保险系列教材

西南财经大学“十五”“211工程”建设项目

利息理论与应用

LIXI LILUN YU YINGYONG

张运刚 编著

西南财经大学出版社

保险系列教材

西南财经大学"十五" "211工程"建设项目

利息理论与应用

LIXI LILUN YU YINGYONG

张运刚 编著

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

利息理论与应用/张运刚编著.—成都:西南财经大学出版社,2006.3
ISBN 7-81088-396-8

Ⅰ.利... Ⅱ.张... Ⅲ.利息—高等学校—教材 Ⅳ.F032.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第129897号

利息理论与应用
张运刚 编著

责任印制:杨斌
责任编辑:李霞湘
封面设计:大涛视觉传播设计事务所

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址:	http://press.swufe.edu.cn
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	西南财经大学印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	20
字　　数:	330千字
版　　次:	2006年3月第1版
印　　次:	2006年3月第1次印刷
印　　数:	1—3000册
书　　号:	ISBN 7-81088-396-8/F·354
定　　价:	32.00元

前　言

《利息理论与应用》是金融学、保险学专业的核心课程之一，也是参加精算师资格考试的必考内容。众所周知，精算是保险经营的基石与保证，精算师是评估未来财务风险的专家，是保险公司等机构的核心决策人物，拥有崇高的声誉与地位。要成为一名精算师，绝非易事。除了要具备坚实的数理功底之外，还必须对金融、保险、经济、投资、财务、人口、统计等学科的知识和原理有深刻的理解；同时，还需要通过一系列的资格考试，一般需要五至七年时间。然而，我国的精算教育与资格考试起步比较晚，精算师的实际工作经验还需进一步积累。保险被认为是朝阳产业，未来我国精算师的缺口较大，因而选择精算师职业道路艰辛但前景广阔，且极富挑战性。

本人多年来从事利息理论与应用等保险精算课程的教学，也参加过日本精算师的资格考试，酸甜苦辣略知一二。结合在日本精算师资格考试中心与中国精算师资格考试的经历，本人编写了这本教材，希望能为参加精算师考试的考生提供方便。虽然《利息理论与应用》是保险精算师资格考试的基础课程，但它应用却十分广泛。因为利率是重要的经济杠杆，利息问题无所不在。本书试图采用深入浅出的语言，注重知识的系统性与完整性，并加强规律与特点的归纳，为读者学习与研究提供方便。全书共分七章，第一章主要介绍利息的三种度量方式，构成全书基础。第二章主要介绍各种年金现值与终值的计算。一二章构成全书理论部分，其余章节主要是这些理论的具体应用。第三章主要研究投资收益率。第四章主要研究债务偿还问题。第五章主要探讨债券股票的定价问题。第六章则研究诚实信贷、抵押贷款、资产折旧、投资期限、资产负债匹配等问题。第七章将利率作为随机变量来研究有关现值与终值的计算等问题。每章小结对全章内容进行简明概括，并列出了全章最重要的公式，同时还配有大量习题供读者练习，最后，本书给出了全书习题参考答案。

本书可作为保险学、精算学、金融学、投资学等专业或方向的本科、研究生教材，也适合于立志从事精算职业的读者自学与参考。

本书得到了西南财经大学“十五”“211 工程”保险精算项目的资助，特

此致谢。同时，感谢西南财经大学保险学院和西南财经大学出版社所提供的支持与帮助，尤其是责任编辑李霞湘等同志不厌其烦的工作，才确保了本书能高质量地奉献给读者。

由于本人才疏学浅，时间仓促，本书错误在所难免，恳请批评指正。

西南财经大学保险学院
张运刚
2005年10月

目　录

第 1 章　利息的度量及其基本计算

第 2 章　确定年金

第 3 章　投资收益分析

第 4 章　债务偿还方法

第 5 章　证券的价值分析

第 6 章　利息理论的进一步应用

第 7 章　利息的随机处理

习题参考答案

附表

第1章 利息的度量及其基本计算

本章主要研究与利息有关的概念、利息的三种度量方式，以及现值、终值、投资期限、利率等问题的基本计算。

第1节 利息的度量

一、利息

(一) 利息

利息是资金的价格，是借款者支付给贷款者使用其资金的代价。换言之，利息是指在一定时期内，资金的所有人将使用资金的自由权转让给借款人之后所得到的报酬。通常利息按存款或贷款的本金、利息率与期限的乘积计算而得，而在利息理论、保险精算中，利息的多少还与利息的度量方式有关。利息是在信用的基础上产生的一个经济范畴。

