饱含一代名师呕心之作

百册丛书撷英

开启考试智商

高中数学 考点记忆 例释

考商

系列 1

EXAM IQ-1

丛书主编 王后雄

本册主编 屠新民 项昭义

龍門書局

考商

系列1

EXAM IQ-1

高中数学

考点记忆例释

从书主编：王后雄

本册主编：屠新民

项昭义

编　　者：屠新民

项昭义

叶正道

龍門書局

高中数学考点记忆例释

丛书主编　王后雄

责任编辑　王　敏　袁勇芳

龍門書局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国青年出版社印刷厂印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2002年6月第　一　版　　开本：890×1240　A5

2002年6月第一次印刷　　印张：7 1/2

印数：1－20 000　　字数：269 000

ISBN 7-80160-517-9/G·507

定　价：8.00元

目录

第一章 集合与简易逻辑

记忆网络

- 集合与简易逻辑
  - 集合
    - 集合的有关概念及运算
      - 子集、全集、补集
      - 交集、并集
    - 含绝对值不等式解法
    - 一元二次不等式解法
  - 简易逻辑
    - 命题及其表现形式
    - 四种命题及其之间的关系、反证法
    - 充要条件及其判断
- 集合的应用

记忆核心

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念. 理解属于、包含、相等关系的意义,掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

2. 会进行集合的运算.

3. 会把集合问题与函数、方程、不等式及曲线联系起来综合运用.

4. 理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义,理解四种命题及相互关系,掌握充要条件的意义及其判断方法.

1 集合的概念

记忆方法

- 集合
  - 集合中元素特征:确定性;互异性;无序性
  - 集合表示法:列举法;描述法;韦恩图法
  - 元素与集合关系:$x \in A$,或 $x \notin A$

记忆快递

[例 1] (全国高考题)集合 $M=\left\{x \left| x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$, $N=\left\{x \left| x=\frac{1}{4}k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$,则 ( )

A. $M=N$ B. $M\supsetneqq N$ C. $M\subsetneqq N$ D. $M\cap N=\varnothing$

[解析] M 中的元素 $x=\frac{2k+1}{4}\pi$, N 中的元素 $x=\frac{k+2}{4}\pi$,而 $2k+1$ 可取任意的奇数,$k+2$ 可取任意的整数,$\therefore$ $M\subsetneqq N$. 答案:C.

[评注] 这是用直接法解选择题.

[例 2] (全国高考题)设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15), x\in \mathbf{R}\}$. $B=\left\{x \left| \cos\frac{x}{2}>0, x\in \mathbf{R}\right.\right\}$. 则 $A\cap B$ 的元素个数为________个.

[解析] 由已知 A,得 $\lg x^2=\lg(8x-15)$, $\therefore$ $x^2-8x+15=0$.

解得 $x_1=3, x_2=5$. $\therefore$ $A=\{x\mid 3,5\}$.

又由 B,得 $\cos\frac{x}{2}>0$; $2k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$.

$\therefore$ $4k\pi-\pi<x<4k\pi+\pi$. $\therefore$ $B=\{x\mid 4k\pi-\pi<x<4k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 当 $k=0$ 时,$-\pi<x<\pi$, $\therefore$ $A\cap B=\{x\mid x=3\}$;

(2) 当 $k=1$ 时,$3\pi<x<5\pi$, $\therefore$ $A\cap B=\varnothing$;

(3) 当 $k=-1$ 时,$-5\pi<x<-3\pi$, $\therefore$ $A\cap B=\varnothing$.

故 $A\cap B$ 的元素个数为 1 个.

[评注] 本题主要考查集合基本知识,考查解对数方程和基本三角不等式的能力. 题目虽小但内涵丰富,蕴含着分类讨论思想和交集思想.

[例 3] (上海高考题)设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$, $B=\left\{x \left| \frac{2x-1}{x+2}<1\right.\right\}$. 若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

[解析] 由 $|x-a|<2$ 得:$a-2<x<a+2$. 所以 $A=\{x\mid a-2<x<a+2\}$. 由 $\frac{2x-1}{x+2}<1$,得 $\frac{x-3}{x+2}<0$,即 $-2<x<3$,所以 $B=\{x\mid -2<x<3\}$.

