



普通高等教育“十五”国家级规划教材

简明微积分

(第四版)

■ 龚 昇



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

简 明 微 积 分

(第四版)

龚 昇



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

简明微积分 / 龚昇著. —4 版. —北京: 高等教育出版社, 2006. 4

ISBN 7-04-018693-4

I. 简... II. 龚... III. 微积分 - 高等学校 - 教材
IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 020463 号

策划编辑 李艳霞 责任编辑 李 陶 封面设计 王凌波 责任绘图 尹 莉
版式设计 胡志萍 责任校对 尤 静 责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市联华印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 36.75
字 数 690 000

购书热线 010-58581118

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.com.cn>

畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 1978 年 7 月第 1 版
2006 年 4 月第 4 版

印 次 2006 年 4 月第 1 次印刷

定 价 37.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18693-00

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,是在第三版的基础上,根据作者近年来的教学经验及教学信息反馈修订而成。作者将一些章节进行了修改和补充,扩大了应用实例的范围,突出了数学思想的理解,便于读者更好地深入了解和掌握课程内容。

教材将微分与积分、连续与离散、有限与无限等视为矛盾,在强调严格应用数学语言的同时,形象地介绍了它们之间的联系与区别。全书以 Newton-Leibniz 关于微积分的基本定理及其高维情形的相应 Stokes 定理为核心贯串始终,观点新颖而深入,在众多微积分教材中可谓独树一帜。本书自 1978 年第一版问世以来,一直在中国科学技术大学作为教本,得到非常高的评价。

本书在内容安排上较其他通用教材有所区别,共分十一章:微积分的概念,微积分的运算,微积分的一些应用,常微分方程,矢量代数与空间解析几何,重积分与偏微商,线、面积分与外微分形式,多变量微积分的一些应用, $\varepsilon-\delta$ 语言,无穷级数与无穷积分,Fourier 级数与 Fourier 积分。

教材集作者多年极为丰富的教学和科研经验之大成,将经过广泛教学实践检验的成果精心编纂,对广大微积分教学工作者具有很高的参考价值,可供高等学校理工类专业学生选用或参考,也可供有关人员学习参考。

第四版序*

吴文俊

龚昇教授的《简明微积分》一书,问世以来已经出了三版,现又将出第四版.该书以 Newton-Leibniz 关于微积分的基本定理及其高维情形的相应 Stokes 定理为核心贯串全书,观点新颖而深入,在浩如烟海的微积分教材中可谓独树一帜.该书长期以来在中国科学技术大学作为教本,取得巨大成功.现对该书略述本人阅读后的观感如下.

美国一位著名的数学史家与数学教育家 M. Kline 先生在他著《西方文化中的数学》一书中曾经说过:“一个人拥有牛顿处于顶峰时期所掌握的知识,在今天不会被认为是一位数学家。”

M. Kline 又说:“数学是从微积分开始,而不是以之为结束。”

M. Kline 先生对微积分的推崇或许有些过分,但言外之意反映出微积分的发明对于数学历史发展过程具有无与伦比的巨大作用,则是毋庸置疑的.

回顾一下微积分发明的历史,对于龚昇教授这部微积分教程的理解,应不无裨益.

恩格斯曾经指出:微积分“是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的,但不是由他们发明的”。

恩格斯道出了历史的真实.事实上,早在大约从 15 世纪初开始的文艺复兴时期起,工业、农业、航海事业与商贾贸易的大规模发展,形成了一个新的经济时代.宗教改革与对教会思想禁锢的怀疑,东方先进科学技术通过阿拉伯的传入,以及拜占庭帝国覆灭后希腊大量文献的流入欧洲,在当时的知识阶层前面呈现出一个完全崭新的面貌,等待着他们充分发挥聪明才智.

无数伟大的思想家在这种大时代气息的培育下应运而生,现代科学也在与宗教迷信的顽强斗争中应运而生,与新时代的要求相适应的新数学也因之应运而生.

文艺复兴初期一位多才多艺具有代表性的思想家 Leonardo da Vinci (1452—1519),是现代科学的先驱者之一.他提倡寻找数量关系,认为“人们的

* 吴文俊院士的这篇文章原名“龚昇教授《简明微积分》读后感”,发表于《高等数学研究》第二卷第 3 期(1999 年 9 月)、《数学通报》2000 年第 1 期.征得吴文俊院士同意,引用该文为序.