(二) 利息的来源与意义

由借款人支付利息给贷款人在当代经济生活中相当普遍，很难想像没有利息经济该怎样运行。然而历史上并非总是这样认为：哲学家亚里士多德曾经谴责取得利息是一种非生产性和不道德的行为；在中世纪，所有的高利贷被天主教禁止。今天，只有“过多”的利息才被禁止。

西方经济学对利息来源的解释很多。如“节欲论”认为是资本所有者不

将资本用于当前生活消费而得到的报酬，或者等待将来消费而得到的报酬。

"时差利息论"认为，利息产生于人们对现有财货的评价大于对未来财货的评价，现在的一元比未来的一元更值钱，利息是价值时差的贴水。大多数企业和个人都更愿意今天有钱，而不是明天拥有同样多的货币，利息不过是一种补偿。

"流动偏好论"认为，利息是放弃流动偏好而得到的报酬。

马克思的劳动价值论认为一切价值都是劳动创造的，忍欲、等待、对财货时间价值的主观评价以及资本本身，都不会使价值增大。贷款人之所以愿意支付利息，是因为他能将借来的货币投入到生产中，能取得一定的利润，利息只不过是利润的一部分。利息是剩余产品的价值形态，因而利息来源于剩余产品。

不同社会制度下的利息体现着不同的生产关系。在前资本主义社会，高利贷者以利息的形式不仅榨取生产者的剩余劳动，而且也榨取一部分必要劳动。

在资本主义社会，利息是职能资本家为取得借贷资本家或银行资本家的货币资本而付给借贷资本家或银行资本家的一部分利润，利润只不过是剩余价值的转化形式。因此，从本质上讲，资本主义利息是工人在生产过程中创造的一部分剩余价值，它体现着资产阶级剥削无产阶级的生产关系，也体现着借贷资本家、银行资本家同职能资本家共同瓜分剩余价值的关系。

在社会主义社会，利息仍然产生于生产过程，是劳动者创造的价值，各种利息最终都来源于企业的纯收入。我国企业创造的纯收入，一部分上缴财政，一部分形成生产者的积累，一部分以利息的形式付给借贷资金的所有者。借出的资金量越多，在纯收入分配中的所占的份额也就越大，因此社会主义的利息体现的是一种按资分配纯收入的关系，但这并不意味着完全不存在剥削关系。

利息，特别是利率，还是合理配置资源、提高资源利用效率、调节国民经济活动的重要杠杆。

从理论上讲，资本和利息可以是货币，也可以不是货币，但本书所考虑的资本和利息均限于货币。

二、现值函数与终值函数

（一）本金、利息与积累值的关系

任何一项普通的金融业务都可视为投资一定数量的资金以产生一定的

利息。我们把每项业务开始时投资的金额，即初始投资的金额称为本金（或俗称母金），而经过一段时期后连本带利回收的总金额称为在该时刻的积累值。积累值与本金的差额就是这一段时期产生的利息金额，也就是投资期间所得到的利息报酬。显然，本金 + 利息 = 积累值。

在整个投资期间的任何时刻回收的金额都是积累值，特别地，称在整个投资期间结束时的积累值为终值。同时，积累值也可以看成是终值，只需把所考察的期间当作整个投资期间来处理。因此，为了叙述方便起见，不区分积累值与终值。

决定终值大小的三个因素：(1) 本金；(2) 投资期限（即投资所经历的时间长度）；(3) 利息的度量方式。在本金、利息的度量方式都确定的条件下，终值则是所经历的时期的函数。这里的时期是一个度量时间长度的单位，可以是一年、一个季度、一个月、一天，也可以是任何一个时间长度，如 5.33 年，究竟选择多长时间取决于研究的目的。为了方便起见，时期简称为期。同时，利息度量方式中包括了利率的大小及其表达方式。

（二）终值函数与总量函数

1. 终值函数 $a(t)$

1 单位本金从投资之时起，经过 t 期后的积累值或终值，记为 $a(t)$。在利息度量方式一定的条件下，$a(t)$ 是所经历的时期 t 的函数，称之为终值函数或积累值函数。

它具有如下性质：

(1) $a(0) = 1$。

(2) 一般地，$a(t)$ 为 t 的增函数（未必是严格的）。$a(t)$ 也可能在某个时期递减，但正常情形应该是随着投资期间的延长，利息逐渐积累，因而回收的金额应越来越多，故有此性质。