因为 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases} a-2\geqslant -2, \\ a+2\leqslant 3, \end{cases}$ 于是 $0\leqslant a\leqslant 1$.

[评注] 这是一道研究集合的包含关系与解不等式相结合的综合性题目,主要考查集合的概念及运算,解绝对值不等式、分式不等式和不等式组的基本方法,

在解题过程中运用了数形结合的思想.

迁移冲浪

1. (全国高考题)设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 下,象 $(2,1)$ 的原象是 (　　)

A. $(3,1)$　　B. $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $(1,3)$

2. (上海高考题)若集合 $S=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $S\cap T$ 是 (　　)

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

3. 求数集 $\{1,x,x^2-x\}$ 中的元素 x 所应满足的条件.

4. 设 $A=\{x\mid\sqrt{x-1}\leqslant 3-x\}$, $B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$. (1) 若 $A\supsetneqq B$,求实数 a 的取值范围;(2) 若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

【答案与提示】

1. B.　由 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ 故应选 B.

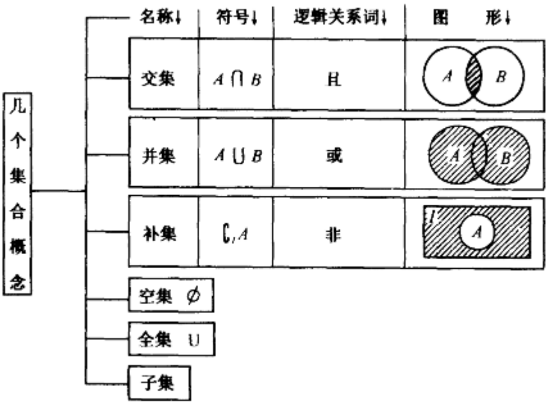
2. A.　由 $S=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$,得 $S=\{y\mid y>0\}$,由 $T=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$,得 $T=\{y\mid y\geqslant -1\}$. $\therefore S\cap T=S$. 故应选 A.

3. 由集合中元素的互异性,可得 $\begin{cases}x\neq 1,\\x\neq x^2-x,\\x^2-x\neq 1.\end{cases}$　$x\neq 0,1,2,\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

4. $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid(x-1)(x-a)<0\}$. (1) 若 $A\supsetneqq B$,则 $1\leqslant a\leqslant 2$;(2) 若 $A\cap B=\varnothing$,则 $a\leqslant 1$. ($a<1$ 时, $B=\{x\mid a<x<1\}$, $a=1$ 时, $B=\varnothing$)

2 集合的运算

记忆方法



记忆快递

[例1] (上海春季招生高考题)集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$,$B=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$,其中 $r>0$,若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,则 r 的值是________.

[解析] 依题意,$A\cap B$ 中有且只有一个元素,即两圆 $x^2+y^2=4$ 与 $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$ 外切或内切.(1) 若两圆外切,则有 $(r+2)^2=3^2+4^2$.解得 $r=3$ 或 $r=-7$(舍);(2) 若两圆内切,则有 $(r-2)^2=3^2+4^2$,解得 $r=7$ 或 $r=-3$(舍).故 $r=3$ 或 7.

[评注] 本题的关键词语是 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,这就启发我们两圆只有相切状态;进一步联想,又要分两类讨论:外切或内切.本题考查集合、两圆位置关系等基本知识以及运算能力.

[例2] (上海春招高考题)已知 $\mathbf{R}$ 为全集,$A=\left\{x\,\middle|\,\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{5}{x+2}\geqslant1\right\}$,求 $\complement_{\mathbf{R}}A\cap B$.

[解析] 由已知得 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}4$.

因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数,所以 $3-x\leqslant4$.

由 $\begin{cases}3-x\leqslant4,\\3-x>0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<3$. 所以 $A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$.

由 $\frac{5}{x+2}\geqslant1$,解得 $-2<x\leqslant3$. 所以 $B=\{x\mid -2<x\leqslant3\}$.

