数学建模入门培训教材

数学建模

张兴永 朱开永 编著

煤炭工业出版社

数 学 建 模

张兴永　朱开永　编著

煤炭工业出版社
·北　京·

内 容 提 要

本书通过大量的实际问题，介绍了数学建模的各种方法及数学应用的广泛性和无穷魅力. 全书共分 6 章，分别介绍了数学模型的基本概念、古典模型、微分方程模型、随机模型、运筹与优化模型及建模范例.

书中每章后配备了大量的思考题及供学生练习的各种实际问题，以及给出了在教学过程中用于学生写小论文或进行数学建模竞赛培训的各种实际问题. 通过学习，对于学生分析和解决实际问题综合能力及创新能力的培养很有帮助.

本书可作为高等学校各专业学生数学建模课程的教材和参加数学建模竞赛的入门培训教材以及科技工作者的参考书，尤其可作为数学应用的普及读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/张兴永，朱开永编著．—北京：煤炭工业出版社，2005

高等学校规划教材

ISBN 7－5020－2832－3

Ⅰ．数… Ⅱ．①张…②朱… Ⅲ．数学模型－高等学校－教材 Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 159306 号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
网址：www.cciph.com.cn
北京京科印刷有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 14
字数 338 千字 印数 1—3,000
2006 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 1 次印刷
社内编号 5616 定价 25.00 元

前　言

随着数学建模教育的普及和发展，全国高等院校都在积极开设“数学建模”课程，由于这门课程提供了用数学方法来解决各种实际问题的方法和途径，且在学习、思考过程中，培养了应用数学分析、解决问题的综合能力，所以，“数学建模”课程越来越受到高等院校师生的重视，数学建模教育的受益面正在逐步地扩大.

目前，数学建模教育正在全国高等院校蓬勃发展，数学建模的课程建设及教学研究也在不断的探索之中，虽然国内已出版了一些数学建模教育的教材及参考书，但仍缺乏数学建模教育及数学应用的普及读物.

我们自 1994 年以来一直从事本科生、研究生的数学建模教育工作，在长期的教学过程中，积累了丰富的教学经验，收集了大量的教学资料，并于 2001 年编写出版了《数学建模简明教程》. 为了扩大数学建模教育的受益面及满足各高等院校“数学建模”课程教学的需要，经过十多年的教学实践，我们在对原教程进一步修改和完善的基础上，参阅了国内外大量的数学建模教学资料，编写了这本《数学建模》教材.

本书收集了大量有趣的实际问题. 通过这些问题完整的解决过程，介绍了数学应用的各种方法和途径. 通过本书的学习，读者可以体会到数学应用无处不在，我们身边大量的实际问题看起来好像与数学无关，但经过分析、简化和假设，可以用数学完美地解决，体现了数学应用的广泛性和无穷魅力. 本书特点是注重解决实际问题的数学建模过程，由浅入深，通俗易懂，便于教学，特别适用于本科生入门及专科教学使用. 阅读本书的读者只需具有高等数学、线性代数、概率论的基本知识，即可接受和理解.

本书共分 6 章，分别介绍了数学模型的基本概念、古典模型、微分方程模型、随机模型、运筹与优化模型及建模范例. 书中每章后配备了大量的思考题及供读者练习的各种实际问题，以及给出了在教学过程中用于学生写小论文或进行数学建模竞赛培训的各种实际问题. 本书可以用于 32～60 学时的教学.

由于水平有限，编写过程中难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

编著者
2006 年 1 月

目　　录

第1章 数学模型基本概念

§1.1 引 言

随着科学技术的迅速发展，人们在各个领域的研究已进入了定量化和精确化阶段，数学被越来越广泛地应用到自然科学、社会科学、工业技术和经济管理等各个领域之中.现代社会不仅仅需要一些数学家和专门从事数学研究的人才，更需要一些善于运用数学知识及数学思维方法来解决实际问题的非数学专业人才.他们不是为了应用数学知识而去寻找实际问题，而是灵活应用数学知识去解决实际问题.这些实际问题几乎都不能直接套用现成的数学公式，其中的数学奥妙不是对复杂的实际问题进行分析，而是发现其中可以用数学语言来描述的关系或规律，把这个实际问题转化成一个数学问题，这就是所谓的数学模型，建立数学模型的这个过程就称为数学建模.因此，为了定量研究各个领域中的实际问题，首先需要建立其数学模型；特别是随着信息技术的迅速发展，数学与计算机技术相结合，数学模型起着极为重要的作用，如飞机的设计如何在计算机里进行模拟，发射卫星为什么用三级火箭等，都离不开数学模型；再如，荣获诺贝尔医学奖的CT技术，其核心就是由 X 光成像反推三维结构的数学模型——Rador变换.可以说高技术实际上是一种“数学技术”.因此，数学建模在当今高科技飞速发展的时代越来越显示其重要性.

