

高等学校、高等职业技术学校教材

高等数学

黄金坤 张仁德 主编



中国计量出版社

高等学校、高等职业技术学校教材

高等数学

黄金坤 张仁德 主编

中国计量出版社

内 容 提 要

北京化工大学高等数学教研室为满足近年各类高校和高等职业技术学校招生量逐渐扩大之需要,集自己多年从事数学教学的实践,根据高专与高职的教学基本要求,定稿编成这本《高等数学》教材。全书共分十章,内容侧重一元微积分学。章末配有习题,书末附有答案。

本书可作为高等学校本科和高等职业技术学校各专业,以及职大、夜大、函大的教材,也可供工程技术人员及广大自学者阅读参考。

高 等 数 学

黄金坤 张仁德 主编

*

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲2号

邮政编码 100013

电话 (010) 64275360

<http://www.zgjl.com.cn>

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

850 mm × 1168 mm 32开本 印张 14 字数 376 千字

2006年9月·第1版·第5次印刷

*

ISBN 7-5026-0615-7/G·48

印数 11 501 — 13 500 定价: 20.00 元

前 言

本书是根据高等学校本科和高等职业技术学校的数学教学基本要求编写的。内容侧重于一元微积分学，其它内容也有适当介绍。着重讲清基本概念、基本运算及基本方法。章节结构、取材范围及叙述方法均以教学基本要求，便于组织教学为出发点。每章末配有一定数量的习题，书末附有习题答案。可供高校本科与高职以及职大、夜大、函大选作教材，亦可供工程技术人员和广大自学者阅读参考。

全书共分十章，包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法、二重积分与曲线积分、无穷级数与微分方程。本书教学学时数为 150 学时。

本书由黄金坤教授、张仁德教授主编，参加编写的还有蒋中鑫副教授、刘庆华副教授。

本书的初版于 1993 年 8 月，为了满足当前的教学需求，最近由黄金坤教授对全书作了订正及部分修改后再次出版。书中的不当之处，恳请读者及时赐教。

编 者

2000 年 5 月于北京化工大学

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、函数概念	1
二、函数的表示法	3
三、函数的几种特性	5
四、反函数	7
第二节 初等函数	9
一、幂函数	9
二、指数函数	10
三、对数函数	10
四、三角函数	11
五、反三角函数	13
六、复合函数	16
第三节 极限	18
一、数列的极限	18
二、数列极限的几何意义	19
三、函数的极限	22
第四节 无穷小量和无穷大量	28
一、无穷小量	28
二、无穷大量	30
第五节 极限运算法则	31
第六节 极限存在准则和两个重要极限	32
第七节 无穷小量的比较	35
第八节 函数的连续性	37
一、函数连续性概念	37
二、函数的间断点	40
三、连续函数的四则运算 初等函数的连续性	44
四、闭区间上连续函数的性质	46
习题一	48

第二章 导数与微分	53
第一节 导数的概念	53
一、导数定义	53
二、求导数举例	56
三、导数的几何意义	58
四、可导与连续的关系	60
第二节 求导法则	62
一、导数的四则运算法则	62
二、复合函数的求导法则	65
三、反函数求导法则	67
第三节 隐函数及参数方程所表示的函数的导数	71
一、隐函数的导数	71
二、由参数方程所确定的函数的导数	73
第四节 高阶导数	75
第五节 函数的微分	78
一、微分的概念	78
二、微分的几何意义	81
三、基本公式与运算法则	81
四、微分应用于近似计算	84
习题二	86
第三章 中值定理及导数应用	90
第一节 中值定理	90
第二节 罗必塔法则	95
第三节 泰勒公式	99
第四节 函数的单调性	103
第五节 函数的极值	106
第六节 最大值最小值问题	112
第七节 函数图形的描绘	117
一、曲线的凹凸性和拐点	117
二、曲线的拐点	120
三、曲线的渐近线	122
四、函数图形的描绘	123