探讨不能称为是科学的,除非通过数学上的说明和论证”。时代的要求促成数学上一个空前活跃和富有创造性时期的诞生。例如测量、航海与地图绘制等促成几何学与三角学的发展;而绘画对透视深入认识的要求成为射影几何发展的出发点。更为重要的是,对解决各种问题的普遍科学方法的研究,导致 P. de Fermat 与 R. Descartes 创造了坐标几何,或所谓解析几何,为微积分的创造提供了必要的技术条件。

科学上对数学提出的种种要求,最后汇总成四种核心的问题,并最终导致微积分的产生。这四种问题是:运动中速度与距离的互求问题,曲线求切线的问题,求长度、面积、体积与重心的问题,以及求极大、极小值的问题。在 Fermat, Descartes, Pascal, Kepler, Wallis, Roberval, Barrow, Cavalieri, Galileo 等难以计数的 16、17 世纪学者们的不断探索之下,第一、二、四问题导致微分的概念,第三个问题导致积分的概念,虽然微分与积分在当时还是比较朦胧的概念,而且是独立地发展的,但至少 Newton 的老师 Barrow 就已经在他关于几何的讲义中,指出求曲线切线的问题与求曲线下所围面积的问题的关系。不仅 Newton 作为 Barrow 的学生应亲受其益,即使是 Leibniz,据知也曾研究过 Barrow 的著作。

经过一个多世纪的酝酿,通过 Newton 与 Leibniz 之手,终于认识到微分与积分是互逆的两个概念,并统一成微积分基本定理。正如恩格斯所说,微积分从此已大体上完成——微积分从此创立。

由这一段历史过程可知,Newton 与 Leibniz 之所以能完成微积分的创立大业,正是由于他们站到了前辈巨人们的肩膀上,才能居高临下,才能高瞻远瞩,终于获得了真理。

微积分创立之后的两百年间,又经历了一段既曲折又自然的发展过程。在 18 世纪期间,数学家们由于微积分解决问题的特殊能力,忙着致力于微积分多种多样的应用,建立了不少以微积分方法为主的分支学科,对于微积分的理论基础,则未遑顾及。进入 19 世纪,微积分本身的矛盾迭出。数学家们才不得不对微积分的基本概念与理论方法细加分析,通过实数的精确概念与 ε - δ 方法等来奠定了严实的基础。

在 18、19 世纪中,原来局限于单变量的微分与积分运算,也已推广到多变量的情形。但与把微分积分作为互逆运算的 Newton-Leibniz 微积分基本定理之限于单变量的情形相应,如何扩展至多变量的情形,则似乎并非想像中那么容易。

一个转折点似乎是近于 19 世纪之末,法国数学家 H. J. Poincaré 指出了多重积分的体积元应有一个正负定向。这一看似平凡的看法使得多重积分在坐标变换下原来有些拖泥带水的变换公式,有了一个精练的形式,并使 Newton-Leibniz 微积分基本定理到多变量的推广,步入了坦途。

H. J. Poincaré 关于体积元有定向的这一发现,导致了外微分形式的出现。

有关理论由 F. G. Frobenius, E. Cartan 等发扬光大,成为近代数学的重要篇章。对微积分本身来说,则原来以 Green, Gauss, Ostrogradsky 等命名的不同形式的定理,统一并推广成了一个简明的 Stokes 公式:

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

其中 ω 是外微分形式, D 是一个定向区域, 而 d 是外微分运算记号, ∂ 是区域取其边界。

龚昇教授强调指出, 这一 Stokes 公式正好是单变量情形的 Newton-Leibniz 微积分基本公式在多变量情形的推广。

认识这一点并非是件易事。

首先是定向的概念。法国著名的拓扑学家 Thom 教授, 曾经对本人表达过这样的意见: 定向概念是几何拓扑中最有深刻意义的伟大创造之一。对于 Thom 先生的卓识, 本人深为钦服。

其次, Stokes 定理的真正意义, 似乎并未为许多数学史家与数学家们所认识。前面已提到过的 M. Kline 一书, 就把 Stokes 定理纳入四元数向量和线性结合代数这一章中, 根本未触及 Stokes 定理的实质意义, 即其一例。