教育必须反映社会实际需要，数学建模进入课堂，既顺应时代发展的潮流，也符合教育改革的要求.对于数学教育而言，既应该让学生掌握准确快捷的计算方法和严密的逻辑推理，更需要培养学生用数学工具分析解决实际问题的意识和能力，开设数学建模课程正是加强这种能力的有益尝试.数学建模教育及“数学建模”课程普遍进入中国学校虽然是近年来的事情，但这门新课程一开设，立刻引起强烈的反响，现已在全国各高等院校蓬勃发展起来.传统的数学教育着重于知识的传授，学生在遇到实际问题时，怎样应用数学知识及方法去解决它，感到非常困难.要把数学知识和方法应用到科学技术领域中去，它不但需要应有的数学知识，把数学的基本思想、基本理论融会贯通，而且更重要的是要了解实际问题的工程、物理背景，即需要一种把数学与实际问题相结合的能力，这就是数学建模能力.数学建模课程打开了用数学方法去解决实际问题的思路，它着重于怎样解决实际问题的过程，通过各种不同的实际问题，介绍应用数学知识解决各种问题的方法、途径，培养学生应用数学方法分析、解决实际问题的能力.

让我们来看一看下面几个简单问题是怎样解决的.

问题1 已知甲桶中放有10 000个蓝色的玻璃球，乙桶中放有10 000个红色的玻璃球.任取甲桶中100个球放入乙桶中，混合后再任取乙桶中100个球放入甲桶中，如此重

复3次，问甲桶中的红球多还是乙桶中的蓝球多？

解 设甲桶中有 x 个红球，乙桶中有 y 个蓝球.

因为对蓝球来说，甲桶中的蓝球数加上乙桶中的蓝球数等于10 000，所以

$$10\,000 - x + y = 10\,000,$$

即

$$x = y .$$

故甲桶中的红球与乙桶中的蓝球一样多.

问题2 某人早8时从山下旅店出发沿一条路径上山，下午5时到达山顶并留宿，次日早8时沿同一路径下山，下午5时回到旅店，则必存在某时刻 t_0，使这人在两天中的同一时刻 t_0 经过途中的同一地点，为什么？

解法1 将两天看作一天，一人两天的运动看作一天两人同时分别从山下和山顶沿同一路径相反运动，因为两人同时出发，同时到达目的地，又沿同一路径反向运动，所以必在中间某一时刻 t_0 两人相遇，这说明某人在两天中的同一时刻 t_0 经过路途中的同一地点.

解法2 以时间 t 为横坐标，以沿上山路线从山下旅店到山顶的路程 x 为纵坐标，从山下到山顶的总路程为 d .

在 t 时刻：

第一天的行程可设为 $x = F(t)$，则 $F(t)$是单调增加的连续函数，$F(8)=0, F(17)=d$.

第二天的行程可设为 $x = G(t), G(t)$是单调减少的连续函数，且 $G(8)=d, G(17)=0$，在坐标系中分别作曲线 $x=F(t)$及 $x=G(t)$，如图1-1，则两曲线必相交于 $P(t_0, x_0)$点，即这个人两天在同一时刻 t_0 经过同一地点.

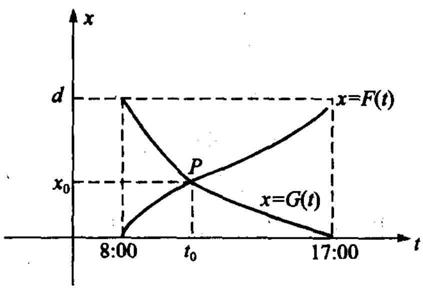

图1-1

严格的数学论证：

令 $H(t) = F(t) - G(t)$.

