“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

HOPE
希望杯
全国数学邀请赛
since 1990

历届希望杯全国数学邀请赛试题精选详解

高二

曹大方 等◎编著

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

气象出版社

★ 圆形，表示广阔的天空。

★ 英文 hope（希望）形如一只展翅飞翔的鸟。喻义："希望杯"全国数学邀请赛为广大的青少年在科学思维能力上的健康发展开辟了一个广阔的空间，任他们自由翱翔。

★ "since 1990"字样表示："希望杯"全国数学邀请赛是从 1990 年开始创办的。

LIJIE XIWANGBEI QUANGUO SHUXUE YAOQINGSAI SHITI JINGXUAN XIANGJIE

ISBN 7-5029-4085-5

9 787502 940850 >

ISBN 7-5029-4085-5/G · 1135

定价：15.00元

“希望杯”数学竞赛系列丛书　　主编　周国镇

历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解

高　二

曹大方　等◎编著

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解．高二/
周国镇主编．—北京：气象出版社，2006.1
（“希望杯”数学竞赛系列丛书）
ISBN 7-5029-4085-5

Ⅰ．历…　Ⅱ．周…　Ⅲ．数学课—高中—解题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 145869 号

气象出版社出版
（北京海淀区中关村南大街 46 号　邮编：100081）
总编室：010—68407112　　发行部：010—62175925
网址：http://cmp.cma.gov.cn　E—mail：qxcbs@263.net
责任编辑：王元庆　黄丽荣　终审：章澄昌
封面设计：贾衍凤　责任技编：刘祥玉　责任校对：朱　军

*

河北天普润印刷厂印刷
气象出版社发行

*

开本：850×1168　1/32　印张：10.625　字数：276 千字
2006 年 1 月第一版　　2006 年 1 月第一次印刷
印数：1～5000　　定价：15.00 元

前　言

一个学科竞赛活动能否成功，除了评奖、组织等工作以外，命题是很关键的。“希望杯”全国数学邀请赛自1990年以来成功地举办了16届，可说是久盛不衰，这中间，试题出得好，起了特别重要的作用。中学生们都愿意研究这些试题，因为在很多试题中蕴含着的内在趣味吸引着他们，因为解答这些试题所用到的数学知识大多没有超出他们在学校里学到的数学内容，还因为在研究如何破解这些试题的过程中，自己的思维和数学能力受到了挑战，他们在经历了重重困惑、碰壁和努力之后终于获得彻悟的结果，那是多么美好的感觉！他们感受到了数学内在的魅力，数学的美，这种科学思维的美让他们感动，这种美引发的愉悦可能会引导青年人走向毕生的科学追求。

如果说“希望杯”全国数学邀请赛的全部试题都有丰富的内涵，显然是言过其实，但是其中确有那么一部分题目委实很精彩，它们有比较丰富的背景知识和比较广阔的思维空间，如果能从不同的视角和不同的层面去分析和研究它们，那么从中吸收到的知识和思维的营养必定远远超过这些题目本身。正是出于这样的认识，我们特意编辑出版了《历届“希望杯”全国数学邀请赛试题精选详解》（初一、初二、高一、高二各一册），作者中有“希望杯”命题委员会的成员，他们中有资深的数学工作者、大学教授、杰出的中学数学教师，他们都有很好的数学功底，每年都为“希望杯”全国数学邀请赛编拟许多漂亮的题目；还有多年来对“希望杯”邀请赛历届试题深有研究的中学数学教师，他们曾经培养出金银牌选手，并对“希望杯”试题发表过颇有见地的文章。这些作者在“希望杯”命题委员会的指导下，从2000多道“希望杯”全国数学邀请赛试题中精

选出了一部分，对这些题目作了尽可能详尽的分析，力求充分展示题目的内涵，于是成就了这套书。我们期望中学生读了此书，数学水平能有显著提高，中学教师读了此书，能从中得到诸多启示，从而提高自己的教学水平。这个期望能否达到，最有权威的评判当然是本书的读者们。我们真诚地希望读者对本书的不当之处提出批评和意见，我们力求再版时努力做进一步的修改。

周国镇

2005 年 11 月 22 日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；"希望杯"全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　录

第一部分　不　等　式

第1讲　不等式的性质

不等式相对于等式，具有更加丰富多彩的性质：

(1)对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$；

(2)传递性：$a>b, b>c \Rightarrow a>c$；

(3)可加性：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；

(4)可乘性：$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$，

$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$；

(5)加法法则：$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$；

(6)乘法法则：$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$；

(7)乘方法则：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$($n\in\mathbf{Z}$，且 $n>1$)；

(8)开方法则：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{Z}$，且 $n>1$)；

(9)符号法则：$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$ 及 $a>0, b>0$，且$\frac{a}{b}>1 \Rightarrow a>b$；$a<0, b<0$，且$\frac{a}{b}>1 \Rightarrow a<b$ 是比较两个实数大小的主要依据.