(3) 当利息连续产生时，$a(t)$ 为 t 的连续函数。但若认为利息仅在付息日产生，$a(t)$ 就为 t 的非连续函数，不过这种假定是不合理的。

2. 总量函数 $A(t)$

$K(K>0)$ 个单位本金，经历 t 期后的积累值或终值，记为 $A(t)$。在利息度量方式一定的条件下，它同样是所经历的时期 t 的函数，称之为总量函数。在现实生活中，本金不为 1 的情形是客观存在的，因此研究 $A(t)$ 更具有普遍的现实意义。不过也可以将 K 个单位本金视作为 1 个单位本金，此时就成为上面所述的积累值或终值函数的情形了。

$A(t)$ 具有与 $a(t)$ 类似性质：

(1)$A(0)=K$。

(2) 一般地,$A(t)$ 为 t 的增函数。

(3) 当利息连续产生时,$A(t)$ 为 t 的连续函数。

3. 总量函数与终值函数的关系

$$A(t)=Ka(t) \tag{1.1.1}$$

即 $K\xrightarrow{\times a(t)}Ka(t)$,因此称 $a(t)$ 为积累因子,该过程称为积累过程。

(三) 现值函数

现值函数是指为了获得未来一定数量的货币现在必须投入的金额,这个金额称为这未来一定数量的货币在现在时刻的现值。简言之,将未来一定数量的货币按一定方式折算为现在的价值,称为现值。

为了获得 t 期后的 1 个单位货币,现在必须投入的金额,即现值,记为 $a^{-1}(t)$。显然,$a^{-1}(t)$ 经过 t 期的积累可以达到终值1,即 $a^{-1}(t)\cdot a(t)=1$,从而 $a^{-1}(t)=\dfrac{1}{a(t)}$。这里可以看出,记号 $a^{-1}(t)$ 中的 -1 实际上就是幂指数。在利息度量方式一定的条件下,$a^{-1}(t)$ 是 t 的函数;因为 t 期后的1个单位货币的现值为 $a^{-1}(t)$,所以 t 期后 B 个单位货币的现值为 $Ba^{-1}(t)$,即 $Ba^{-1}(t)\xleftarrow{\times a^{-1}(t)}B$,称 $a^{-1}(t)$ 为折现因子,该过程称为折现过程。从上面的分析不难看出,积累与折现是两个互逆的过程。注意这里箭头方向是由右方指向左方,寓意将未来值折算为现值。

综上所述,积累值与过去有关,现值与未来相联系,既与过去又与现在相联系的值称为当前值。实际上,这些概念都是一些相对概念,即相对于我们考察问题的时点而言的概念。在利息理论、保险精算等理论与实务中,由于货币在不同时点具有不同的价值,不同时点发生的金额不能直接比较,也不能直接相加减,因此,我们首先必须明确站在哪个时点来考虑问题。为简便起见,以后把这样的时点称为观察时点,简称为观察点。虽然有些书叫做可比日或可比点,但笔者形象地称之为观察点。于是,不同时点发生的金额,要么通过积累,要么通过折现,换算为在观察点的值,这样就可以比较和运算了。

三、利息的度量

利息可以用三种方式来度量:一是用利息率来直接度量利息;二是用贴现率来间接度量利息;三是用利息力来度量瞬间利息。

（一）利息率

利息率简称利率，它是一定时期内产生的利息与投入或贷出的本金之比率。它反映了单位本金在单位时期内产生利息的多少。通常有年利率、月利率和日利率三种具体形式。年利率用本金的百分之几表示，月利率用本金的千分之几表示，日利率用本金的万分之几表示。在利息理论、保险精算学中，将利息率区分为实际利率与名义利率，从而可使许多公式（如年金现值与终值公式）表现形式简明且统一。

1. 实际利率

所谓实际利率就是一个时期内实际产生的利息与期初投入的本金之比，它反映了单位本金在单位时期内产生利息的水平高低。通常把一年结算一次的年利率称为年实际利率。注意在实际利率所涉及的时期内中途不结转利息，而是到期满时刻才结算该期利息。

假设某投资在第 n 期末的积累值为 $A(n)$ 或 $a(n)$，第 n 期的实际利率为 i_n，则

$$i_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)}=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)},n\in N \quad (1.1.2)$$

显然，下列关系式成立：

$$A(n)=A(0)(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n) \quad (1.1.3)$$

$$a(n)=(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n) \quad (1.1.4)$$

例 1.1.1 今有某项 1 500 元的投资，若在第 1 年末回收，可以回收 1 700 元；若在第 2 年末回收，则可以回收 2 000 元；若在第 3 年末回收，则可以回收 2 500 元。求各年的实际利率。