由 $F(t)$，$G(t)$在区间[8,17]上连续，得 $H(t)$在区间[8,17]上连续. 又

$$H(8) = F(8) - G(8) = 0 - d = -d < 0,$$
$$H(17) = F(17) - G(17) = d - 0 > 0 .$$

由介值定理知，在区间[8,17]内至少存在一点 t_0 使 $H(t_0)=0$，即

$$F(t_0) = G(t_0). \text{（}t_0\text{ 是惟一的，为什么？）}$$

这说明在8:00至17:00之间存在某一时刻 $t = t_0$ 使得路程相等，即这人两天在同一时刻 t_0 经过路途中的同一地点 $x_0 = F(t_0) = G(t_0)$.

思考题

若下山时，这人下午3点就到达山下旅店，结论是否成立？

问题3 在一摩天大楼里有三根电线从底层控制室通向顶楼，但由于三根电线各处的转弯不同而有长短，因此，三根电线的长度均未知. 现工人师傅为了在顶楼安装电气设备，需要知道这三根电线的电阻. 如何测量出这三根电线的电阻？

任何万用表也不能把一头放在十几层楼房间里的 a' 处，另一头放在底楼控制室的 a 处，这该怎么办？

方法　不妨用 a、b、c 及 a'、b'、c' 分别表示三根电线的底端和顶端，并用 aa'、bb'、cc' 分别表示三根电线，假设 x,y,z 分别是 aa'，bb'，cc' 的电阻，这是三个未知数.电表不能直接测量出这三个未知数.然而我们可以把 a' 和 b' 连接起来，在 a 和 b 处测量得电阻 $x+y$ 为 l；然后将 b' 和 c' 联接起来，在 b 和 c 处测量得 $y+z$ 为 m，连接 a' 和 c' 可测得 $x+z$ 为 n，这样得三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=l, \\ y+z=m, \\ x+z=n . \end{cases}$$

由此三元一次线性方程组解出 x,y,z，即得三根电线的电阻.

说明

此问题的难点也是可贵之处是用方程"观点"、"立场"去分析，用活的数学思想使实际问题转到新创设的情景中去.

问题4　崖高的估算

假如你站在崖顶且身上带着一只具有跑表功能的计算器，你也许会出于好奇心想用扔下一块石头听回声的方法来估计山崖的高度，假定你能准确地测定时间，你又怎样来推算山崖的高度呢，请你分析一下这一问题.

解　假定空气阻力不计，可以直接利用自由落体运动的公式

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

来计算.例如，设 $t=4\ \mathrm{s}$，$g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$，则可求得 $h\approx 78.5\ \mathrm{m}$.

问题　结果准确吗？能否用微积分进一步处理？

除去地球吸引力外，对石块下落影响最大的当属空气阻力.根据流体力学知识，此时可设空气阻力正比于石块下落的速度，阻力系数 K 为常数，因而，由牛顿第二定律可得

$$F=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-Kv .$$

令 $k=K/m$，解得

$$v=C\mathrm{e}^{-kt}+\frac{g}{k},$$

代入初始条件 $v(0)=0$，得 $C=-g/k$，故有

$$v=\frac{g}{k}-\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-kt},$$

再积分一次，得

$$h=\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}\mathrm{e}^{-kt}+C,$$

代入初始条件 $h(0)=0$，得到计算山崖高度的公式：

$$h=\frac{g}{k}t+\frac{g}{k^2}\mathrm{e}^{-kt}-\frac{g}{k^2}=\frac{g}{k}\left(t+\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kt}\right)-\frac{g}{k^2}. \tag{1.1}$$

若设 $k=0.05$ 且仍设 $t=4\ \mathrm{s}$，则可求得 $h\approx 73.6\ \mathrm{m}$.

将 e^{-kt} 用泰勒公式展开并令 $k\to 0^+$，即可得出前面不考虑空气阻力时的结果.