题1　已知 $0<a<b$，$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$，$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$，则 x，y 的大小关系是______.第11届(2000年)试题

解法1　$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}$，

$$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}=\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}.$$

因为 $$0<a<b,$$

所以 $$\sqrt{a+b}+\sqrt{b}>\sqrt{b}+\sqrt{b-a},$$

所以 $$x<y.$$

解法 2 $$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}},$$

因为 $$a+b>b-a,$$

所以 $$\frac{x}{y}<1,$$

所以 $$x<y.$$

解法 3 $$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}$$

$$=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}{a}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b-a}}{a}>0,$$

所以 $$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0,$$

所以 $$x<y.$$

解法 4 原问题等价于比较$\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}$与$2\sqrt{b}$的大小.

由 $$x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2},\text{得}$$

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a})^2\leqslant 2(a+b+b-a)=4b,$$

所以 $$\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}\leqslant 2\sqrt{b}.$$

因为 $$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{b-a},$$

所以 $$\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}<2\sqrt{b},$$

所以 $$x<y.$$

解法 5　如图 1-1,在函数 $y=\sqrt{x}$ 的图像上取三个不同的点 $A(b-a,\sqrt{b-a})$、$B(b,\sqrt{b})$、$C(a+b,\sqrt{a+b})$.由图像,显然有

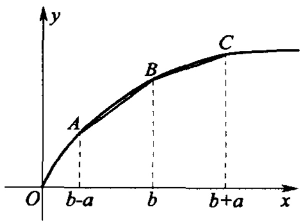

图 1-1

$$k_{BC}<k_{AB},$$

即 $$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}{(a+b)-b}<\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}{b-(b-a)},$$

即 $$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}<\sqrt{b}-\sqrt{b-a},$$

亦即 $$x<y.$$

解法 6　令 $$f(t)=\sqrt{a+t}-\sqrt{t},$$

因为 $f(t)=\dfrac{a}{\sqrt{a+t}+\sqrt{t}}$ 单调递减,

而 $$b>b-a,$$

所以 $$f(b)<f(b-a),$$

即 $$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}<\sqrt{b}-\sqrt{b-a},$$

所以 $$x<y.$$

解法 7　考虑等轴双曲线 $x^2-y^2=a(x>0)$.如图 1-2,其渐近线为 $y=x$.在双曲线上取两点 $A(\sqrt{b},\sqrt{b-a})$、$B(\sqrt{b+a},\sqrt{b})$.

由图形,显然有 $$k_{AB}>1,$$

即 $$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}>1,$$

从而 $$x<y.$$

解法 8　如图 1-3.在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 为直角,$BC=\sqrt{a}$,$AC=\sqrt{b}$,$BD=\sqrt{b}$,