从 15、16 世纪的文艺复兴至 17、18 世纪的工业革命, 使人类从农业经济时代进入到工业经济时代。与时代的要求相适应, 在数学上出现了解析几何与微积分等伟大创造。当前, 人类又将从工业经济时代进入到一个崭新的信息时代。与新时代的要求相适应, 在数学上应有什么样的创新, 对数学家们是一个巨大的挑战, 值得人们给以严肃的关注与深长的思考。

龚昇教授以其敏锐的目光指出了微积分的核心是单变量的 Newton-Leibniz 微积分基本定理以及多变量的 Stokes 公式, 可谓切中要害, 并使高等院校的初学者得以轻松地登堂入室。龚昇教授的《简明微积分》一书, 将在汗牛充栋的微积分教程中, 占有特殊的地位。值此《简明微积分》即将四版之际, 谨志数语, 以表本人对龚昇教授的敬意。

第四版前言

已出版的微积分教材有很多很多种了,那么我为何还要再写一本?这得从1958年中国科学技术大学成立说起。

为了筹建中国科学技术大学,1958年我从中国科学院数学研究所调到中国科学技术大学教书。到学校后,大多数时间教的是非数学专业的高等数学,即微积分。教了8年之后,逐渐对微积分这门学科与这门课程,产生了一些想法与看法。于是在1965年,在中国科学技术大学近代物理系搞了一个试点班,所写的讲义就是本书的初稿。由于十年浩劫,教材直到1978年才由人民教育出版社正式出版第一册,然后出版第二册,到1981年出版第三册,于是完成了本书的第一版。1992年、1997年由中国科学技术大学出版社分别出版了第二版与第三版。现在十分高兴地得知本书能作为“普通高等教育‘十五’国家级规划教材”,由高等教育出版社出版第四版。

这本教材从1978年第一版出版后,一直在中国科学技术大学等高校作为教材,沿用至今,已有27年了。

至于1965年我对微积分这门学科与这门课程的想法与看法是什么?我于1965年写了一篇短文,题为《对高等数学课程改革的一些尝试》,刊登在《自然辩证法研究通讯》1966年第一期上,对此作了一个十分简要的说明,这当然不可能引起人们的注意。直到30年后的1995年,我在中国科学技术大学数学系的一次教学研讨会上,讲了为何30年前我要写这本微积分教材以及对微积分这门学科、这门课程的一些看法与想法时,大多数教员说从未听过。后来我又在多次有关会议及多所大学讲了这个课题,在同行们的鼓励下,以1966年刊登在《自然辩证法研究通讯》上那篇短文为基础,加以扩展与充实,写成了一本很小的小册子《话说微积分》,于1998年由中国科学技术大学出版社出版。此书后来流传较广,引起了不少人的关注。我的另一本小书《微积分杂谈》,于2002年由科学技术文献出版社出版,这将我那些年刊登过的有关对微积分的论述的文章汇集而成。2002年,陈省身教授嘱咐我到天津南开大学讲微积分,共讲了16个学时,2003年我在丘成桐教授创办的浙江大学数学科学研究中心工作期间,又作了微积分的系统讲演,共10个学时,2004年在中国科学技术大学作了20学时的微

积分的系统讲演。这三处演讲,听众都有数百人不等。在这三次演讲的基础上,写了《微积分五讲》这本小书,由科学出版社于2004年出版。这三本小书都是从不同角度,不同程度上来阐述我对微积分这门学科、这门课程的看法与想法。也是阐述我撰写本书的主导思想。这三本小书分别产生了不同影响,受到了较为普遍的关注。

我要深切感谢陈省身教授,承蒙他肯定了我对微积分的一些认识,还嘱咐我到天津去讲微积分。他对我的多次有关数学,尤其是微积分的谈话,使我深受教育,得益匪浅,例如:他十分深刻地指出了,多变量微积分与单变量微积分的根本差别在于前者有外微分形式。尤其重要的,正是由于他的大力倡导,用外微分形式的观点来讲微积分,才会被愈来愈多的人们所认识与接受。