进一步深入考虑：

听到回声再按跑表，计算得到的时间中包含了反应时间，不妨设平均反应时间为 0.1 s，假如仍设 $t=4$ s，扣除反应时间后应为 3.9 s，代入式(1.1)，求得 $h\approx69.9$ m．

再一步深入考虑：

还应考虑回声传回来所需要的时间．为此，令石块下落的真正时间为 t_1，声音传回来的时间记为 t_2，还得解一个方程组：

$$\begin{cases} h=\dfrac{g}{k}\left(t_1+\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{-kt_1}\right)-\dfrac{g}{k_2}, \\ h=340t_2, \\ t_1+t_2=3.9\ . \end{cases}$$

这一方程组是非线性的，求解不太容易，为了估算崖高竟要去解一个非线性方程组似乎不合情理．

相对于石块速度，声音速度要快得多，我们可用方法二先求一次 h，令 $t_2=h/340$，校正 t，求石块下落时间 $t_1\approx t-t_2$，将 t_1 代入式（1.1），得出崖高的近似值．例如，若 $h=69.9$ m，则 $t_2\approx0.21$ s，故 $t_1\approx3.69$ s，求得 $h\approx62.3$ m．

通过以上几个简单问题的解决过程可以看出，在我们生活和工作的周围，有些实际问题看起来好像与数学无关，但通过细致的观察、分析及假设，都是可以应用数学方法简捷和完美的解决．可见，数学的应用是非常灵活和十分广泛的．

§1.2 数学模型基本概念

1.2.1 模型

什么叫模型？模型就是对现实原型的一种抽象或模仿．这种抽象或模仿自然要抓住原型的本质，抛弃原型中的次要因素．从这个意义上讲，模型既反映原型，又不等于原型，或者说它是原型的一种近似．如地球仪这个模型，就是对地球这一原型的本质和特征的一种近似和集中反映；一个人的塑像就是这个人的一个模型．按照这种说法，模型的含义非常广泛，如自然科学和工程技术中的一切概念、公式、定律、理论，社会科学中的学说、原理、政策，甚至小说、美术、表格、语言等都是某种现实原型的一种模型．

如：牛顿第二定律 $F=ma$ 就是“物体在力的作用下，其运动规律”这个原型的一种模型（数学模型）．“吃饭”这句话就是人往嘴里送东西达到充饥的动作的抽象，如此等等，都可看作是模型．

在自然界里，许多实际问题的解决是通过模型实现的，如飞机的设计首先要制造模型，为了练习射击的准确性，通常是对着靶子练习而不是对着人练习；一项优化设计模型，既可使该项设计科学可靠，又可取得相当大的经济效益，如三峡工程模型、核电站设计模型等．因此，模型在现实生活中具有重要意义．

1.2.2　数学模型的几个简单例子

1. 万有引力定律：$F=K\frac{m_1m_2}{r^2}$

万有引力定律描述了物体之间的力学规律，它的发现是牛顿在力学上的重大贡献之一.牛顿在研究力学的过程中发明了微积分，又成功地在开普勒三定律的基础上运用微积分推导了万有引力定律，这一创造性的成就可以看作为历史上最著名的数学模型之一.

牛顿认为一切运动都有其力学原因，开普勒三定律的背后必定有某个力学规律在起作用，他要构造一个模型加以解释，终于他以自己发明的微积分作为工具，在开普勒三定律和牛顿第二定律的基础上演绎出万有引力定律，这一定律只所以被视为牛顿在力学上的最伟大的贡献之一，被视为历史上最著名的数学模型之一，是因为这一定律成功地定量解释了许多自然现象，包括天体的星球运动，并且也为其后一系列的观测和实验数据所证实，因此成为物理学中的一个基本定律.

2. 冷却问题

将温度为 $T_0=150$ ℃的物体放在温度为 24 ℃的空气中冷却，经 10 min 后，物体温度降为 $T=100$ ℃，问 $t=20$ min 时，物体的温度是多少?

分析　该问题仅涉及必然现象，且是一个冷却现象的物理问题，自然要用到牛顿冷却定律：物体在空气中的冷却速度与该物体的温度及空气温度之差成正比.因为冷却定律涉及到冷却速度，这反映在数学上必然要用到微分方程.经过上述分析，物体的物理规律和数学描述都搞清楚了，模型便可直接建立.

解　设物体的温度 T 随时间 t 的变化规律为 $T=T(t)$，由冷却定律及条件，可得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-24),\\ T(0)=150\ ℃,\end{cases}$$

其中 $k>0$ 为比例常数，负号表示温度是下降的，这就是所要建立的数学模型.

