21世纪高职高专数学系列教材

# 微积分学习辅导

霍曙光 周凡 主编

WEIJIFEN XUEXI FUDAO

华中科技大学出版社

21 世纪高职高专数学系列教材

# 微积分学习辅导

主　编　霍曙光　周　凡
副主编　陈美珍　刘　娟
主　审　周晓慧　李国裕

华中科技大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分学习辅导/霍曙光　周　凡　主编
武汉:华中科技大学出版社,2005年10月
ISBN 7-5609-3554-0

Ⅰ. 微…
Ⅱ. ①霍…　②周…
Ⅲ. 微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O172

**微积分学习辅导**　　　　**霍曙光　周　凡　主编**

---

策划编辑:徐正达　　　　封面设计:刘　卉
责任编辑:万亚军
责任校对:胡金贤　　　　责任监印:张正林

---

出版发行:华中科技大学出版社
　　　　武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

---

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:武汉市新华印刷有限责任公司

---

开本:850×1168　1/32　　印张:6.375　　字数:151 000
版次:2005年10月第1版　　印次:2005年10月第1次印刷　　定价:11.00元
ISBN 7-5609-3554-0/O・372

# 内容提要

本书是“21世纪高职高专数学系列教材”之一，是与教材《微积分》配套的专用辅导书. 全书分为8章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、多元微积分等，带“*”的部分供选用. 每章分为内容提要、疑难解析、解题指导、习题选解、综合练习5部分，章末附有综合练习参考答案.

本书适合作为高职高专各专业学生学习微积分的辅导书，也可供相当水平的自学者使用和参考.

# 前　言

为了适应高职高专教学改革的新形势，落实教育部关于高职高专“高等数学”课程教学的基本要求，根据“必需、够用”的原则，我们编写了这本与教材《微积分》配套的辅导书——《微积分学习辅导》.

本书为“21世纪高职高专数学系列教材”之一，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数与微分的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、多元微积分等8章.

本书保持了数学教学的基本规律，简化了不必要的理论推导，重点放在实际应用、综合训练方面；在叙述中力求简明易懂，深入浅出，所选例题和习题突出基础知识、基本技能、基本方法的运用，题号前有符号“*”的题目，表示有一定难度或是属于选学内容，解答注重思想方法、思路分析、思维训练的提高，以期为学生以后的继续学习打下坚实的基础.

本书由霍曙光、周凡担任主编，陈美珍、刘娟担任副主编，周晓慧、李国裕担任主审，全书由霍曙光统稿.

本教材的出版得到湖北省高职高专数学研究会的充分肯定.在编写过程中，湖北城市建设职业技术学院的领导和教务处给予了热情的关心，数学教研室的全体同志都付出了辛勤的劳动，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中差错在所难免，欢迎读者批评指正.

编　者

2005年5月

# 目　　录

# 第1章　函　　数

## 内容提要

### 一、函数及其性质

**1. 函数的定义**

设有两个变量$x$和$y$，变量$x$的变化范围为$D$，如果对于$D$中的每一个值$x$，按照某种确定的对应关系$f$，都可以确定变量$y$的一个相应值，则称变量$y$是变量$x$的一个函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

**2. 函数的两个要素**

在函数的定义中有三个因素：定义域$D$、对应关系$f$和值域$M$，其中$D$和$f$是函数的两个要素.

**3. 函数的表示方法**

1）表格法

用一表格表示变量之间的关系. 其优点是可以按所要求的精确度列表并便于查阅，但不直观.

2）图像法

借助于坐标系，将变量之间的关系用图形来描绘. 其优点是直观，但不够精确.

3）解析法

用一个解析表达式（如$y=x^2+1$）来表示两个变量之间的关系. 这种方法便于理论研究，但不直观.

**4. 函数的符号**

通常用$f,g,\varphi$等字母来表示变量$x$和$y$之间的对应关系.例如$y=f(x)$,$y=\varphi(x)$等.