我也要深切感谢吴文俊教授,感谢他对本书的关注。他在百忙中,以八旬高龄亲自为本书撰写了这篇十分精彩的序,使我深为感动。此文不仅评述了本书,更为重要的是十分深刻地论述了微积分的地位、微积分的产生和发展,微积分的精髓。这对读者认识微积分这门学科以及这门课程,具有十分重要的指导意义。建议读者务必认真地阅读此文。

在国内众多的微积分教材中,本书也许是第一本用外微分形式及矛盾的观点来撰写的。时光匆匆已过了四十年,本书初稿中的这些看法与想法也已愈来愈多地为人们所接受,这实在是十分令人欣慰之事。

由于四十年来,我对微积分这门学科与这门课程的想法无根本性的变化,因此,本书第四版与前面几版无根本性的改变,只是将一些章节作了些修改与补充。本书原来是作3个学期教学用的,共需大约二百多个学时。现在不少大学已将这门课程压缩为两个学期,学时也有所减少。而本书的内容并未减少,所以现在使用本书时,其中一部分内容应该删去。至于哪些部分应该删去,我想还是由教这门课程的老师自己来做主为好。

本书从一开始就与张声雷教授合作,他不但为本书配备了习题,且对本书的部分章节加以改写与补充。还以本书为教材进行了大量的教学活动,不幸他已作古多年,不胜惋惜之至。

我还要感谢这四十年关心、支持本书以及以此书为教材的广大师生们,尤其是朱国城教授,他不但长时间的以本书作为教材,且本书第四版的修订很大程度上是采纳了他的意见。

我还要感谢中国科学技术大学历任校、院、系的各位领导对本书的支持与关心,尤其是程艺教授、叶向东教授、李尚志教授、章璞教授、陈发来教授与刘太顺教授等。

最后感谢高等教育出版社为出版本书所付出的辛勤劳动,尤其是李艳霞

同志。

本书虽已再版多次,但依然会有不少缺点有待改进,请广大师生不吝赐教,不胜感激之至。

龚 昇

2005年5月于北京中关村

第二版前言

自从1958年中国科学技术大学成立以来,我有多次从事非数学专业的高等数学课程的教学工作的机会。在实际教学工作中,感到有对这门课程进行教学改革的需要,于是于1965年萌发了在中国科学技术大学近代物理系搞一个试点班的想法。当时一面讲、一面写,希望课讲完,讲义也就有了个初稿,可惜由于十年浩劫而中断。直到浩劫结束,一切重新开始,于1978年由人民教育出版社出版讲义的第一册——《简明微积分》第一册,直到1981年全书3册全部出齐。这是一本小书,从某种意义上讲,是反映了我对微积分的认识与看法,读者也许可以发现,其在内容以及处理方法上与国内通行的一些高等数学的教科书相比较,是有自己的特色的,之所以起名“简明微积分”是因为我认为:非数学专业高等数学这门课程讲的是微分与积分这对矛盾,起名微积分比高等数学更切题;还因为我认为:微积分的主要内容也就是这些,与其繁琐不如简明,这可以说是我写这本小书的一些主导思想。这本教材在中国科学技术大学已经用了十多年了,从实际教学效果来看,应该说是令人满意的。同时在十多年的教学过程中也发现了有些地方需要作些补充,有些地方需要补缺,于是由张声雷、朱国城等多位同志,在总的框架不动、原有的特色保留的基础上,对本书进行了修订,合订成一册,由中国科学技术大学出版社再版出版。我十分感谢这些老同事的辛勤劳动。十多年来以本书为教材的广大师生们也曾对本书提出过不少有益的意见,我也同样十分感谢。这本小书若经过修订再版后,可以更好地为广大师生服务,那会是一件使我很愉快的事情。

· 界

1992年2月

第一版前言

1965年,在中国科学技术大学近代物理系搞一个高等数学试点班时,我与张声雷同志合写了这本《简明微积分》。

当时我校非数学专业的高等数学课程,在教学工作中存在着3个问题:一是新同学刚入大学,学习高等数学这门主要课程时,普遍感到进度快、难度大,与中学数学距离较大,有不少困难;二是与物理课程的配合问题,物理上要用到的数学知识,却要到校后才能讲到,既影响物理教学,也影响数学的教学质量;三是学生学了这门课往往消化不良、掌握不牢、不会灵活应用。怎样才能改变这个局面呢?