由于这个模型是一阶线性微分方程，很容易求出其特解为

$$T=126\mathrm{e}^{-kt}+24\ .$$

由 $T(10)=100$，可定出 $k\approx0.05$，所以

$$T=126\mathrm{e}^{-0.05t}+24\ .$$

当 $t=20$ 时，

$$T(20)=126\mathrm{e}^{-0.05\times20}+24\approx64\ ℃.$$

此数学模型是通过物理定律和数学手段直接建立的，由此可知：对于实际问题要建立数学模型，不但要用到数学知识，而且更重要的要知道相关的专业知识，如本例若不知道冷却定律就很难建立数学模型.

3. 七桥问题

在 18 世纪哥尼斯堡城（原苏联的加里宁格勒）有七座桥联系着两岛 A 和 B 及陆地 C 和 D，如图 1－2(a)所示.每当晚霞时，哥尼斯堡的大学生们都喜欢到桥上散步，久而久之，他们提出这样的问题：

(1) 能否不重复地一次走完七座桥？

(2) 能否不重复地一次走完七座桥又回到原地？

当时很多人对这个有趣的问题做了大量的试验均未成功，这就是著名的哥尼斯堡七桥问题.

那么这个问题是否有解？

后来有人写信向当时著名的数学家欧拉请教，据说欧拉用了两天两夜的时间解决了这个问题.

欧拉方法：岛 A、B 和陆地 C、D 无非都是桥的联结点，因此，不妨把 A、B、C、D 看成 4 个点，把七桥看成联结这些点的七条线，如图 1 - 2 (b)所示.

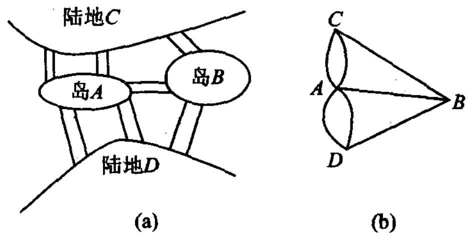

图 1 - 2

这样当然不改变问题的实质，于是一人能否不重复一次通过七座桥的问题等价于其网络图能否一笔画成的问题（这是思维的飞跃），此网络图 1 - 2(b) 就是七桥问题的数学模型.

欧拉证明了七桥问题是无解的，并给出了一般结论：

(1) 联接奇数个桥的陆地仅有一个或超过两个以上，不能实现一笔画.

(2) 联接奇数个桥的陆地仅有两个时，则从两者任一陆地出发，可以实现一笔画而停在另一个陆地.

(3) 每个陆地都联接有偶数个桥时，则从任一陆地出发都能实现一笔画，而回到出发点.

说明

(1) 数学模型不一定都是数学表达式，如七桥问题的数学模型是一个网络图.

(2) 欧拉解决七桥问题时，超出了过去解决问题所用数学方法的范畴，充分发挥自己的想像力，用了完全崭新的思想方法（可称为几何模拟方法），从而使问题解决得十分完美，结论明确而简捷. 由于他的开创性的工作，产生了“图论”这门学科，欧拉是人们公认的图论的创始人.

(3) 图论是一门非常有用的学科，很多实际问题都可化为图论问题解决.

问题 某仓库要存放 7 种化学药品，用 $V_1, V_2, \cdots V_7$ 分别表示 7 种药品，已知不能存放在一起的药品为 (V_1, V_2), (V_1, V_4), (V_2, V_3), (V_2, V_5), (V_2, V_7), (V_3, V_4), (V_3, V_6), (V_4, V_5), (V_4, V_7), (V_5, V_6), (V_5, V_7), (V_6, V_7)，问至少应把仓库分成多少隔离区才能确保安全？

解 先把各种药品作为节点，节点集为 $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7\}$，然后把不能存放在一起的药品用边相连，这样就构成一个图，如图 1 - 3 所示.

为了决定分区，要对药品进行分区编号，规则如下：

(1) 各边的两个节点不能编在同一区号；

(2) 为节省分区，以 A 区、B 区、C 区、…顺序编号，且尽量使用小的区号.