则 $$AB=\sqrt{a+b},DC=\sqrt{b-a}.$$

在 $\triangle ABD$ 中,$AB-AD<BD$,

即 $$\sqrt{a+b}-AD<\sqrt{b},$$

从而 $$\sqrt{a+b}-AD-DC<\sqrt{b}-DC,$$

即 $$\sqrt{a+b}-\sqrt{b}<\sqrt{b}-\sqrt{b-a},$$

故 $$x<y.$$

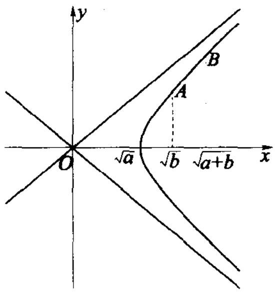

图 1-2

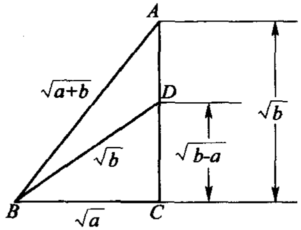

图 1-3

评析 比较大小是中学代数中的常见内容,其最基本的方法是作差比较法、作商比较法、利用函数的单调性. 解法 1 通过分子有理化(处理无理式常用此法)将问题转化成比较两个分母的大小. 解法 2 直接作商与 1 比较大小,顺理成章,也很简洁. 要注意的是:$a,b>0$ 时,$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$;$a,b<0$ 时,$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a<b$. 此题直接作差难以确定差与 0 的大小,解法 3 对 x,y 的倒数作差再与 0 比较大小,使得问题顺利获解,反映了思维的灵活性. 解法 6 运用函数的单调性解题,构造一个什么样的函数是关键. 我们认为构造的函数应使得 x,y 恰为其两个函数值,且该函数还应是单调的(最起码在包含 x,y 对应的自变量值的某区间上是单调的). 解法 5 与解法 7 分别构造函数与解析几何模型,将 x,y 的大小关系问题转化成斜率问题加以解决,充分沟通了代数与几何之间的内在联系,可谓创新解法. 解法 8 充分挖掘代数式的几何背景,构造平面图形,直观地使问题得到解决,这也是解决大小关系问题和证明不等式的常用方法.

有人对此题作出如下解答：

取 $a=1,b=2$，

则 $$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},y=\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

因为 $$\sqrt{3}+\sqrt{2}>\sqrt{2}+1>0,\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

所以 $$x<y.$$

可再取两组特殊值验证，都有 $$x<y.$$

故答案为 $$x<y.$$

从逻辑上讲，取 $a=1,b=2$，得 $x<y$. 即使再取无论多少组值(也只能是有限组值)验证，都得 $x<y$，也只能说明 $x>y$ 或 $x\geqslant y$ 作为答案是错误的，而不能说明 $x<y$ 一定是正确的，因为这不能排除 $x=y$ 的可能性. 因此答案虽然正确，但解法是没有根据的. 当然，如果将题目改为选择题：

已知 $0<a<b,x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b},y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$，则 x,y 的大小关系是　　(　　)

(A) $x>y$.　(B) $x\geqslant y$.　(C) $x=y$.　(D) $x<y$.

此时用上述解法，且不用再取特殊值验证就可选(D)，并且方法简单，答案一定正确.

总而言之，特殊值法在解许多选择题时显得特别简捷，那是因为选择支中的正确答案是惟一的，从而通过特殊值排除干扰支，进而选出正确答案. 但特殊值法只能排除错误结论，而不能直接肯定正确答案，因此，用此法解填空题(少数特例除外)与解答题是没有根据的. 当然，利用特殊值指明解题方向还是十分可取的.

题 2　已知 $f(x)=\log_{\sin\theta}x,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，设 $a=f\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)$，

$b=f(\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})$, $c=f\left(\frac{\sin2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)$,那么 a、b、c 的大小关系是 ( )

(A)$a\leqslant c\leqslant b$. (B)$b\leqslant c\leqslant a$. (C)$c\leqslant b\leqslant a$. (D)$a\leqslant b\leqslant c$.

第 8 届(1997 年)试题

解法 1 设 $$\sin\theta=p,\cos\theta=q.$$

因为$\frac{p+q}{2}\geqslant\sqrt{pq}$,而 $f(x)$是减函数,

所以 $$f\left(\frac{p+q}{2}\right)\leqslant f(\sqrt{pq}),$$

即 $$a\leqslant b.$$

因为 $$\sqrt{pq}\leqslant\frac{p+q}{2},$$

所以 $$pq\leqslant\frac{(p+q)\sqrt{pq}}{2},\frac{2pq}{p+q}\leqslant\sqrt{pq}.$$

所以 $$f\left(\frac{2pq}{p+q}\right)\geqslant f(\sqrt{pq}),$$

即 $c\geqslant b$,故 $a\leqslant b\leqslant c$.

选(D).

解法 2 由题意,令 $$\theta=\frac{\pi}{6},$$

则

$$\sin\theta=\frac{1}{2},\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{4},$$

$$\sqrt{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2},\frac{\sin2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

因为 $\sin\theta=\frac{1}{2}\in(0,1)$,所以 $f(x)$是减函数,

又 $$\frac{1+\sqrt{3}}{4}>\frac{\sqrt[4]{3}}{2}>\frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

所以 $$f\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)<f(\sqrt{\sin\theta\cos\theta})<f\left(\frac{\sin2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right),$$

即 $$a<b<c.$$

故选(D).