毛泽东同志在“矛盾论”中指出:“在复杂的事物的发展过程中,有许多的矛盾存在,其中必有一种是主要的矛盾,由于它的存在和发展,规定或影响着其他矛盾的存在和发展。”高等数学这门课程实际上讲的是微分和定积分这一对矛盾,而以往在教学中这对主要矛盾十分不突出。由于同学未能掌握住主要矛盾,以致学到的东西不易串起来,容易忘掉。我们要使同学不仅得到一颗颗的珍珠,而且应该使他们得到一串珍珠,而把这些珍珠串起来的线,应该是这门课程的主要矛盾,所以在讲课中,就把这对主要矛盾及早引出,尽力突出。

在第一章中,首先介绍了定积分和微分的概念,然后通过微积分基本定理揭示它们如何成为对立统一的;第二章讲运算时,强调了这对主要矛盾在运算过程中的体现,指出微分和积分之间的紧密关系;第三章讲应用,训练同学用微积分作工具处理实际问题,特别注意与物理课程相配合,在用的过程中更牢固、更灵活地掌握这对主要矛盾;第四章讲的是常微分方程,把它看作微分和积分这一对矛盾的进一步发展和应用。

第二册讲多变量微积分时,应用外微分形式讲清楚微分和积分是如何成为一对矛盾的。在本书第三册要讲 ϵ - δ 语言以及傅氏分析等,并强调连续与离散的关系,使同学在前面学习的基础上更深刻地认识微积分这一对矛盾。

在教学过程中,在讲述微分和积分这对主要矛盾的同时,也指出数学中的一些基本矛盾,如:连续与离散,有限与无限,必然与偶然,数与形等,这对同学深入了解与掌握课程内容是有好处的。

关于编写这套《简明微积分》的想法,我曾写过一篇短文:“对高等数学课程改革的一些尝试”,发表在《自然辩证法研究通讯》1966年第1期上,希望进一步了解想法的读者,请参阅这篇短文。《简明微积分》第一册现在出版了,除了一

些小的修改外,基本上是13年前写的稿子。由于自己水平不高,又缺乏足够的教学实践,本书肯定有很多缺点、错误,诚恳地希望广大读者给予批评指正。

龚 昇

1978年3月

目 录

第一章 微积分的概念	1
1.1 函数与极限	1
1.1.1 数列极限与函数极限	1
1.1.2 连续函数	2
1.2 定积分	5
1.2.1 计算面积	5
1.2.2 定积分的定义	9
1.2.3 对数函数 $y = \ln x$	14
1.3 微商与微分	18
1.3.1 曲线的切线	18
1.3.2 速度、密度	19
1.3.3 微商的定义	20
1.3.4 微分	24
1.3.5 微分中值定理	26
1.4 微积分基本定理	30
第二章 微积分的运算	34
2.1 微分法	34
2.1.1 微商与微分的计算	34
2.1.2 高阶微商与高阶微分	43
2.1.3 利用微分作近似计算	47
2.2 积分法	54
2.2.1 不定积分的计算	54
2.2.2 定积分的计算	72
2.2.3 定积分的近似计算	79
第三章 微积分的一些应用	85
3.1 面积、体积、弧长	85
3.1.1 面积	85
3.1.2 体积	87
3.1.3 弧长	89
3.2 曲线的描绘	93
3.2.1 函数图形的上升和下降	93
3.2.2 函数图形的凹与凸	95
3.2.3 曲线的渐近线	97

3.2.4 描绘图形的例子	99
3.2.5 曲率	101
3.3 Taylor(泰勒)展开与极值问题	105
3.3.1 Taylor(泰勒)展开式	105
3.3.2 极值问题	110
3.4 物理应用举例	119
第四章 常微分方程	125
4.1 一阶微分方程	125
4.1.1 概念	125
4.1.2 分离变量	128
4.1.3 线性方程	135
4.2 二阶微分方程	141
4.2.1 可降阶的方程	141
4.2.2 二阶线性方程	144
4.2.3 常系数线性方程	153
4.2.4 质点振动	162
4.2.5 n 阶线性微分方程与常微分方程组	167
第五章 矢量代数与空间解析几何	179
5.1 空间直角坐标系与矢量	179
5.1.1 直角坐标系	179
5.1.2 矢量的加法与数乘	180
5.2 矢量的乘积	184
5.2.1 矢量的内积	184
5.2.2 矢量的外积	186
5.2.3 矢量的混合积	188
5.3 平面与直线	191
5.3.1 平面方程	191
5.3.2 直线方程	194
5.4 二次曲面	197
5.4.1 柱面	197
5.4.2 旋转曲面	199
5.4.3 锥面	200
5.4.4 椭球面	201
5.4.5 双曲抛物面	202
5.4.6 单叶双曲面	203
5.4.7 双叶双曲面	203
5.4.8 椭圆抛物面	204
5.5 坐标变换	205

