让你更出色

数学
辅导与训练

辅导与训练

新版

九年级用

- 编写阵容强
- 学科信息新
- 解题思路巧
- 学习效果佳

黄汉禹　主编

上海科学技术出版社

新版

数学辅导与训练

（九年级用）

黄汉禹 主编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

《数学辅导与训练》一书依据上海市数学学科课程标准编写而成．全书分学习要求，解题指导，疑难分析，基本训练，自我评估，本章测试等部分组成．本书通过提示各个知识要点，指导各类题的解法，让学生牢固掌握数学基础知识，提高学生分析和解决问题的能力．

责任编辑　卢　峰　周玉刚

新　版

数学辅导与训练

（九年级用）

黄汉禹　主编

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版、发行

（上海钦州南路71号　邮政编码200235）

新华书店上海发行所经销　上海市印刷十厂有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 16.75　字数 391 000

2002年6月第1版　2006年2月第7次印刷

印数：67 301－73 300

ISBN 7-5323-6447-X/G·1452

定价：17.80元

编写说明

本书以学科课程标准为依据，内容紧密配合课本，旨在帮助学生克服学习上的困难，增长阅读能力和自学能力，提高学科素质，及时消化所学的知识内容(包括基本概念、基本理论、基本要求，以及有关的重点、难点)，并为学有余力的学生提供一些深、宽度略高于课程标准的学习资料。

由上海中小学课程教材改革委员会组织编写的、供国家发达地区使用的中、小学数学教材，经过多年试用，越来越被广大教师、家长和社会认同与接受。由于这套教材的成功，数学编写组曾于1994年获得了“苏步青教育奖”，在社会上取得了良好的信誉。为更好地体现这套教材的精神，本辅导与训练在结构上由知识系统、学习要求、解题指导、疑难分析、基本训练等部分组成。

[**知识系统**] 旨在将本章的知识点，串点成线，编织成知识网络，充分揭示知识间的相互联系，从而对本章内容的概貌首先有一个完整的了解。

[**学习要求**] 简明、扼要地分条列出教学要求。

[**解题指导**] 精选例题，力求使每个例题都有其显明的目的性。每个例题视其难易，可设有分析、解(包括多种典型解法)、解后适当而恰如其分地提出“注意”、“说明”、“思考”、“研究”等项目。这里“注意”是指解题的注意事项，指出其容易出错或疏忽的地方；“说明”是指通过本例阐明解题的一般规律，告诉学生解题的基本方法；“思考”是指当本例题的条件和结论作适当改变时，命题将起何变化，也在解题方法上提出思考性问题；“研究”是更高层次上的“思考”，使学生对某些数学规律能自我发现。

[**疑难分析**] 将解题中的疑难所在作简明扼要的概括分析。

[**基本训练**] 通过解题指导和疑难分析之后，让学生进行必要的、基本的解题训练，以使有关的数学知识和数学思想方法及时得到落实。

本书在各单元的基本训练之后，还设有单元和每章测试、期末测试。可以进一步帮助学生巩固所学知识，加深理解，熟练技能，收到自我检查的效果。

本书由黄汉禹担任主编，邹一心、周玉刚主审。其中第二十七、三十章由林孝光编写，第二十八、二十九、三十一章由仇春锦编写，第一、二学期期末测试题由高泱编写。

本丛书已在教学实践中使用了两至三轮。广大师生在教学过程中，一方面对本书的内容、编制的体例和格局深深厚爱；另一方面又热情地给我们指出了其中的一些不足之处。为使本书修改得更好，本版由仇春锦、林孝光、武文斌进行了全面修订，黄汉禹审阅了修订稿。限于我们的水平，书中仍难免有不足之处，恳请广大师生、家长多提宝贵意见。

上海科学技术出版社
2005年2月

目录

第二十七章 一元二次方程的应用

[知识系统]

预备知识

解一元二次方程

解二元一次方程组

基本概念

二次三项式

整式方程、分式方程

有理方程、无理方程

高次方程

二元二次方程

二元二次方程组

主要内容

二次三项式因式分解

解分式方程

解无理方程

解高次方程

解二元二次方程组

基本思想方法

把分式方程转化为整式方程：通过“去分母”来解决

把无理方程转化为有理方程：通过“两边平方”来解决

把二元二次方程组通过消元或降次转化为较简单的方程或方程组再解

换元法：某些特殊的方程，把方程的某一部分用新的未知数来代替

应用

列方程或方程组解应用题

注意事项

分式/无理方程(组)的转化过程中，有可能产生增根，必须强调检验

一、列一元二次方程解应用题

[学习要求]

本单元学习要达到下列要求：

1. 会分析应用题中的数量关系和等量关系，列出方程.
2. 能由实际意义判断应用题的解的合理性.