评析　这是一个比较函数值大小的问题，通常利用函数的单调性. 若函数 $f(x)$ 单调递增(减)，则当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$；当 $x_1>x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$. 因此解决问题的关键有两个：一是确定函数的单调性，二是确定自变量的大小关系. 解法 1 就是这样解决问题的.

因为正确答案应对一切 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 都正确，故又可以运用特殊值法. 对 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的某个角不正确的选择支都是错误的，由正确选择支的惟一性，也可选出正确答案. 解法 2 便是取特殊值 $\theta=\frac{\pi}{6}$，排除了(A)、(B)、(C)而选(D).

当然，此题也可用作差比较法来解：因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta\in(0,1)$，所以 $f(x)$ 是单调减函数，

$$\sin\theta>0,\cos\theta>0.$$

所以

$$a-b=\log_{\sin\theta}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}-\log_{\sin\theta}\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

$$=\log_{\sin\theta}\frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}{\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}}\leqslant\log_{\sin\theta}1=0,$$

所以 $$a\leqslant b.$$

又 $$b-c=\log_{\sin\theta}\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}-\log_{\sin\theta}\frac{\sin2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\log_{\sin\theta}\frac{\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}}{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}=\log_{\sin\theta}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\leqslant\log_{\sin\theta}1$$

$$=0,$$

即 $$b\leqslant c,$$

所以 $$a\leqslant b\leqslant c.$$

选(D).

第2讲 解不等式

一元一次不等式和一元二次不等式是最基本也是最简单的不等式,其他不等式,如高次不等式、分式不等式、根式不等式、绝对值不等式、指数不等式、对数不等式及含有字母系数的不等式通常都转化为一元一次不等式(组)或一元二次不等式(组)来解,解不等式就是一个同解变形的过程,常常运用分类讨论、数形结合的思想方法,还应注意到不等式与方程、函数及其他知识的联系.

题3 已知 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$,不等式 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_a|x-1|}<\frac{9}{4}$ 的解是______.

第3届(1992年)试题

解 原不等式即 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_a|x-1|}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. 因为指数函数 $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 是减函数,$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$,所以原不等式化为 $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|x-1|>-2$,即 $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|x-1|>\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$. 又因为对数函数 $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x$ 是减函数,所以 $|x-1|<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$,即 $|x-1|<2$,解得 $-1<x<3$. 因为对数函数

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|x-1|$的定义域是$x\neq 1$的实数，所以原不等式的解是$-1<x<1$或$1<x<3$.

评析 此题涉及到指数不等式、对数不等式、绝对值不等式的解法.解指数不等式与对数不等式的基本方法是同底法，即先将不等式两边的指数式或对数式化成底数相同的指数式或对数式，然后根据底数所属区间是$(0,1)$或$(1,+\infty)$，确定以该底数为底的指数函数或对数函数的单调性，再去掉底数或对数符号，转化成别的不等式.主要依据如下：

(1)若$0<a<1$，则$a^{f(x)}<a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

(2)若$a>1$，则$a^{f(x)}<a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$；

(3)若$0<a<1$，则$\log_a f(x)<\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$；

(4)若$a>1$，则$\log_a f(x)<\log_a g(x)\Leftrightarrow 0<f(x)<g(x)$.

有时需要将常数化为指数式或对数式，其化法如下：

(1)$a=C^{\log_c a}(a>0,c>0$，且$c\neq 1)$；(化为指数式)

(2)$a=\log_c c^a(c>0$，且$c\neq 1)$.(化为对数式)

例如，$2=3^{\log_3 2}$将常数2化为3为底的指数式，$2=\log_3 3^2$将常数2化为3为底的对数式.解指数不等式不需检验，但解对数不等式必须保证解使得对数式有意义，这点常被忽略.若一个指数不等式的指数部分是对数式，常常采用取对数法求解.

例 不等式$(\sqrt{x})^{\lg\sqrt{x}}>x$的解集是______.

第11届(2000年)试题

解 两边取常用对数，得$(\lg\sqrt{x})^2>\lg x$，即

$$\frac{1}{4}\lg^2 x-\lg x>0,\lg^2 x-4\lg x>0,\lg x<0\text{ 或 }\lg x>4,$$

所以$0<x<1$或$x>10^4$.故所求解集是$(0,1)\cup(10^4,+\infty)$.

应当指出，两边取对数后，不等号的方向变不变，关键看取的是什么底数.如果底数大于1，则不等号方向不变；如果底数大于0且小于1，则不等号方向改变.