现按次序由规则将各节点逐个编号，先将 V_1 编在 A 区，因为 V_2 与 V_1 有边相连，所

以把 V_2 编在 B 区，又 V_3 与 V_2 有边相连，但与 V_1 无边相连，故将 V_3 编在 A 区……依次类推，最后一点 V_7 既与 V_5 相连，也与 V_2，V_4 相连，所以 V_7 既不能编在 A 区，也不能编在 B 区，只好编在 C 区，从而这 7 种药品可用 3 个隔离区存放，每个区存放的药品分别为

A 区：V_1, V_3, V_5；

B 区：V_2, V_4, V_6；

C 区：V_7 .

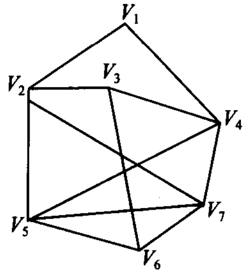

图 1－3

对于 n 种药品，同样可根据上述规则，通过计算机依次编区.

4. 走路问题

问题　人在恒速行走时，步长多大才最省劲?

假设人的体重为 M，腿重为 m，腿长为 l，速度为 v，单位时间步数为 n，步长为 x，其中 $v = nx$.

人行走时所作的功可以认为由两部分组成：即抬高人体重心所需的势能与两腿运动所需动能之和.下面分别计算两部分的做功：

(1) 重心升高所需的势能.将人的行走简化成如图 1－4 所示，若记重心升高为 δ，则

$$\delta = l - l\cos\theta = l - l[1-(\sin\theta)^2]^{\frac{1}{2}} = l - l\left(1-\frac{x^2}{4l^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

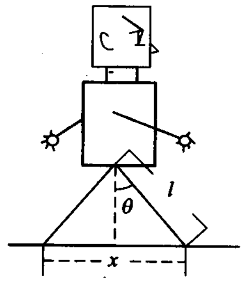

图 1－4

假定 $\frac{x}{l}$ 较小，取 $\left(1-\frac{x^2}{4l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的二项展开式的前两项，得

$$\delta \approx l - l\left(1-\frac{x^2}{8l^2}\right) = \frac{x^2}{8l},$$

于是，单位时间重心升高所需势能 W 为

$$W = nMg\delta = \frac{Mgv}{8l}x,$$

其中 $v = nx$.

(2) 腿运动所需的动能.我们将人行走视为均匀直杆（腿）绕腰部的转动，则在单位时间内所需动能 E 为

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \cdot n,\quad \omega\ 为角速度, \omega = \frac{v}{l},$$

其中转动惯量

$$I = \int_0^l \frac{m}{l}r^2\mathrm{d}r = \frac{1}{3}ml^2,$$

所以

$$E = \frac{n}{2}\frac{ml^2}{3}\left(\frac{v}{l}\right)^2 = \frac{n}{6}mv^2 = \frac{mv^3}{6x}.$$

于是，单位时间所作的功 P 为

$$P = W + E = \frac{Mgv}{8l}x + \frac{mv^3}{6x}. \tag{1.2}$$

因为作功少就省劲，所以问题就变成寻求步长 x 使单位时间内作的功 P 最小.

这是一个简单的极值问题：

令
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=0,$$

所以
$$x=\sqrt{\frac{4mlv^2}{3Mg}},\qquad n=\sqrt{\frac{3Mg}{4ml}}.$$

若以 $M:m=4:1$，$L=1$ m 代入上式，可得
$$n\approx5,$$
即每秒 5 步，这显然太快了.

今对模型（1.2）式作如下修改：假设腿重集中在脚上，这样腿的运动所需动能即为脚作直线运动所需动能，于是
$$E'=n\cdot\frac{1}{2}mv^2=\frac{mv^3}{2x},$$

从而
$$P'=\frac{Mgv}{8l}x+\frac{mv^3}{2x}.$$

求极值可得
$$n=\sqrt{\frac{Mg}{4ml}}\approx3\,.$$

这是比较符合实际情况的.

1.2.3 数学模型基本概念

前面已介绍了几个数学模型实例，由此对数学模型的概貌有所了解，现介绍数学模型的定义及建立数学模型的方法和步骤.

1. 数学模型的定义

现在数学模型还没有一个统一的定义，因为站在不同的角度可以给出不同的定义.下面给出数学模型的一种定义.

数学模型就是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定的目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构；它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制等.

具体地说，数学模型就是为了某种目的，用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式及图表、图像、框图等描述客观事物的特征及内在联系的数学结构.