**5. 函数的性质**

1）有界性

若存在正数$M$,使得在区间$I$上$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在区间$I$上有界.

2）单调性

对于区间$I$内任意两点$x_1$及$x_2$,当$x_1<x_2$时,若$f(x_1)<f(x_2)$,则称$f(x)$在区间$I$上是单调增加的函数;若$f(x_1)>f(x_2)$,则称$f(x)$在区间$I$上是单调减少的函数.

3）奇偶性

设区间$I$为关于原点对称的区间,对于任意$x\in I$,若$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为偶函数;若有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为奇函数.

4）周期性

设函数$y=f(x)$,$x\in D$,若存在常数$T>0$,有$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,满足前面等式的最小正数$T$称为函数$f(x)$的周期.

## 二、初等函数

**1. 反函数**

设已给$y$是$x$的函数$y=f(x)$.若将$y$作为自变量,$x$当作$y$的函数,所确定的函数$x=\varphi(y)$称为函数$f(x)$的反函数,而$f(x)$称为直接函数.

**2. 基本初等函数**

下列六类函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数:$y=C$ ($C$为常数).

(2) 幂函数:$y=x^{\mu}$ ($\mu$为实数).

(3) 指数函数:$y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$.

(4) 对数函数:$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$.

(5) 三角函数:正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$.

(6) 反三角函数:反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$,反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

**3. 复合函数**

设有两个函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,若将 $u=\varphi(x)$代入 $y=f(u)$中,就得到

$$y=f[\varphi(x)],$$

这个以 $x$ 为自变量,以 $y$ 为因变量的函数称为复合函数,$u$ 称为中间变量.

**4. 初等函数**

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成,且可用一个解析式表示的函数,叫做初等函数.

例如 $y=e^{x+1}$是初等函数,而不能用一个解析式表示的函数

$$y=\begin{cases}2-x, & x<2,\\ x-2, & x\geq 2\end{cases}$$

就不是初等函数.

## 疑难解析

**问题 1** 如何判断两个函数是否相同?

**解析** 判定两个函数是否相同,依据函数的两个要素:定义域与对应关系.

例如判定下列两组函数是否相同.

(1) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sin(\arcsin x)$.

在(1)中，$f(x)$与$g(x)$表示同一函数，二者的形式看似有所不同，但定义域和对应法则都相同，即

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$$

$$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

在(2)中，$f(x)$与$g(x)$不是同一函数，显然$g(x)=\sin(\arcsin x)=x$，但$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$[-1,1]$.

**问题2** 如何求函数的定义域？如何表示函数的定义域？

**解析** 函数的定义域即使函数有意义的自变量的范围，如果所求函数的定义域是用解析式表达的，即求使解析式有意义的自变量$x$的实数集；如果涉及应用问题，求函数定义域即求使实际问题有意义的实数集.定义域通常用数集来表达，而区间是简化了的数集，故用区间表示定义域较为简洁.

例如求$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x+1}$的定义域.

要使$\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x+1}$有意义，即

$$\begin{cases} 4-x^2\geqslant 0, \\ x+1\neq 0, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 2, \\ x\neq -1, \end{cases}$$

故此函数的定义域为数集$D=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2$ 或 $-1<x\leqslant 2\}$，用区间表示即为$x\in[-2,-1)\cup(-1,2]$.

**问题3** 如何求分段函数的函数值？

**解析** 分段函数指函数在定义域的不同区间内对应不同的解析式(此时函数的定义域是若干个区间的并集). 求分段函数在某一点$x=x_0$处的函数值，要看自变量$x_0$属于哪个区间，再将$x_0$代入这个区间所对应的解析式，从而求出所要求的函数值$f(x_0)$.