[解题指导]

例1 扇形的弧长是半径的 2 倍,面积是 50 厘米^2,求扇形半径.

分析 扇形面积公式 $S=\frac{n\pi R^2}{360}$ 或 $S=\frac{1}{2}lR$. 其中 n 是圆心角(度),R 是扇形的半径,l 是扇形的弧长. 根据题意,用后一公式较好.

解 设扇形半径为 x 厘米,则扇形弧长为 $2x$ 厘米. 根据扇形面积公式列方程

$$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot x=50,$$

$$x^2=50.$$

$\therefore\quad x_1=5\sqrt{2},\ x_2=-5\sqrt{2}$(不合题意,舍去).

答:扇形半径为 $5\sqrt{2}$ 厘米.

例2 某物体运动遵循下列公式:$s=2t+\frac{1}{4}t^2(t\geqslant 0)$这里 s 是路程(米),t 是时间(秒). 求当 $s=12$ 米时所需时间.

分析 既有一个现成的公式给你,你就将现成的数字代入即可.

解 由题意,得

$$12=2t+\frac{1}{4}t^2,$$

$$t^2+8t-48=0.$$

解这方程,得

$$t_1=4,\ t_2=-12\text{(不合题意,舍去)}.$$

答:所用时间为 4 秒.

说明 例 1、例 2 都有公式可直接运用. 只要分清公式中哪些字母已知,哪些字母未知,然后直接将已知数字代入就可以了.

例3 把底面直径 10 厘米、高 8 厘米的装满水的圆柱形杯子甲里的水,注入一倒圆锥形的杯子乙,恰好注满. 已知杯子乙高为 2 分米,求杯子乙的上口的直径.

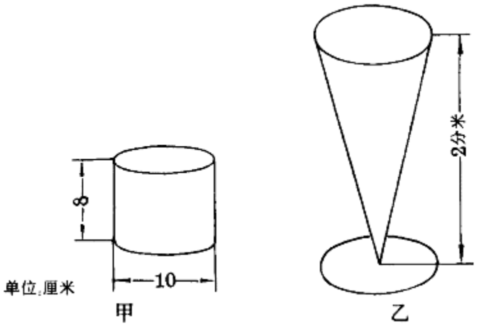


图 27.1

分析 因为水恰好倒满,所以杯子甲与杯子乙的容积相等. 圆柱体积公式 $V_{圆柱}=\pi r^2h$,圆锥体积公式 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$. 其中 r 是圆柱(锥)的底面半径,h 是圆柱(锥)的高.

解 设杯子乙上口直径为 x 厘米,将 2 分米化成 20 厘米. 根据题意,得

$$\pi\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^2\cdot 8=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 20.$$

整理，得 $$x^2=120.$$

解方程，得 $x_1=2\sqrt{30}$，$x_2=-2\sqrt{30}$（不合题意，舍去）.

答：杯子乙的上口直径为 $2\sqrt{30}$ 厘米.

注意 (1) 半径与直径要分清；

(2) 列方程时单位要统一.本例中的单位统一成厘米，所以要将 2 分米化成 20 厘米.

例4 某厂 1 月份产值为 10 万元，第一季度产值共 33.1 万元.若每个月比上月的增长百分数相同，求这个百分数.

分析 若设这个百分数为 x，那么 2 月份产值为 $10(1+x)$，3 月份产值为 $[10(1+x)]\cdot(1+x)=10(1+x)^2$.第一季度产值为 3 个月的总和，就能列出方程来.

解 设这个百分数为 x，根据题意，得

$$10+10(1+x)+10(1+x)^2=33.1.$$

整理，得 $$100x^2+300x-31=0.$$

解方程，得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=-3.1$（不合题意，舍去）.

答：这个百分数为 10%.