5.5.1 坐标系的平移	206
5.5.2 坐标系的旋转	207
第六章 重积分与偏微商	211
6.1 重积分	211
6.1.1 多变量函数的极限与连续性	211
6.1.2 重积分的概念	213
6.1.3 重积分的计算	216
6.2 偏微商	225
6.2.1 偏微商与全微分	225
6.2.2 隐函数的微商	233
6.3 Jacobi(雅可比)行列式、面积元素与体积元素	247
6.3.1 Jacobi(雅可比)行列式的性质	247
6.3.2 面积元素与体积元素	248
第七章 线、面积分与外微分形式	263
7.1 数量场与矢量场	263
7.1.1 数量场的等值面与梯度	263
7.1.2 矢量场的流线	266
7.2 曲线积分	270
7.2.1 第一种曲线积分(关于弧长的曲线积分)	270
7.2.2 第一种曲线积分的应用(旋转曲面的面积)	273
7.2.3 第二种曲线积分(关于弧长元素投影的积分)	274
7.2.4 第二种曲线积分的计算方法	277
7.2.5 两种曲线积分的关系	278
7.2.6 矢量场的环流量,矢量的曲线积分	279
7.3 曲面积分	283
7.3.1 第一种曲面积分(关于面积元素的曲面积分)	283
7.3.2 矢量场的通量,第二种曲面积分(关于面积元素投影的积分)	285
7.3.3 第二种曲面积分的计算方法	287
7.4 Stokes 公式	292
7.4.1 Green 公式	292
7.4.2 Gauss 公式、散度	295
7.4.3 Stokes 公式、旋度	300
7.5 全微分与线积分	308
7.5.1 与途径无关的曲线积分	308
7.5.2 有势场	312
7.5.3 管型场	314
7.6 外微分形式	317
7.6.1 外乘积、外微分形式	317

7.6.2 外微分运算, Poincaré 引理及其逆	323
7.6.3 梯度、旋度与散度的数学意义	329
7.6.4 多变量微积分的基本定理 (Stokes 公式)	331
第八章 多变量微积分的一些应用	335
8.1 Taylor(泰勒)展开与极值问题	335
8.1.1 多变量函数的 Taylor 展开	335
8.1.2 多变量函数的极值问题	336
8.1.3 条件极值问题	340
8.2 物理上的应用举例	345
8.2.1 重心、转动惯量与引力	345
8.2.2 流体动力学的完全方程组	350
8.2.3 声的传播	353
8.2.4 热的传导	354
第九章 ε-δ 语言	358
9.1 数列极限的 ε - N 语言	358
9.1.1 数列极限的定义	358
9.1.2 数列极限的一些性质	359
9.1.3 极限存在的判别准则	362
9.2 函数连续性的 ε - δ 语言	370
9.2.1 连续趋限	370
9.2.2 连续函数的定义	376
9.2.3 连续函数的一些基本性质	378
9.2.4 函数的一致连续性	380
9.3 定积分的存在性	386
9.3.1 Darboux 和	386
9.3.2 连续函数的可积性	387
9.3.3 定积分概念的推广	393
第十章 无穷级数与无穷积分	400
10.1 数项级数	400
10.1.1 基本概念	400
10.1.2 一些收敛判别法	402
10.1.3 条件收敛级数	406
10.2 函数项级数	414
10.2.1 无穷次相加产生的问题	414
10.2.2 一致收敛函数列	415
10.2.3 一致收敛函数项级数	419
10.2.4 隐函数存在定理	422
10.2.5 常微分方程解的存在性与唯一性	426