例如已知$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x<1,\\ 1-x, & 1<x,\end{cases}$求$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$，$f\{f[f(0)]\}$.

$$f(-1)=-1+2=1,f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},f(2)=1-2=-1,$$

$$\begin{aligned}f\{f[f(0)]\}&=f[f(0+2)]=f[f(2)]=f(1-2)\\&=f(-1)=-1+2=1.\end{aligned}$$

**问题4** 分段函数是初等函数吗?

**解析** 分段函数一般不是初等函数. 因为分段函数在不同的区间上对应不同的解析式，即它不能仅用一个解析式表示，不满足初等函数的定义，故它不是初等函数.

但也有特殊的情形，如

$$f(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

就可以用一个解析式表示，所以它是一个初等函数.

**问题5** 函数$y=f(x)$具有什么条件才有反函数?具有反函数的函数$f(x)$与其反函数$f^{-1}(y)$，$f^{-1}(x)$之间有什么关系?

**解析** 当函数$y=f(x)$的反对应关系是单值的时候才有反函数，即若$y=f(x)$在区间$I$内是单值单调的，则在区间$I$内具有反函数. 例如$y=\sin x$是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数，故在$(-\infty,+\infty)$上$y=\sin x$没有反函数. 但当$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$y=\sin x$单调增加，故此情形下可以定义反正弦函数$y=\arcsin x$. 从定义域与值域来看，函数$y=f(x)$的定义域是函数$y=f^{-1}(x)$的值域，函数$y=f(x)$的值域是反函数$y=f^{-1}(x)$的定义域，且$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$互为反函数.

具有反函数的函数$f(x)$与反函数$f^{-1}(y)$在同一坐标下的图像是同一条直线，而$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$在同一坐标系下的图像关于直线$y=x$对称.

例如求函数 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ 的值域.

直接计算该函数的值域比较困难,但可通过判断该函数是否存在反函数,同时计算其反函数的定义域来计算.原函数的反函数存在且为 $y=\dfrac{x+2}{1-x}$,其定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,所以此即为所给函数的值域.

**问题6** 初等函数有哪些常见的性质?应用这些性质时应注意些什么?

**解析** 初等函数常见的性质有单调性、有界性、周期性、奇偶性.有关单调性的讨论与有界性的讨论可以只涉及区间.如 $y=\sin x$ 不是一个单调增加的函数,但当 $x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时,$y=\sin x$ 单调增加.$y=\dfrac{1}{x}$ 不是有界函数,当 $x\in[1,2]$ 时,$y=\dfrac{1}{x}$ 是有界的.有关函数奇偶性的讨论要注意,函数的定义域关于原点对称是函数奇偶性的必要条件.在讨论函数的周期性时应注意到,一般周期函数可以找到最小正周期,但也有例外.如常函数 $f(x)=C$ 是周期函数,但找不到它的最小正周期.

简言之,在上述性质中,单调性、有界性可以在局部进行讨论,但奇偶性、周期性要在整体上进行讨论.

例如判断 $f(x)=\dfrac{2x-1}{5-x}$ 的奇偶性.

此函数的定义域为 $x\neq5$,这表明定义域不是关于原点对称的,所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

**问题7** 学习复合函数应掌握些什么?任何两个函数都能复合成复合函数吗?

**解析** 学习复合函数既要学会将基本初等函数复合成初等函数,又要学会将复合函数分解成基本初等函数,因为无论进行何种运算,实际上只能对基本初等函数实施.如计算当 $x=\pi$ 时 $f(x)=\ln(3^{\sin x})$ 的函数值,其求值过程是首先计算 $\sin\pi=0$,进而计算 $3^0=$

1，再而计算ln1，最后得到$f(\pi)=0$. 由上例可知复合函数的求值过程是由内逐渐往外，而复合函数的分解过程则是由外逐层向内. 分解的每一步都得到一个基本初等函数.