说明 (1) 3 月份产值是 $10(1+x)^2$，第一季度产值（3 个月的产值之和）是 $[10+10(1+x)+10(1+x)^2]$，不能混淆；

(2) 设百分数为 x，与设百分数为 $x\%$，解出的结果相差 100 倍，要特别注意.

例5 某服装原价 300 元，经二次降价后，现售 192 元.如每次降低的百分数相同，求这个百分数.

分析 如设每次降低的百分数为 x，那么第一次降价后，该服装售价为 $300(1-x)$，第二次降价后，售价为第一次降价后的售价再乘以 $(1-x)$，即是 $[300(1-x)](1-x)=300(1-x)^2$.

解 设每次降低的百分数为 x，根据题意，得

$$300(1-x)^2=192.$$

$$1-x=\pm 0.8.$$

$x_1=0.2=20\%$，$x_2=1.8$（不合题意，舍去）.

答：每次降低 20%.

说明 (1) 方程 $300(1-x)^2=192$ 用直接开平方法解，比较简便；

(2) 显然，降低的百分数不能超过 100%，所以 $x=1.8=180\%$ 不合题意.

分析 如列出下列方程：$192(1+x)^2=300$ 是错误的.因为降价是对 300 元来说降低多少，是以 300 元为基数的.解百分比问题要注意"是谁的百分之几."基数不同，所求得的百分比的意义就不同.例如：从 80 升到 100，增加的百分比是 $(100-80)\div 80=25\%$，这是对 80 来说的，基数是 80.从 100 降到 80，降低的百分比是 $(100-80)\div 100=20\%$，这是对 100 来说的，基数是 100.虽然增减数字都是 20，但占的百分比却不一样.

思考 例4 是一种增长率问题.某厂按这每月相同的增长率计算，1 月份产值 10 万元，2 月份产值 $10(1+x)$ 万元，3 月份产值是 $10(1+x)^2$ 万元，4 月份产值是多少？5 月份产值是多少？10 月份产值是多少？你能得到一个一般的式子吗？例 5 的情况通常也可叫作"负增长"，你在例 4 中得到的规律在例 5 中适用吗？

例6 某足球赛实行主客场制循环赛，即每两个队都要比赛二场：在自己足球队所在地（主场）与对方足球队所在地（客场）各赛一场.经计算，共要进行 132 场比赛，问参加的足球队有几个？

分析 若设有 x 个足球队，当甲与乙比赛时，甲的主场比赛就是乙的客场比赛，甲的客场比赛就是乙的主场比赛．计算主场比赛的总场数就是总的比赛场数．每个足球队的主场比赛是 $(x-1)$ 场，那么 x 个足球队应该有 $x\cdot(x-1)$ 场主场比赛．

解 设有 x 个足球队参加比赛，根据题意，得

$$x(x-1)=132,$$

化简，得

$$x^2-x-132=0.$$

解方程，得

$x_1=12$，$x_2=-11$(不合题意，舍去)．

答：参加比赛的足球队有 12 个．

例7 一个两位数，十位上的数字比个位上的数字小 5．将十位上的数字加上 3 后再平方，恰好等于这个两位数．求这个两位数．

解 设这两位数的十位上的数字为 x，那么它的个位上的数字是 $x+5$．根据题意，得

$$(x+3)^2=10x+(x+5),$$

化简，得

$$x^2-5x+4=0.$$

解方程，得

$$x_1=1,\ x_2=4.$$

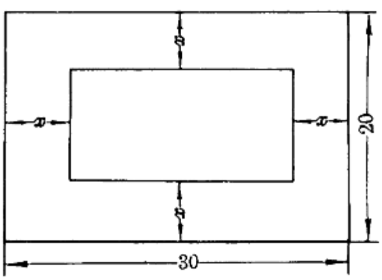
当 $x=1$ 时，$x+5=6$，则两位数是 $10+6=16$．

当 $x=4$ 时，$x+5=9$，则两位数是 $40+9=49$．

答：这个两位数是 16 或 49．

[**疑难分析**] (1) 两位数应是十位上的数乘以 10 加个位数，而不是十位上的数乘以个位数．如 $34=3\times10+4$，而 $34\neq3\times4$．要注意数位上的数若用字母代替时，要使这个字母在这个数位上，必须将这字母乘以这数位所代表的单位．又如三位数的百位、十位、个位分别是 a、b、c，则这三位数是 $100\times a+10\times b+1\times c$．推而广之，今后如遇到非十进制数，也有类似结论；

