 } x=1\\ 1 & \text{当 } 1<x\leqslant2\end{cases}$ 的函数，像这样在