于是 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant3\}$,故 $\complement_{\mathbf{R}}A\cap B=\{x\mid -2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

[评注] 本题主要考查集合、对数性质、不等式等知识,以及综合运用知识能力和运算能力.

[例3] 已知集合 $A=\{x\mid |x^2-2x|\leqslant x\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{1-x}\right|=\frac{x}{1-x}\right\}$, $C=\{x\mid ax^2-x+b>0\}$,且 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求 a, b.

[解析] 在 A、B、C 三个集合中,A、B 能化简,我们可将 A、B 先求出来.

对于 A,由 $|x^2-2x|\leqslant x$, $-x\leqslant x^2-2x\leqslant x$,有

$$\begin{cases}x^2-3x\leqslant0,\\x^2-x\geqslant0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant3,\\x\leqslant0\text{ 或 }x\geqslant1.\end{cases}\quad\therefore\quad 1\leqslant x\leqslant3\text{ 或 }x=0.$$

对于 B,由 $\left|\frac{x}{1-x}\right|=\frac{x}{1-x}$,可得

$$\begin{cases}\frac{x}{1-x}\geqslant0,\\x(x-1)\leqslant0,\text{且 }x\neq1.\end{cases}\quad\therefore\quad 0\leqslant x<1.\quad\therefore\quad A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant3\}.$$

而由题设中的条件: $(A\cup B)\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,

$\therefore$ $C=\{x\mid x<0$ 或 $x>3\}$. 而已知 $C=\{x\mid ax^2-x+b>0\}$,

$\therefore$ $ax^2-x+b=ax(x-3)$,且 $a>0$. 即 $ax^2-x+b=ax^2-3ax$.

比较系数,得 $a=\frac{1}{3}$, $b=0$.

[评注] 在解题过程中蕴含着方程思想,并运用了待定系数法.

迁移冲浪

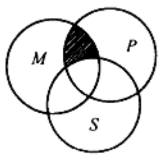


图 1-1

1. (全国高考题)如图 1-1,I 是全集,M、P、S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是 ( )

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\complement_I S$　　D. $(M\cap P)\cup\complement_I S$

2. (上海春季招生题)设 I 是全集,非空集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq I$. 若求含 P、Q 的一个集合运算表达式,使运算结果为空集 $\varnothing$,则这个运算表达式可以是________.(只要写出一个表达式)

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x|x^2-bx+2=0\}$,若 $B\subsetneqq A$, $C\subseteq A$,求实数 a,b 的值.

4. 已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$, $B=\left\{y\left|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right.\right\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

5. 已知抛物线 $y=(m-1)x^2+(m-2)x-1(x\in\mathbf{R})$. (1) 若 $f(x)=0$ 的两实根的倒数平方和不大于2,求 m 的取值范围;(2) 若抛物线与 x 轴交于 A, B 两点,与 y 轴交于点 C,且 $\triangle ABC$ 的面积等于2,试求 m 的值.

【答案与提示】

1. C. 观察题中韦恩图可知,阴影部分是 M 与 P 的公共部分,且又在 S 的外部,再和选择支对照,应选 C.

2. $P\cap \complement_I Q$. 我们用韦恩图来表示,则阴影部分为 $\complement_I Q$,显然,所求表达式是 $P\cap\complement_I Q$. 如图1-2.

图 1-2

3. 由题设, $A=\{1,2\}$, $B\subsetneqq A$,故 B 的可能性有三种: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$. 方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 之根为 1 和 $a-1$. $\therefore B$ 只有一种可能,即 $a-1=1$, $\therefore a=2$. 由 $C\subseteq A$,显然 $b=3$ 时, $A=C$. 另一种情况是 $C=\varnothing$,即 $b^2-8<0$. $\therefore -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

4. $\because a^2-a+1>0$, $\therefore a^2+1>a$. $\therefore A=\{y|y>a^2+1$ 或 $y<a\}$. 又由 $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$,知 $y_{\min}=f(1)=2$, $y_{\max}=f(3)=4$, $\therefore B=\{y|2\leqslant y\leqslant 4\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$,则 $\begin{cases}a\leqslant 2,\\ a^2+1\geqslant 4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\leqslant 2,\\ a\geqslant\sqrt{3}\text{或 }a\leqslant-\sqrt{3},\end{cases}$ $\therefore a\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$.