(2) 两位数的第一位数字只能在 1，2，…，9 这九个数字中选取，第二位数可在 0，1，2，…，9 这十个数字中选取．如列方程解得的数位上的数字不在这范围内，必须舍去．三位数的三个数位上的数字各能取什么数？请你思考一下．



单位：米

图 27.2

例8 如图 27.2 所示，有一块地长 30 米，宽 20 米，要在它中间造一个 200 米^2 的花坛，并且使四周留下相同宽度的路，问路宽多少米？

分析 若路宽为 x 米，你可以用代数式表示出花坛长为 $(30-2x)$ 米，宽为 $(20-2x)$ 米，利用矩形面积公式就能列出适合题意的方程．

解 设路宽 x 米，则花坛长为 $(30-2x)$ 米，宽 $(20-2x)$m．根据题意，得

$$(30-2x)(20-2x)=200.$$

化简，得 $x^2-25x+100=0.$

解方程，得

$$x_1=5,\ x_2=20.$$

但当 $x=20$ 时，花坛宽为 $20-2x=20-2\times20<0$ 不合题意，舍去.

答：路宽为 5 米.

说明 列方程时，也可理解成：花坛面积＝总面积－路的面积，但计算路的面积时稍麻烦，没有上述解法简便.

例9 用 8.5 米长的木料，做成如图的窗框，要求透光面积是 1.5 米²，求窗框的 AB 边和 BC 边的长.

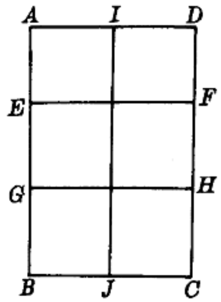


图 27.3

分析 窗框所用木料总长是 AD、EF、GH、BC、AB、IJ、DC 七段之和，其中 $AD=EF=GH=BC$，$AB=IJ=DC$，若设 BC 边长为 x 米，那么 $4x+3AB=8.5$，可以将 AB 用 x 的代数式表示出来，就能列出方程来.

解 设 BC 边长 x 米，则 AB 长为 $\frac{8.5-4x}{3}$ 米. 根据题意，得

$$x\cdot\frac{8.5-4x}{3}=1.5.$$

化简整理，得 $8x^2-17x+9=0$.

解方程，得 $x_1=1$，$x_2=\frac{9}{8}$.

当 $x=1$ 时，$\frac{8.5-4x}{3}=1.5$.

当 $x=\frac{9}{8}$ 时，$\frac{8.5-4x}{3}=\frac{4}{3}$.

答：当 BC 边长为 1 米时 AB 边长为 1.5 米，或当 BC 边长为 $\frac{9}{8}$ 米时 AB 边长为 $\frac{4}{3}$ 米.

归纳 解应用题的一般步骤为

(1) 仔细审题，明确题目中的已知量和未知量，找出它们的关系，必要时可采用列表或画图的方法；

(2) 选取适当的未知数，根据题意所给的条件，找出数量间的相等关系，列出方程；

(3) 解方程，求出未知数的值；

(4) 检验所得结果是否符合题意，写出答案.

其中最关键点在于(1).

基本训练 27-1

1. 二次函数 $y=-x^2-2x+6$ 的值为 -2，求 x 的值.
2. 弓形的弧所对圆心角为 60°，弓形面积为 $\left(\frac{25}{6}\pi-\frac{25}{4}\sqrt{3}\right)$ 厘米²，求弓形所在圆的半径.
3. 某物体运动规律为 $s=40t-5t^2$，s 的单位是米，t 的单位是秒. 求当 $s=60$ 米时 t 的值.
4. 一块矩形场地面积是 300 米²，一边比另一边多 5 米，求该场地两邻边的长.
5. 等边三角形面积是 $\sqrt{3}$，求它的边长.
6. 直角三角形三边长是三个连续整数，求三边长和面积.
7. 有一长方形水池，长比宽多 3 米. 从水池中放出 32 吨水后，水池中的水面下降了 0.8 米，求水池的长和宽.
8. 等腰三角形周长为 16 厘米，底边上的高为 4 厘米，求它的各边的长.
9. 已知一菱形面积为 4，两条对角线的差是 2，求这菱形的周长.
10. 用一个倒圆锥形、高 0.6 米的水缸养金鱼，用底面直径 0.4 米、高 0.5 米的圆柱形水桶提水灌入水缸，满满地提了 10 桶水后，恰将水缸灌满. 求水缸的上口直径.