习题三	126
第四章 不定积分	132
第一节 不定积分的概念与性质	132
一、原函数与不定积分的概念	132
二、基本积分表	136
三、不定积分的性质	138
第二节 换元积分法	140
一、第一类换元法	141
二、第二类换元法	146
第三节 分部积分法	150
第四节 两种特殊类型函数的积分举例	154
一、有理函数的积分	154
二、三角函数有理式的积分	158
习题四	160
第五章 定积分及其应用	164
第一节 定积分概念	164
一、定积分问题举例	164
二、定积分定义	167
第二节 定积分的性质	169
第三节 微积分基本公式	173
一、积分上限函数及其导数	174
二、微积分基本公式	177
第四节 换元积分法与分部积分法	179
一、定积分的换元积分法	179
二、定积分的分部积分法	183
第五节 定积分的应用	186
一、定积分的元素法	187
二、直角坐标系中平面图形的面积	188
三、极坐标系中平面图形的面积	192
四、旋转体的体积	194
五、平行截面面积为已知的立体的体积	196
六、平面曲线的弧长	198

七、变力沿直线所作的功	200
八、水压力	203
第六节 广义积分	204
习题五	207
第六章 空间解析几何与向量代数	212
第一节 空间直角坐标系	212
一、空间点的直角坐标	212
二、两点间的距离	213
第二节 向量 向量的加减法 向量与数的乘积	215
一、向量概念	215
二、向量的加减法	216
三、向量与数的乘积	217
第三节 向量的坐标	220
一、向量的坐标	220
二、模与方向余弦的坐标表示式	222
第四节 数量积与向量积	224
一、两向量的数量积	224
二、两向量的向量积	227
第五节 平面及其方程	231
一、平面的点法式方程	231
二、平面的一般方程	233
三、两平面的夹角	235
第六节 空间中的直线及其方程	236
一、直线的方程	236
二、两直线的夹角	239
第七节 几种常见的曲面及其方程	241
一、球面	242
二、柱面	243
三、旋转曲面	244
四、圆锥面	245
五、旋转抛物面	246
六、椭球面	246

第八节 空间曲线及其方程	248
习题六	251
第七章 多元函数微分法及其应用	257
第一节 多元函数的基本概念	257
一、多元函数的概念	257
二、二元函数的极限与连续	260
第二节 偏导数	262
一、偏导数的定义	262
二、偏导数的算法	263
三、偏导数的几何意义	265
四、高阶偏导数	266
第三节 全微分	269
一、全微分的定义	269
二、全微分存在的条件	270
第四节 多元复合函数的求导法则	271
第五节 隐函数的求导公式	276
第六节 偏导数的几何应用	280
一、空间曲线的切线与法平面	280
二、曲面的切平面与法线	282
第七节 二元函数的极值及其求法	285
一、二元函数的极值及最大值、最小值	285
二、条件极值	288
习题七	291
第八章 二重积分与曲线积分	295
第一节 二重积分的概念与性质	295
一、曲顶柱体的体积	295
二、二重积分的定义	296
三、二重积分的性质	297
第二节 利用直角坐标计算二重积分	298
一、二重积分在直角坐标中的计算公式	298
二、二重积分计算举例	301
第三节 利用极坐标计算二重积分	304

一、二重积分在极坐标中的计算公式	305
二、二重积分计算举例	307
第四节 二重积分的应用	310
一、平面薄片的质量	310
二、曲面的面积	311
三、平面薄片的重心	313
第五节 对弧长的曲线积分	314
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	314
二、对弧长的曲线积分的计算法	315
第六节 对坐标的曲线积分	318
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	318
二、对坐标的曲线积分的计算法	320
三、对坐标的曲线积分的物理意义	323
第七节 格林公式及其应用	324
一、格林公式	324
二、平面曲线积分与路径无关的条件	327
三、二元函数的全微分求积	330
习题八	332
第九章 无穷级数	337
第一节 常数项级数的概念与性质	337
一、常数项级数的概念	337
二、常数项级数的性质	339
第二节 正项级数的审敛法	341
一、比较审敛法	341
二、比值审敛法	344
第三节 交错级数与任意项级数的审敛法	345
一、交错级数的审敛法	346
二、绝对收敛与条件收敛	347
第四节 幂级数及其收敛性	348
一、函数项级数的概念	348
二、幂级数的收敛域	350
三、幂级数的性质	352