例如复合函数$y=\arctan[\ln(\arccos x^2)]$的复合过程为

$$y=\arctan u,\quad u=\ln v,\quad v=\arccos u,\quad u=x^2,$$

一般地，只有当$y=f(u)$的定义域与$u=u(x)$的值域的交集不是空集时，两个函数才能复合成复合函数. 例如函数$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$，显然在形式上可以写成$y=\arcsin(x^2+2)$，但这个函数是没有意义的. 故此两函数不能复合成复合函数.

**注** 通常把多项式函数看成基本初等函数中的幂函数.

## 解题指导

**例1** 下列各组中的函数是否是同一函数？如果不是，在自变量的哪个子集合内可视为同一个函数？

(1) $f_1(x)=|x|+|x-1|$，$f_2(x)=2x-1$；

(2) $g_1(x)=(\sqrt{x})^2$，$g_2(x)=x^2/x$.

**分析** 如果函数的定义域$D$，对应法则$f$都完全相同时，可视为同一函数；如果在函数定义域的某一部分满足确定函数的两要素，即$D$与$f$完全相同，则可视在该部分为同一函数.

**解** (1) 函数

$$f_1(x)=|x|+|x-1|=\begin{cases}1-2x, & -\infty<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-1, & 1\leqslant x<+\infty,\end{cases}$$

$$f_2(x)=2x-1,x\in\mathbf{R},$$

故$f_1(x)$与$f_2(x)$在定义域$\mathbf{R}$内不是同一函数. 但在$[1,+\infty)$上，$f_1(x)=2x-1$，$f_2(x)=2x-1$，对应法则相同，故$f_1(x)$与$f_2(x)$在定义域$x\in[1,+\infty)$内就是同一函数.

(2) $g_1(x)=(\sqrt{x})^2=x(x\geqslant0)$，$g_2(x)=x^2/x=x(x\neq0)$，显

然函数的定义域不同，故不是同一函数，但在$(0,+\infty)$内$g_1(x)=x$，$g_2(x)=x$，对应法则相同，故$g_1(x)$与$g_2(x)$在定义域$x\in(0,+\infty)$内就是同一函数.

**例 2** 已知$f(x)=ax-b/x$，且$1\leqslant f(1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(2)\leqslant 3$，求$f(3)$的取值范围.

**分析** 求函数$f(3)$的取值范围，方法是利用$f(1)$与$f(2)$解出$a$，$b$，代入$f(x)$，再由$f(1)$与$f(2)$的取值范围而得出所求函数值$f(3)$的范围.

**解** 因为$f(x)=ax-\dfrac{b}{x}$，所以

$$\begin{cases} f(1)=a-b, \\ f(2)=2a-\dfrac{b}{2}, \end{cases}$$

解得 $$a=\frac{2}{3}f(2)-\frac{1}{3}f(1),\quad b=\frac{2}{3}f(2)-\frac{4}{3}f(1),$$

所以

$$f(x)=\left[\frac{2}{3}f(2)-\frac{1}{3}f(1)\right]x-\left[\frac{2}{3}f(2)-\frac{4}{3}f(1)\right]\Big/x,$$

$$f(3)=\left[\frac{2}{3}f(2)-\frac{1}{3}f(1)\right]\times 3-\left[\frac{2}{3}f(2)-\frac{4}{3}f(1)\right]\Big/3$$

$$=\frac{16}{9}f(2)-\frac{5}{9}f(1).$$

又因为$1\leqslant f(1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(2)\leqslant 3$，所以

$$\frac{16}{3}-\frac{5}{9}\geqslant\frac{16}{9}f(2)-\frac{5}{9}f(1)\geqslant\frac{32}{9}-\frac{10}{9},$$

即 $$\frac{43}{9}\geqslant f(3)\geqslant\frac{22}{9}.$$

**例3** 设$f(x)=x^2-3x+1$，$x$为何值时，方能使下列各式分别成立？

(1) $2f(x)=f(2x)$；  (2) $f(x)+1=f(x+1)$.