11. 有一个两位数，它的数值等于它的个位上的数字的平方的 3 倍，它的十位上的数字比个位上的数字大 2. 求这两位数.

12. 某煤矿 1 月份的煤产量为 a 吨，如果按每月平均增长 10%计算，那么 3 月份的煤产量用代数式表示为____吨.

13. 制造某种产品，原来每件的成本是 700 元，由于连续两次降低成本，现在的成本是 448 元，如果每次降低成本的百分数相同，则每次降低成本的百分数为（　　）

(A) 10%.　　(B) 20%.　　(C) 30%.　　(D) 40%.

14. 小王购买某债券 400 元，两年后本利和为 484 元，求这种债券的平均年利率.

15. 一种药原价每瓶 3 元，经过两次大幅度降价后，现在每瓶售价 1.08 元，问平均每次降低百分之几？

16. 某厂第一季度共生产机床 273 台，若一月份产量为 75 台，那么该厂第一季度的月平均增长率是多少？

17. 小明将勤工俭学挣得的 100 元钱按一年定期存入少儿银行，到期后取出 50 元用来购买物品，剩下的 50 元和应得的利息又全部按一年定期存入，若存款的年利率保持不变，这样到期后可得本金和利息共 66 元. 求这种存款的年利率.

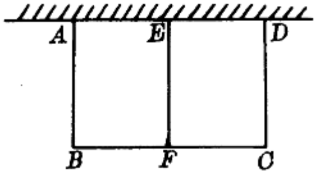
18. 用 48 米长的篱笆材料，在空地上围成一个绿化场地，现有两种设计方案：一种是围成正方形的场地；另一种是围成圆形的场地，试问选用哪一种方案，围成的场地面积较大？并且说明理由.

19. 一块长方形运动场，长 70 米，宽 50 米，围绕着这场地外面筑了一条宽度均匀的跑道，跑道面积是 1024 米^2，求这跑道宽.

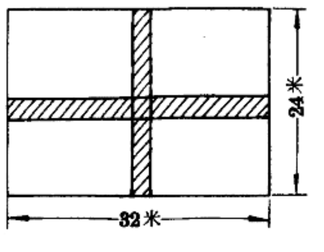
20. 一块矩形场地，长 24 米，宽 12 米，要在它的中央划一块矩形花坛，四周铺上草地，其宽度都相等，花坛占去矩形场地面积的$\frac{5}{9}$，求草地的宽.

21. 用 14 米长的篱笆围成一个一边靠墙且面积为 20 米^2 的长方形菜园，问长方形两邻边长各是多少？

22. 如图所示，利用 22 米长的墙为一边，用篱笆围成一个长方形鸡圈栏，中间用篱笆分割出两个小长方形，总共用去篱笆 36 米，为了使这个长方形 $ABCD$ 的面积为 96 米^2，问 AB 和 BC 边各应是多少？



（第 22 题）



（第 23 题）

23. 如图所示，在宽为 24 米、长为 32 米的矩形土地上，有同样宽的两条小路(即阴影部分，一条纵向，一条横向，且横向与纵向垂直)，把土地分成 4 块小矩形，已知每块小矩形面积为 165 米^2，求小路的宽是多少？

24. 一块矩形铁片，长是宽的 2 倍，现将它的四角各剪去一个边长为 5 厘米的正方形，弯折成一个容积是 1500 厘米^3 的盒子. 问原来矩形铁片的长宽各是多少?

25. 有一两位数，它十位上的数字与个位上的数字的和是 8. 如把十位上的数字和个位上的数字调换后，所得的两位数乘以原来的两位数，就得到 1855. 求原来的两位数. 如果乘以原来的数得 1936 呢? 能不能得到 2665 呢?