第五节 函数展开成幂级数	354
一、泰勒级数	354
二、函数展开成幂级数	356
第六节 幂级数展开式应用举例	360
一、近似公式与近似计算	360
二、欧拉公式	361
习题九	362
第十章 微分方程	366
第一节 微分方程的基本概念	366
第二节 可分离变量的微分方程	369
第三节 一阶线性微分方程	372
第四节 一阶微分方程应用举例	376
第五节 可降阶的二阶微分方程	382
一、 $y'' = f(x)$ 型的微分方程	382
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	383
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	384
第六节 二阶线性微分方程解的结构	386
一、二阶线性微分方程的概念与实例	386
二、二阶线性微分方程解的结构	388
第七节 二阶常系数齐次线性微分方程	389
第八节 二阶常系数非齐次线性微分方程	392
一、 $f(x) = e^{ax}P_m(x)$ 型	392
二、 $f(x) = P_m(x)\cos\omega x$ 型	395
习题十	399
习题答案	402
附表 积分表	425
主要参考书	435

第一章 函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量,而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学.对变量与变量之间的关系,以及变量的变化趋势的研究,就构成本章中函数与极限两部分内容.

第一节 函 数

一、函数概念

1. 函数定义,设有两个变量 x 与 y ,当变量 x 在数轴上某一部分 X 上取某一数值时,如果变量 y 依照某一法则,总有一个或多个确定的数值与之对应,则变量 y 叫做变量 x 的函数. 变量 x 叫做自变量,而变量 y 叫做因变量或函数. 记作 $y=f(x)$,也可记作 $y=\varphi(x), y=F(x), \dots$.

若对于 X 中的每个 x 的值,对应的 y 值不止一个,在这种情况下,称函数是多值的. 以后不做特别声明函数都是指单值的.

例如,圆面积 S 与半径 r 之间有函数关系

$$S = \pi r^2$$

自由落体下落的路程 s 与时间 t 有函数关系

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

在温度保持不变的假设下,一定量的理想气体的压力与体积间有玻意耳定律

$$PV = C$$

即

$$P = \frac{c}{v} \quad c \text{ 是常数.}$$

在函数定义里,并未要求自变量变动时,函数的对应值一定要

变. 重要的是: 对于 x 的每个值, 都有 y 的确定值与之对应. 由此可知, $y=c$ (常量) 也可以视为是自变量 x 的函数.

2. 函数的定义域 数轴上使函数有定义的一切点的全体叫做函数的定义域.

总之, 在研究函数时, 都要考虑它的定义域.

为了表示函数 $f(x)$ 的定义域, 下面介绍表示一个变量 x 可能的取值范围的记号.

(1) 记号 (a, b) 表示开区间, 它是满足不等式 $a < x < b$ 的全体实数.

(2) 记号 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 表示开区间, 称点 a 的 ε 邻域, 它满足不等式 $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$.

(3) 记号 $[a, b]$ 表示闭区间, 它是满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的全体实数.

(4) 记号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示两种半开区间, 它们分别指满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的全体实数.

(5) 如果变量 x 可取一切实数值时, 那末变量 x 的值的范围是整个数轴. 记作 $(-\infty, +\infty)$, 它是满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的全体实数.

确定函数定义域的方法有两种: 一是根据实际问题的实际情况确定函数的定义域.

例 1 圆面积 S 与半径 r 的函数关系为

$$S = \pi r^2$$

它的定义域为 $[0, +\infty)$.

例 2 自由落体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

它的定义域为 $[0, T]$.

另一种确定定义域的方法是由数学式子本身来确定.

例 3 求 $y = \frac{1}{x+1}$ 的定义域.

解 因为 $x+1 \neq 0$, 即 $x \neq -1$.

所以它的定义域为 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$.

例4 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 因为 $1-x^2 \geq 0$, 可得 $|x| \leq 1$, 即

$$-1 \leq x \leq 1.$$

所以它的定义域为 $[-1, 1]$

例5 求函数 $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的定义域($a < b$).

解 因为 $(x-a)(b-x) \geq 0$, 可得

$$\begin{cases} x-a \geq 0 \\ b-x \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x-a \leq 0 \\ b-x \leq 0 \end{cases}$$

解得 $a \leq x \leq b$ 或 $x \leq a$ 及 $x \geq b$.

后者不可能. 所以函数 $y = \sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的定义域为 $[a, b]$.

例6 求函数

$$y = \frac{1}{\sin \pi x} \quad \text{的定义域}$$

解 函数要有定义要分母不为零, 即

$$\sin \pi x \neq 0, \text{ 即 } \pi x \neq n\pi,$$

$$\text{即 } x \neq n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

所以函数的定义域为 $x \neq n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

例7 求函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{\lg(x+1)}} \quad \text{的定义域.}$$

解 因为 $\lg(x+1) > 0$,

$$\text{即 } x+1 > 1, \text{ 即 } x > 0.$$

所以函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

对于自变量 x 的某一个值 x_0 , 函数 $f(x)$ 的对应值叫做函数当 $x = x_0$ 时的函数值, 记作 $f(x_0)$. 例如, $f(x) = 3x + 2$, 当 $x = 2$ 时, 函数值为 8, 即 $f(2) = 8$.