2. 建立数学模型的方法和步骤

1）观察

在建模前应对实际问题的背景有深刻的了解，进行全面深入细致的观察.明确所要解决问题的目的要求，并按要求收集必要的数据，且数据必须符合所要求的精确度.

2）现实问题的理想化

现实问题错综复杂，涉及面广，必须先将问题理想化、简单化，即首先抓住主要因素，暂不考虑次要因素.理清变量之间的关系，进行必要的假设，要注意的是不同的假设会得到不同的模型，这一步是建立模型的关键.

如果假设合理，则模型与实际问题比较吻合，如果假设不合理或过于简单（即过多地

忽略了一些因素)，则模型与实际情况不吻合或部分吻合，就要修改假设，修改模型.

3) 建立数学模型

根据已有假设，可以着手建立数学模型.

建立数学模型应注意以下几点：

(1) 分清变量类型，恰当使用数学工具.如果实际问题中的变量是确定性变量，建模时数学工具多用微积分、微分方程、线性规划、非线性规划、网络、投入产出、确定性存储论等.如果变量是随机变量，数学工具多用概率统计及随机性存储论、排队论、对策论、决策论等.由于数学分支很多，加之相互交叉渗透，又派生许多分支，具体用什么数学知识，应看自己对哪方面比较熟悉精通，尽量发挥自己的特长.总之，对变量进行分析是建立数学模型的基础.

(2) 抓住问题的本质，简化变量之间的关系.如果模型过于复杂，会导致求解困难或无法求解，因此，应尽可能用简单的模型（如线性化、均匀化等）来描述客观实际.

(3) 建立数学模型时要有严密的数学推理.模型本身（如微分方程或图形）要正确，否则造成建模失败，前功尽弃.

(4) 建模要有足够的精度.既要把实际问题（原型）本质的东西和关系反映进去，又要把非本质的东西去掉，同时注意要不影响反映现实的真实程度.

4) 模型求解

不同的模型要用不同的数学知识求解，特别是要借助于计算机这个工具.

5) 模型的分析、验证

一个模型是否反映了客观实际，可用已有的数据去验证，如果由模型计算出来的理论数值与实际数值比较吻合，则模型是成功的；如果理论数值与实际数值差别太大，则模型是失败的；如果理论数值与实际数值部分吻合，则可找原因，发现问题，修改模型（当然并非所有模型都要验证）.

6) 模型的修改

实际问题往往比较复杂，由于理想化抛弃了一些次要因素，因此，数学模型与实际问题就不完全吻合了.此时，要分析假设的合理性，将合理部分保留，不合理部分修改，对实际问题中次要因素再次分析，如果某一因素被忽略而使前面模型失败或部分失败，则再建立模型时把它考虑进去.有时可能要去掉一些变量，改变一些变量的性质，如把变量看成常量，连续变量看成离散变量，离散变量看成连续变量，或改变变量之间的函数关系，如线性改为非线性等.

以上步骤也可用框图 1－5 表示.

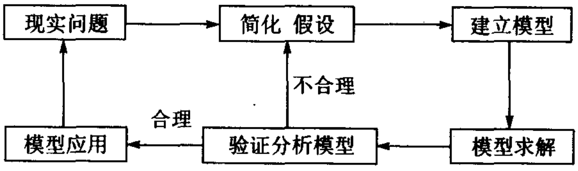

图 1－5

由上可知，要掌握好数学建模的方法并不容易，它是应用数学的艺术.由于数学建模的广泛性及重要性和实际问题的复杂性，要掌握这门艺术，必须见多识广，善于揣摩别人的思想方法，多实践，多体会.当然，并不是说所有建模过程都要经过这些步骤，有时各个步骤之间的界限也并不那么分明.建模过程中不要局限于形式上的按步就班，重要的是根据对象的特点和建模的目的，去粗取精，抓住关键，从简到繁，不断完善.

3. 数学模型的分类

数学模型的分类在这门课程中并没有什么重要意义，因为问题本身以及解决问题的方法，按照人们的各种不同分发，它既可属于这个类型又可属于那个类型.下面简单介绍几种分类方法.