26. 学校举行乒乓友谊赛，采用单循环赛形式(即每两个队要比赛一场)，计算下来共要比赛 66 场，问共有多少个队报名参赛?

二、二次三项式的因式分解

[学习要求]

本单元学习要达到下列要求：

1. 知道什么是二次三项式，并记住二次三项式的分解式：

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

其中 $a\neq0$，x_1、x_2 为 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

2. 能利用一元二次方程的求根公式分解一般的二次三项式.

3. 能利用求根公式分解 $ax^2+bxy+cy^2$ 型的二次三项式或某些特殊的高次多项式.

[解题指导]

例1 分解因式：$x^2-11x-12$.

分析 这二次三项式可先尝试用十字相乘法来分解.

解 $x^2-11x-12=(x-12)(x+1)$.

说明 本题也可先求出 $x^2-11x-12=0$ 的根，再用二次三项式的分解式来表达，你可以试一试. 比较一下两种方法的结果是否相同，哪种更简便些?

例2 分解因式：x^2-4x-1.

分析 经简单尝试后，你可发现，这个二次三项式不能用十字相乘法分解因式，所以你可以利用求根公式来进行因式分解.

解 ∵ 方程 $x^2-4x-1=0$ 的根为

$x_1=2+\sqrt{5}$，$x_2=2-\sqrt{5}$，

$$\therefore\quad x^2-4x-1=[x-(2+\sqrt{5})][x-(2-\sqrt{5})]$$
$$=(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5}).$$

例3 分解因式：$3x^2+6x+2$.

解 方程 $3x^2+6x+2=0$ 的根为

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore\quad 3x^2+6x+2=3\left(x+\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right).$$

注意 系数“3”不能漏写，这是较容易出错的地方.

例4 分解因式：x^2-x+1.

解 $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times1<0$，

所以方程 $x^2-x+1=0$ 没有实数根，所以 x^2-x+1 在实数范围内不能分解因式.

例5 分解因式：x^4-5x^2-6.

分析 若把 x^2 当成 y，那么 $x^4=y^2$，可把 x 的四次三项式当成 y 的二次三项式来分解. $x^2=y$ 也可以记在脑中，不必写出.

解 $x^4-5x^2-6=(x^2-6)(x^2+1)$

$$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x^2+1).$$

注意 x^2-6 还能分解，一定要分解到不能再分解为止. x^2+1 不能分解，因为方程 $x^2+1=0$ 没有实数根. 以后如没有特别说明，都是指在实数范围内的因式分解.

例6 分解因式：$2a^2-5ab-2b^2$.

分析 你可以把 $-5ab$ 中的 $-5b$ 当作 a 的系数，把 $-2b^2$ 当作常数项，将 $2a^2-5ab-2b^2$ 看作关于 a 的二次三项式.

解 关于 a 的方程 $2a^2-5ab-2b^2=0$ 的根为

$$a_1=\frac{5+\sqrt{41}}{4}b,\ a_2=\frac{5-\sqrt{41}}{4}b.$$

$$\therefore\quad 2a^2-5ab-2b^2=2\left(a-\frac{5+\sqrt{41}}{4}b\right)\left(a-\frac{5-\sqrt{41}}{4}b\right).$$

注意 这里你不要忘记系数 2 与字母 b.

例7 分解因式：$6x^2-5xy-6y^2$.

解 关于 x 的方程 $6x^2-5xy-6y^2=0$ 的根为

$$x_1=\frac{3}{2}y,\ x_2=-\frac{2}{3}y,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 6x^2-5xy-6y^2&=6\left(x-\frac{3}{2}y\right)\left[x-\left(-\frac{2}{3}y\right)\right]\\&=2\cdot 3\cdot\left(x-\frac{3}{2}y\right)\left(x+\frac{2}{3}y\right)\\&=\left[2\left(x-\frac{3}{2}y\right)\right]\left[3\left(x+\frac{2}{3}y\right)\right]\\&=(2x-3y)(3x+2y).\end{aligned}$$

注意 $6(a+b)=6a+6b$ 用的是乘法分配律，$6ab=2a\cdot 3b$ 用的是乘法交换律、结合律，两者形式和所依据的定律都不同，所以不要把 $6\left(x-\frac{3}{2}y\right)\left(x+\frac{2}{3}y\right)$ 写成 $\left[6\left(x-\frac{3}{2}y\right)\right]\cdot\left[6\left(x+\frac{3}{2}y\right)\right]$.

