高等学校、高等职业技术学校教材

高等数学

黄金坤　张仁德　主编

中国计量出版社

高等学校、高等职业技术学校教材

高 等 数 学

黄金坤　张仁德　主编

中国计量出版社

内 容 提 要

北京化工大学高等数学教研室为满足近年各类高校和高等职业技术学校招生量逐渐扩大之需要，集自己多年从事数学教学的实践，根据高专与高职的教学基本要求，定稿编成这本《高等数学》教材。全书共分十章，内容侧重一元微积分学。章末配有习题，书末附有答案。

本书可作为高等学校本科和高等职业技术学校各专业，以及职大、夜大、函大的教材，也可供工程技术人员及广大自学者阅读参考。

高 等 数 学

黄金坤 张仁德 主编

*

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲2号

邮政编码 100013

电话 (010) 64275360

http://www.zgjl.com.cn

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

850 mm × 1168 mm 32开本 印张 14 字数 376千字

2006年9月·第1版·第5次印刷

*

ISBN 7-5026-0615-7/G·48

印数 11 501—13 500 定价：20.00 元

前　言

本书是根据高等学校本科和高等职业技术学校的数学教学基本要求编写的。内容侧重于一元微积分学，其它内容也有适当介绍。着重讲清基本概念、基本运算及基本方法。章节结构、取材范围及叙述方法均以教学基本要求，便于组织教学为出发点。每章末配有一定数量的习题，书末附有习题答案。可供高校本科与高职以及职大、夜大、函大选作教材，亦可供工程技术人员和广大自学者阅读参考。

全书共分十章，包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法、二重积分与曲线积分、无穷级数与微分方程。本书教学学时数为 150 学时。

本书由黄金坤教授、张仁德教授主编，参加编写的还有蒋中蠡副教授、刘庆华副教授。

本书的初版于 1993 年 8 月，为了满足当前的教学需求，最近由黄金坤教授对全书作了订正及部分修改后再次出版。书中的不当之处，恳请读者及时赐教。

编　者

2000 年 5 月于北京化工大学

目　录

第一章　函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学.对变量与变量之间的关系，以及变量的变化趋势的研究，就构成本章中函数与极限两部分内容.

第一节　函　　数

一、函数概念

1.函数定义，设有两个变量 x 与 y，当变量 x 在数轴上某一部分 X 上取某一数值时，如果变量 y 依照某一法则，总有一个或多个确定的数值与之对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数.变量 x 叫做**自变量**，而变量 y 叫做**因变量或函数**.记作 $y=f(x)$，也可记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，….

若对于 X 中的每个 x 的值，对应的 y 值不止一个，在这种情况下，称**函数是多值的**.以后不做特别声明函数都是指单值的.

例如，圆面积 S 与半径 r 之间有函数关系

$$S=\pi r^2$$

自由落体下落的路程 s 与时间 t 有函数关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

在温度保持不变的假设下，一定量的理想气体的压力与体积间有玻意耳定律

$$PV=C$$

即
$$P=\frac{c}{v}\qquad c\text{ 是常数.}$$

在函数定义里，并未要求自变量变动时，函数的对应值一定要

变. 重要的是:对于 x 的每个值,都有 y 的确定值与之对应. 由此可知, $y=c$(常量)也可以视为是自变量 x 的函数.

2. **函数的定义域　数轴上使函数有定义的一切点的全体叫做函数的定义域.**

总之,在研究函数时,都要考虑它的定义域.

为了表示函数 $f(x)$ 的定义域,下面介绍表示一个变量 x 可能的取值范围的记号.

(1)记号 (a,b) 表示开区间,它是满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数.

(2)记号 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 表示开区间,称**点 a 的 ε 邻域**,它满足不等式 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.

(3)记号 $[a,b]$ 表示闭区间,它是满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数.

(4)记号 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 表示两种半开区间,它们分别指满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的全体实数.

(5)如果变量 x 可取一切实数值时,那末变量 x 的值的范围是整个数轴. 记作 $(-\infty,+\infty)$,它是满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的全体实数.

确定函数定义域的方法有两种:一是根据实际问题的实际情况确定函数的定义域.

例 1　圆面积 S 与半径 r 的函数关系为

$$S=\pi r^2$$

它的定义域为 $[0,+\infty)$.

例 2　自由落体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

它的定义域为 $[0,T]$.

另一种确定定义域的方法是由数学式子本身来确定.

例 3　求 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的定义域.

解　因为　$x+1\neq 0$,即　$x\neq -1$.

所以它的定义域为$(-\infty,-1)$,$(-1,+\infty)$.

例 4 求函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域.

解 因为 $1-x^2\geqslant 0$,可得 $|x|\leqslant 1$,即

$$-1\leqslant x\leqslant 1$$

所以它的定义域为$[-1,1]$

例 5 求函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$的定义域$(a<b)$.

解 因为 $(x-a)(b-x)\geqslant 0$,可得

$$\begin{cases}x-a\geqslant 0\\ b-x\geqslant 0\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}x-a\leqslant 0\\ b-x\leqslant 0\end{cases}$$

解得 $a\leqslant x\leqslant b$ 或 $x\leqslant a$ 及 $x\geqslant b$.