**分析** 利用函数对应法则$f(x)$，将等式转化为“方程”，求得其解即为所求$x$的值.

**解** (1) 因为$f(x)=x^2-3x+1$，且$2f(x)=f(2x)$，所以

$$2(x^2-3x+1)=(2x)^2-3(2x)+1,$$

整理得 $$x^2=1/2,\quad x=\pm\sqrt{2}/2.$$

(2) 因为$f(x)+1=f(x+1)$，所以

$$x^2-3x+1=(x+1)^2-3(x+1)+1,$$

解得 $$x=3/2,$$

所以$x=\pm\sqrt{2}/2$时，$2f(x)=f(2x)$；

$x=3/2$时，　　$f(x)+1=f(x+1)$.

**例4** 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}+\sqrt{\sin x}$；

(2) $f(x)=\ln(a^x-k\cdot 2^x)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$).

**解** (1) $\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1,\\ \sin x>0\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2).$

(2) $a^x-k\cdot 2^x>0$.

当$k\leqslant 0$时，$x\in(-\infty,+\infty)$.

当$k>0$时，① 若$a>2$，则$x\in(\log_{\frac{a}{2}}k,+\infty)$；② 若$0<a<2$且$a\neq 1$，则$x\in(-\infty,\log_{\frac{a}{2}}k)$；③ 若$a=2$且$0<k<1$，则$x\in(-\infty,+\infty)$.

**注** 对含参数的问题要注意对参数的分类讨论.

**例5** 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{1}{2+x-x^2}$；

(2) $y=\dfrac{a+bx}{a-bx}$ ($a>b>0,-1\leqslant x\leqslant 1$).

**解** (1) 由所给函数式得

$$yx^2-yx-2y+1=0. \quad ①$$

因必有实数满足方程①，并且对任何实数$x$都有$y\neq 0$，于是

$$\Delta=y^2-4y(1-2y)\geqslant 0\Rightarrow y<0 \text{ 或 } y=4/9.$$

当 $x=2,-1$ 时，所给函数无意义，但这时关于 $y$ 的方程①无解，故所求值域为 $(+\infty,0)\cup(4/9,+\infty)$.

(2) 由原函数式得

$$x=\frac{a(y-1)}{b(y+1)}\Rightarrow -1\leqslant\frac{a(y-1)}{b(y+1)}\leqslant 1\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}\leqslant y\leqslant\frac{a+b}{a-b}.$$

**例 6** 判断下列情况的奇偶性：

(1) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$； (2) $f(x)=x^{k/2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

**解** (1) 此函数的定义域为 $(-1,1)$，关于原点对称，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg[1-(-x)]-\lg[1+(-x)]\\&=\lg(1+x)-\lg(1-x)\\&=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),\end{aligned}$$

故此函数为奇函数.

(2) 当 $k=4m$ $(m\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 是偶函数；当 $k=4m+2$ $(m\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 是奇函数；当 $k=4m-1$ 或 $4m+3$ $(m\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 是非奇非偶函数.

**注** 确定函数的奇偶性应先考察函数的定义域是否关于原点对称，再研究 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 是否恒成立.

**例 7** 求函数 $f(x)=\log_{0.5}|x^2-x-12|$ 的单调区间.

**解** 设 $y_1=|x^2-x-12|$，观察其图形(见图 1-1)可知，函数 $y_1$ 的单调增加区间为 $\left(-3,\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $(4,+\infty)$，此即 $f(x)$ 的单调减少区间；而 $y_1$ 的单调减少区间为 $(-\infty,-3)$ 和 $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$，此即 $f(x)$ 的单调增加区间.

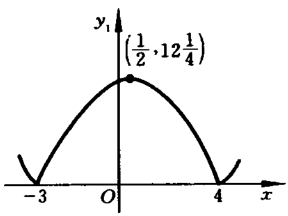


图 1-1

**例 8** 已知奇函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调减少，比较 $a=f(\log_{\frac{1}{2}}8)$ 与 $b=f\left(\pi\ln\dfrac{1}{e}\right)$ 的大小.