说明 本题也能使用“十字相乘法”，这样解题将更简便.

***例8** 分解因式：$x^2-4xy+3y^2-4x+10y+3$.

解 关于 x 的一元二次方程

$x^2-4xy+3y^2-4x+10y+3=0$ 的根的求法如下：

将方程改写成 $x^2+(-4y-4)x+(3y^2+10y+3)=0$.

求根公式中的 $a=1$，$b=(-4y-4)$，$c=3y^2+10y+3$.

$\Delta=(-4y-4)^2-4(3y^2+10y+3)=4y^2-8y+4$，

$\therefore\quad x=\dfrac{(4y+4)\pm\sqrt{4y^2-8y+4}}{2}=\dfrac{(4y+4)\pm(2y-2)}{2}$，

$\therefore\quad x_1=3y+1$，$x_2=y+3$.

$\therefore\quad x^2-4xy+3y^2-4x+10y+3=(x-3y-1)(x-y-3)$.

说明 本题也能用下述两种“十字相乘法”来分解因式：

(1) $x^2-4xy+3y^2-4x+10y+3$

$=(x^2-4xy+3y^2)+(-4x+10y)+3$

$=(x-3y-1)(x-y-3)$.

$$\begin{array}{ll} x-3y & -1 \\ x-y & -3 \end{array}$$

“对角相乘后相加”要等于$(-4x+10y)$;

(2) $x^2-4xy+3y^2-4x+10y+3$

$=x^2+(-4xy-4x)+(3y^2+10y+3)$

$=[x-(3y+1)][x-(y+3)]$

$=(x-3y-1)(x-y-3)$.

$$\begin{array}{ll} x & -(3y+1) \\ x & -(y+3) \end{array}$$

“对角相乘后相加”要等于$(-4xy-4x)$.

这例用“十字相乘法”时,要注意“对角相乘后相加”的结果要等于中间括号内两项的和.

例9 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过$(-1,0)$、$(3,0)$、$(5,-6)$三点,求它的解析式.

分析 $(-1,0)$、$(3,0)$是 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点.把 $y=0$ 代入 $y=ax^2+bx+c$,得 $ax^2+bx+c=0$,成了一元二次方程,它的两个根正是-1和3,所以求这个二次函数时,我们可以利用二次三项式的因式分解,设 $y=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$,再把$(5,-6)$点的坐标中的 x、y 值代入所设解析式中,就能很简便地求得这个二次函数,而不必去计算较繁复的三元一次方程组了.

解 设二次函数为 $y=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$.

由已知条件,函数过$(-1,0)$、$(3,0)$两点,可得 $x_1=-1$, $x_2=3$,

$\therefore \quad y=a(x+1)(x-3)$.

又因它经过点$(5,-6)$,所以有$-6=a(5+1)(5-3)$,得 $a=-\frac{1}{2}$,

所以所求二次函数解析式为

$$y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-3)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}.$$

归纳 将二次三项式分解因式,你可以发现:

(1) 当一元二次方程没有实数根时,你必能得到结论:这个方程所对应的二次三项式在实数范围内不能分解因式;

(2) 若能用十字相乘法或完全平方公式分解因式的二次三项式,不一定要用求根公式法来分解因式;

(3) 若二次三项式的二次项系数为1,一次项系数是一个简单的偶数时,用配方法分解二次三项式也不失为一个好方法.

如:$x^2-4x-1=x^2-4x+4-4-1=(x^2-4x+4)+(-4-1)$

$=(x-2)^2-5=(x-2)^2-(\sqrt{5})^2=(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})$.

又如:$x^2-2x-399=x^2-2x+1-400$

$=(x-1)^2-20^2=(x-1+20)(x-1-20)$

$=(x+19)(x-21)$.

(4) 利用一元二次方程来分解二次三项式的因式时,下列几处要多作检查:

① 有没有将二次项系数 a 漏写;

② $a(x-x_1)(x-x_2)$中的“减号”有没有搞错;

③ 若把 a 乘到括号中,有没有犯例7“注意”中的错误;

④ 题中若有两个字母,是否都在你的答案中了;

⑤ 计算是否有错.