后者不可能.所以函数$y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$的定义域为$[a,b]$.

例 6 求函数

$$y=\frac{1}{\sin\pi x} \quad \text{的定义域}$$

解 函数要有定义要分母不为零,即

$$\sin\pi x\neq 0,\text{即} \quad \pi x\neq n\pi,$$

即 $x\neq n \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

所以函数的定义域为 $x\neq n \quad (n=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$

例 7 求函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{\lg(x+1)}} \quad \text{的定义域.}$$

解 因为 $\lg(x+1)>0$,

即 $x+1>1$,即 $x>0$.

所以函数的定义域为$(0,+\infty)$.

对于自变量x的某一个值x_0,函数$f(x)$的对应值**叫做函数当$x=x_0$时的函数值**,记作$f(x_0)$.例如,$f(x)=3x+2$,当$x=2$时,函数值为8,即$f(2)=8$.

二、函数的表示法

1. **分析法**(也称公式法)

函数之间变量的对应关系用分析式子表示，这种方法称为**分析法**.

例如，　$y=ax+b$　称线性函数.

$y=a_0x^2+a_1x+a_2$　称二次多项式函数.

$y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x),Q(x)$ 为多项式，这种函数称为有理函数.

$y=1+\sin^2 x$　称为三角函数.

这种表示函数的方法其优点便于理论研究和计算，便于后面的微分运算.

怎样从实际问题中列出分析式子，即怎样建立函数关系呢？

例 8　有一正方形的铁皮，边长为 2 尺，从四角截去四个相等的小正方形，剩下的部分做成一个方形无盖的盒子，试建立盒子的容积 V 与小正方形边长 x 的函数关系.

解　设被剪去的小正方形的边长为 x，则盒子的容积

$$V = x(2-2x)^2 \qquad (0<x<1).$$

例 9　已知行李重量不超过 20 公斤时不收运费，超过 20 公斤，每超过 1 公斤运费为 k 元，试将运费 p 写成行李重量 W 的函数.

解

$$p(W)=\begin{cases}0, & 0\leqslant W\leqslant 20\\ k(W-20), & W>20.\end{cases}$$

这种分段表示的函数，称为**分段函数**.

2. **图象法**

函数 $y=f(x)$ 取平面直角坐标系的点 $(x,f(x))$ 的全体，构成一条曲线，这条曲线，称 $y=f(x)$ 的**图象(形)**.

例 10　$y=f(x)=x^2$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 它的图象如图 1-1 所示.

例 11　$y=f(x)=x^3$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 它的图象如图 1-2 所示.

3. **列表法**

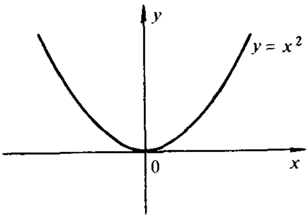

图 1-1

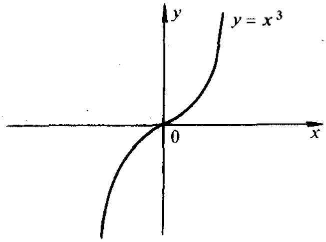

图 1-2

例如，由实验可测出大气中空气密度 ρ(单位体积空气的质量)，随大气高度 h 的变化而变化，其情况列表如下：

h(m)	0	1 000	2 000	4 000
ρ(kg/m³)	1.22	1.11	1.01	0.82

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数的定义域为 X，如果存在正数 M，使得与任一 $x\in X$(这里"$\in$"读作"属于")对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则**称函数 $f(x)$ 在 X 上有界**. 如果这样的 M 不存在，**就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.**

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0,1)$内是无界的. 因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$，对于$(0,1)$内的一切 x 都成立.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 X，如果对于 X 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称**函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加的**. 如图 1-3 所示.

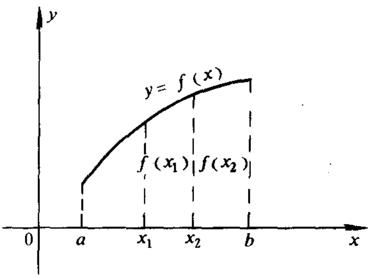

图 1-3

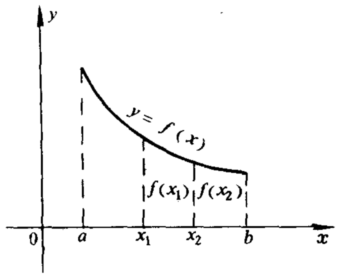

图 1-4

如果对于区间 X 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称**函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调减少的**，如图 1-4 所示.

单调增加和单调减少的函数统称**单调函数**.

例如，函数 $y=x^2$，在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的；在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调的. 如图 1-1 所示.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为关于原点为对称的区间 X，如果对于任一 $x\in X$，

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，则称 **$f(x)$ 为偶函数**；如果对于任一 $x\in X$，

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，则称 **$f(x)$ 为奇函数**.

例如，$y=x^2$ 是偶函数. 因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.