解：由题意知，$A(0)=1\ 500;A(1)=1\ 700;A(2)=2\ 000;A(3)=2\ 500$；因此

$$i_1=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{1\ 700-1\ 500}{1\ 500}\approx 13.33\%$$

$$i_2=\frac{A(2)-A(1)}{A(1)}=\frac{2\ 000-1\ 700}{1\ 700}\approx 17.65\%$$

$$i_3=\frac{A(3)-A(2)}{A(2)}=\frac{2\ 500-2\ 000}{2\ 000}=25\%$$

所以，第 1 年、第 2 年、第 3 年的年实际利率分别为 13.33%、17.65% 和 25%。

当投资期间包含了若干个时期或若干年（不必为整数）时，在实务中如何来度量利息就涉及到单利和复利问题。

（1）单利

单利即按本金计算出的利息不再加入到本金之中以在下一期产生新的利息,即利上无利。利息 = 本金 × 利率 × 时间。

假设每期利率为 i,在时刻 t(即刚刚经历 t 期后的那一时刻,今后不再特别申明)按单利计算的终值 $a(t)$ 为

$$a(t) = 1 + it,\text{其中 } t \geqslant 0 \tag{1.1.5}$$

显然,(1.1.5) 式对整数 t 成立,下面只须说明等式对非整数的正实数 t 也成立。

事实上,根据单利的定义可知

$$i(t+s) = it + is \tag{1.1.6}$$

即 1 单位本金在 $t+s$ 期上产生的利息等于在 t 期上产生的利息与在 s 期上产生的利息之和;从数学上看,只不过是乘法分配律的应用。由于 1 单位本金在 t 期内产生利息可以表示为 $a(t)-1$,因而(1.1.6) 式也可以表示为

$$a(t+s) - 1 = [a(t) - 1] + [a(s) - 1]$$

即

$$a(t+s) = a(t) + a(s) - 1 \tag{1.1.7}$$

(1.1.7) 式对非负整数 t 和 s 是显然成立的,我们可以合理地认为它对一切非负实数 t 和 s 也成立。

假设 $a(t)$ 可导,由导数的定义有

$$\begin{aligned} a'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{[a(t)+a(s)-1]-a(t)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s} \\ &= a'(0) \end{aligned}$$

这是一个与 t 无关的常数。

显然

$$\int_0^t a'(r)\mathrm{d}r = \int_0^t a'(0)\mathrm{d}r$$

$$a(t) - a(0) = a'(0)t$$

即

$$a(t) = 1 + a'(0)t$$

令 $t = 1$,并由于 $a(1) = 1 + i$,因此,$a'(0) = i$。从而,$a(t) = 1 + it$,这里 t 为非负实数,即(1.1.5) 得证。

(2) 复利

复利即按本金计算出的利息加入到本金之中以在下一期产生新的利

息，即利上加利，“利滚利”。

假设每期利率为 i，在时刻 t 按复利计算的终值 $a(t)$ 为

$$a(t) = (1+i)^t，其中\ t \geqslant 0 \tag{1.1.8}$$

不难看出(1.1.8)式对整数 t 是成立的，下面只须说明等式对非整数的正实数 t 也成立。

容易知道

$$(1+i)^{t+s} = (1+i)^t \cdot (1+i)^s$$

即

$$a(t+s) = a(t) \cdot a(s) \tag{1.1.9}$$

(1.1.9)式对非负整数 t 和 s 是显然成立，且是有意义的，它反映了现在投资1个单位的货币，经历 $t+s$ 期的积累而获得的积累值等于这1个单位的货币先经历 t 期的积累再经历 s 期的积累而获得的积累值。自然我们可以合理地认为它对一切非负实数 t 和 s 也成立。

现在我们将从(1.1.9)式出发，证明(1.1.8)式对一切非负实数也成立。

事实上，假设 $a(t)$ 可导，由导数的定义有

$$\begin{aligned} a'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{a(t+s)-a(t)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{a(t)a(s)-a(t)}{s} \\ &= a(t)\cdot\lim_{s\to 0}\frac{a(s)-a(0)}{s} \\ &= a(t)\cdot a'(0) \end{aligned}$$

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln a(t) = a'(0)$$

$$\therefore \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln a(r)\mathrm{d}r = \int_0^t a'(0)\mathrm{d}r$$

即

$$\ln a(t) - \ln a(0) = t\cdot a'(0)$$

令 $t=1$，并由 $a(1)=1+i$，可得 $a'(0)=\ln(1+i)$，从而有 $a(t)=(1+i)^t$，即(1.1.8)式对一切非负实数 t 都成立。