二、函数的表示法

1. 分析法(也称公式法)

函数之间变量的对应关系用分析式子表示,这种方法称为分析法.

例如, $y=ax+b$ 称线性函数.

$y=a_0x^2+a_1x+a_2$ 称二次多项式函数.

$y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式, 这种函数称为有理函数.

$y=1+\sin^2x$ 称为三角函数.

这种表示函数的方法其优点便于理论研究和计算, 便于后面的微分运算.

怎样从实际问题中列出分析式子, 即怎样建立函数关系呢?

例 8 有一正方形的铁皮, 边长为 2 尺, 从四角截去四个相等的小正方形, 剩下的部分做成一个方形无盖的盒子, 试建立盒子的容积 V 与小正方形边长 x 的函数关系.

解 设被剪去的小正方形的边长为 x , 则盒子的容积

$$V = x(2 - 2x)^2 \quad (0 < x < 1).$$

例 9 已知行李重量不超过 20 公斤时不收运费, 超过 20 公斤, 每超过 1 公斤运费为 k 元, 试将运费 p 写成行李重量 W 的函数.

解

$$p(W) = \begin{cases} 0, & 0 \leq W \leq 20 \\ k(W - 20), & W > 20. \end{cases}$$

这种分段表示的函数, 称为分段函数.

2. 图象法

函数 $y=f(x)$ 取平面直角坐标系的点 $(x, f(x))$ 的全体, 构成一条曲线, 这条曲线, 称 $y=f(x)$ 的图象(形).

例 10 $y=f(x)=x^2$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 它的图象如图 1-1 所示.

例 11 $y=f(x)=x^3$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 它的图象如图 1-2 所示.

3. 列表法

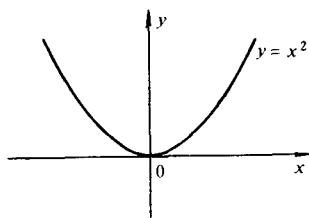


图 1-1

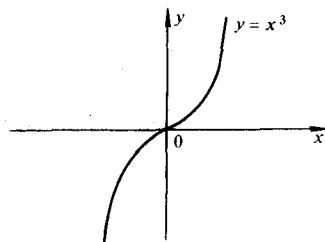


图 1-2

例如,由实验可测出大气中空气密度 ρ (单位体积空气的质量),随大气高度 h 的变化而变化,其情况列表如下:

$h(\text{m})$	0	1 000	2 000	4 000
$\rho(\text{kg/m}^3)$	1.22	1.11	1.01	0.82

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数的定义域为 X , 如果存在正数 M , 使得与任一 $x \in X$ (这里“ $\in$ ”读作“属于”) 对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为无论 x 取任何实数, $|\sin x| \leq 1$ 都成立. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的. 因为不存在这样的正数 M , 使 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$, 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 X , 如果对于 X 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加的. 如图 1-3 所示.

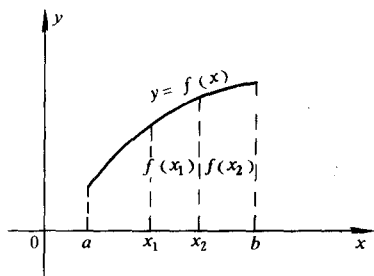


图 1-3

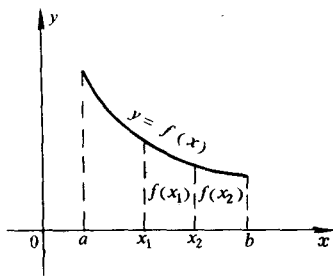


图 1-4

如果对于区间 X 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调减少的, 如图 1-4 所示.

单调增加和单调减少的函数统称单调函数.

例如, 函数 $y = x^2$, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的; 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $y = x^2$ 不是单调的. 如图 1-1 所示.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为关于原点为对称的区间 X , 如果对于任一 $x \in X$,

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任一 $x \in X$,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $y = x^2$ 是偶函数. 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.