5. (1) 设 $f(x)=0$ 的两根为 x_1,x_2,则 $m-1\neq 0$,且 $\Delta=(m-2)^2+4(m-1)>0$ 且 $\left(\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{x_2}\right)^2=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=(m-2)^2+2(m-1)\leqslant 2$. 解之,得 $0<m<1$ 或 $1<m\leqslant 2$. (2) $|AB|=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\left|\frac{m}{m-1}\right|$. 又点 C 的坐标为 $(0,-1)$. 而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|x_1-x_2|\cdot|-1|=2$. $\therefore |x_2-x_1|=\left|\frac{m}{m-1}\right|=4$,解之,得 $m=\frac{4}{3}$ 或 $m=\frac{4}{5}$.

3 简易逻辑

记忆方法

1. 逻辑联结词

(1) 命题:初中数学中命题的概念为:"判断一件事情的语句";高中教材中定义为:"可以判断真假的语句". 其内涵是一样的.

(2) 逻辑联结词:"或"、"且"、"非"等词叫做逻辑联结词.

(3) 简单命题:不含逻辑联结词的命题叫做简单命题. 简单命题常用小写拉丁字母:$p,q,r,s,\cdots$表示.

(4) 复合命题:由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题. 复合命题由"p 且 q","p 或 q","非 p"构成.

(5) 判断复合命题的真假,可根据真值表,一般规律是:

① "非 p"形式复合命题的真假与 p 的真假相反.

② "p 且 q"形式复合命题当 p 与 q 同真时为真,其他情况时为假.

③ "p 或 q"形式复合命题当 p 与 q 同假时为假,其他情况时为真.

2. 四种命题

(1) 四种命题

一般地,用 p 和 q 表示原命题的条件和结论,用$\neg p$和$\neg q$分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式为:

原命题:若 p 则 q;逆命题:若 q 则 p;

否命题:若$\neg p$则$\neg q$;逆否命题:若$\neg q$则$\neg p$.

(2) 四种命题的关系

① 原命题$\Leftrightarrow$逆否命题;② 逆命题$\Leftrightarrow$否命题;③ 原命题真,逆命题不一定真.

(3) 反证法

3. 充分条件与必要条件

(1) 充要条件:命题 $A\Rightarrow B$ 成立,则 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件. 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$,则 A 是 B 的充分且必要条件. 简称充要条件.

(2) "A 是 B 的充分条件"与"B 是 A 的必要条件"是等价的.

(3) "A 是 B 的充分条件"也可以说成是"B 的充分条件是 A";"B 是 A 的必要条件"也可以说成是"A 的必要条件是 B";"A 是 B 的充要条件,同时 B 也是 A 的充要条件".

记忆快递

[例 1] (上海高考题)$a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的 ( )

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

[解析] 当 $a=3$ 时,直线 $l_1:3x+2y+9=0$;直线 $l_2:3x+2y+4=0$.

$\because$ l_1 与 l_2 的 $A_1:A_2=B_1:B_2=1:1$,而 $C_1:C_2=9:4\neq1$ 即 $C_1\neq C_2$.

$\therefore$ $a=3$,$l_1 /\!/ l_2$ 且不重合. 若 $l_1 /\!/ l_2$,可求得 $a=3$,$a=-2$,但 $a=-2$ 时 l_1 与 l_2 重合. 故应选 C.

[评注] 本题考查二直线平行、充分必要条件的基本知识及逻辑推理能力.

[例 2] (上海春招高考题)"$a=1$"是"函数 $y=\cos^2ax-\sin^2ax$ 的最小正周期为 π"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

[解析] 若 $a=1$,则 $y=\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$,此时 y 的最小正周期为 π. 故 $a=1$ 是充分条件. 反过来,由 $y=\cos^2ax-\sin^2ax=\cos2ax$ 得函数 y 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2a}=\dfrac{\pi}{a}$. 若函数 y 的最小正周期为 π,则 $a=\pm1$,故 $a=1$ 不是必要条件,故应选 A.