(3) 单利、复利条件下的现值

单利条件下的现值分别为

$$a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it} \tag{1.1.10}$$

复利条件下的现值分别为

$$a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} \tag{1.1.11}$$

例 1.1.2　已知每期利率为 i，分别求在单利、复利条件下第 n 期的实际利率。

解：在单利条件下

$$\because a(t) = 1 + it$$

$$\therefore i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+ni) - [1+(n-1)i]}{1+(n-1)i} = \frac{i}{1+(n-1)i}$$

显然，i_n 是 n 的减函数，即常数的单利意味着递减的实际利率。

在复利条件下

$$\because a(t) = (1+i)^t$$

$$\therefore i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = i$$

常数的单利意味着递减的实际利率。

例 1.1.3　证明：

$$(1)(1+i)^n > 1 + ni \quad (n > 1,\ -1 < i \neq 0) \tag{1.1.12}$$

$$(2)(1+i)^n = 1 + ni \quad (n = 1,\ -1 \leqslant i) \tag{1.1.13}$$

$$(3)(1+i)^n < 1 + ni \quad (0 < n < 1,\ -1 < i \neq 0) \tag{1.1.14}$$

证明：(1) 考虑函数 $f(i) = (1+i)^n - (1+ni)$

$$f'(i) = n[(1+i)^{n-1} - 1]$$

$$\because f'(i) < 0 \quad (-1 < i < 0) \quad 且 \quad f'(i) > 0 \quad (i > 0)$$

$\therefore f(i)$ 在 $i = 0$ 时取得最小值，即 $f(i) > f(0)(-1 < i \neq 0)$

从而(1.1.12)式得证。

(2) 容易验证(1.1.13)式成立。

(3) 考虑函数 $f(i) = (1+i)^n - (1+ni)$

$$f'(i) = n[(1+i)^{n-1} - 1]$$

$$\because f'(i) > 0(-1 < i < 0) \quad 且 \quad f'(i) < 0(i > 0)$$

$\therefore f(i)$ 在 $i = 0$ 时取得最大值，即 $f(i) < f(0)(-1 < i \neq 0)$

从而(1.1.14)式得证。

说明：

(1) 现在可断言，命题“在本金、利率、期限均一定的条件下，按复利计算的终值是一定大于按单利计算的终值”为假命题。

(2) 不少书籍将 i 的取值范围限定在 $0 < i < 1$。笔者认为，这有一定的缺陷。事实上，i 可以为负数，甚至可以为 -1，只不过意味着有一部分甚至全部本金都收不回来，因而不能否认 $i < 0$ 这种情形的客观存在性。从数学上看，$f(i)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$，从理论上讲，i 是可以大于或等于 -1 的，只不过 $0 < i < 1$ 似乎更合理些罢了。

(3) 当积累期限超过1期时，复利终值大于单利终值；当积累期限短于1期时，复利终值小于单利终值；当积累期限等于1期时，复利终值等于单利终值。

(4) 读者可以用实例去验证。如年利率为6%，分别在单利和复利条件下，比较20 000元本金在8个月后、3年后的终值大小。

例 1.1.4　某银行以单利计息，年利率为6%。某人存入银行5 000元，5年后积累值是多少？如果以复利计息，在其他条件不变时，结果又如何？

解：对于单利情形

$$A(5) = 5\,000a(5) = 5\,000(1 + 5 \times 6\%) = 6\,500(\text{元})$$

对于复利情形

$$\tilde{A}(5) = 5\,000\tilde{a}(5) = 5\,000(1 + 6\%)^5 = 6\,691.13(\text{元})$$

注意：$\tilde{A}(5)$ 与 $A(5)$、$\tilde{a}(5)$ 与 $a(5)$ 没有本质区别，含义均一样，都表示第5年末的积累值。头上加上波浪线，仅仅是为了区分单利与复利情形。今后，在同一例题解答中，出现类似情形时，均是出于区分的目的。

例 1.1.5　已知年实际利率为8%，求4年后支付10 000元的现值。

解：设所求现值为 x 元，则

$$xa(4) = 10\,000$$

即

$$x(1 + 8\%)^4 = 10\,000$$

$$\therefore x = 7\,350.30(\text{元})$$

或所求的现值为

$$10\,000a^{-1}(4) = 10\,000(1 + 8\%)^{-4} = 7\,350.30(\text{元})$$

2. 名义利率

假设年利率为6%，每1年结转利息4次，那么每一季的利率为 $\frac{6\%}{4} =$