(1) 按变量性质分：

$$\begin{cases}\text{离散模型，}\\ \text{连续模型，}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\text{确定性模型，}\\ \text{随机性模型，}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\text{线性模型，}\\ \text{非线性模型，}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\text{单变量模型，}\\ \text{多变量模型.}\end{cases}$$

(2) 按时间关系分：

$$\begin{cases}\text{静态模型，}\\ \text{动态模型，}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\text{参数定常模型，}\\ \text{参数时变模型.}\end{cases}$$

(3) 按研究方法分：

初等模型，微分方程模型，概率统计模型，运筹学模型等.

(4) 按研究对象所在领域分：

经济模型、生态模型、人口模型、交通模型等.

下面我们并不是完全按照某个模型分类编排，而是适当结合研究问题所用的方法及研究对象所属的领域来编排，在学习中要把注意力集中在各个数学模型本身的内容上，通过学习各个模型建立的不同的数学思考方法，达到举一反三的目的，不要过多地考虑各章节的划分和标题的取名.

4. 数学建模课程对学生能力的培养

(1) 翻译能力.即把一定抽象、简化的实际问题用数学语言表达出来，形成数学模型，再用数学方法进行推演或计算，得到结果后能把这些数学结果用“常人”能懂的语言翻译出来.

(2) 综合数学应用及分析能力.即把已学到的数学知识进行综合应用、分析，并能理解对实际问题进行合理简化及进行数学分析的重要性，在数学建模过程中发挥应用数学的能力.

(3) 发展联想能力.因为对于一些完全不同的实际问题在一定的简化层次下，它们的数学模型是相同的或相似的，这正是数学应用广泛性的表现，通过熟能生巧真正发展建模能力并能逐步达到触类旁通的境界.

(4) 洞察力，即抓住实际问题要点的能力.

由此可见，为了培养建模能力，首先要广泛地学习自然科学、工程技术和社会科学等有关的知识，掌握这些领域的定律、法则、规律和公式，这样才能有助于提高建模的实际工作能力；其次在学习过程中要自己动手解决一些实际问题，这是数学建模能力提高的不可缺少的基本训练.

习 题 一

1. 兄妹两人分别在离家3 km和2 km且方向相反的A、B两所学校上学，每天他们同时放学后，分别以3 km/h和2 km/h的速度步行回家.一条小狗以5 km/h的速度由男孩的出发地A校与男孩同时出发，奔向女孩，遇到女孩马上调头跑向男孩，遇到男孩后，又马上调头跑向女孩，如此往返，直到兄妹二人回到家.问小狗共奔跑了多少千米？

2. 某人平时下班总是按预定时间到达某处，然后他妻子开车接他回家.有一天，他比平时提早了30 min到达该处，于是此人就沿着妻子来接他的方向步行回去并在途中遇到了妻子，这一天，他比平时提前了10 min到家，问此人共步行了多长时间？

3. 有一边界形状任意的蛋糕，兄妹俩都想吃，妹妹指着蛋糕上的一点p，让哥哥过p点切开一人一半，能办到吗？

4. 某天晚上11:00时，在一住宅内发现一受害者的尸体，法医于晚上11:35分赶到现场，立刻测量死者的体温为30.8 ℃，1 h后再次测量死者体温为29.1 ℃，法医还注意到当时室内温度为28 ℃，试估计受害者的死亡时间.(要解决上面的问题还需要加什么条件？)

5. 某人住在某公交线附近，该公交线路在A、B两地间运行，每隔10 min A、B两地各发出一班车，此人常在离家最近的C点等车，他发现了一个令他感到奇怪的现象：在绝大多数情况下，先到站的总是由B去A的车，难道由B去A的车次多些吗？请你帮助他找一下原因.

6. 居民的用水来自一个由远处水库供水的水塔，水库的水来自降雨和流入的河流.水库的水可以通过河床的渗透和水面的蒸发流失.如果要建立一个数学模型来预测任何时刻水塔的水位，你需要哪些信息？

7. 餐馆每天都要洗大量的盘子，为了方便，某餐馆是这样清洗盘子的：先用冷水粗粗洗一下，再放进热水池洗涤，水温不能太高，否则会烫手，但也不能太低，否则不干净.由于想节省开支，餐馆老板想了解一池热水到底可以洗多少盘子，请用数学建模方法解决这一问题，并尽可能合理地给出假设.