[评注] 本题考查充要条件的基本知识.

[例 3] (上海高考题)"$ab<0$"是"方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线"的( )

A. 必要条件但不是充分条件　　B. 充分条件但不是必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既不是充分条件又不是必要条件

[解析] 如果方程 $ax^2+by^2=c$ 表示双曲线,即 $\dfrac{x^2}{\frac{c}{a}}+\dfrac{y^2}{\frac{c}{b}}=1$ 表示双曲线,只要 $\dfrac{c^2}{ab}<0$,得到 $ab<0$,这就是说"$ab<0$"是必要条件;然而若 $ab<0$,c 可以等于 0,即 $ab<0$ 不是充分条件. 故应选 A.

[评注] 本题考查充分条件、必要条件的推理判断和双曲线的概念.

[例 4] (上海高考题)已知 a、b 为两条不同的直线,α、β 为两个不同的平面,且 $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,则下列命题中的假命题是 ( )

A. 若 $a /\!/ b$,则 $\alpha /\!/ \beta$　　B. 若 $\alpha\perp\beta$,则 $a\perp b$

C. 若 a、b 相交,则 α、β 相交　　D. 若 α、β 相交,则 a、b 相交

[解析] $\because$ α、β 为两个不同的平面,

$\therefore$ 若 $\alpha\cap\beta=c$,但平面 α、β 不会重合.

$\because$ $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,$\therefore$ a 与 b 不一定相交. 如图 1-3.

故"若 α、β 相交,则 a、b 相交"是假命题. $\therefore$ 应选 D.

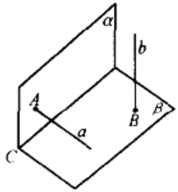


图 1-3

[评注] 本题主要考查命题的基本概念和知识以及简单的逻辑推理能力.

[例 5] (天津高考题)在空间中,①若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;②若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线. 以上两个命题中,逆命题为真命题的是________(把符合要求的命题序号都填上).

[解析] ①中的逆命题是:若四点中任何三点都不共线,则这四点不共面. 我们用正方体 AC_1 做模型来观察:上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 中任何三点都不共线,但 $A_1B_1C_1D_1$ 四点共面. 所以①中逆命题不真.

②中的逆命题是:若两条直线是异面直线,则这两条直线没有公共点. 由异面直线的定义可知,成异面直线的这两条直线不会有公共点. 所以②中逆命题是真命题. 故应填②.

[评注] 本题考查点共线、点共面和异面直线的基本知识,考查命题的有关概念.

[例 6] 分别指出由下列各组命题构成的"p 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题的真假:(1) p:细菌都是有害的;q:有些细菌是有害的. (2) p:有的角大于直角;q:所有的角都大于直角.

[解析] 应先确定 p,q 的真假再结合条件进一步作出判断.

(1) $\because$ p 假 q 真,$\therefore$ "p 或 q"为真,"p 且 q"为假,"非 p"为真.

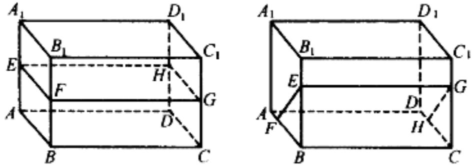
(2) $\because$ p 真 q 假,$\therefore$ "p 或 q"为真,"p 且 q"为假,"非 p"为假.

[评注] 只有对关于"p 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题的概念有清晰而深刻的理解,真正掌握了逻辑联结词"或","且","非"才能获得正确答案.

[例 7] 如图 1-4(1)所示,在透明塑料制成的长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 容器中灌进一些水,固定容器底面一边 BC 于地面上,再将容器倾斜,随着倾斜度的不同,有下列命题:

① 水的形状始终呈棱柱形;② 水面 $EFGH$ 的面积不变;③ A_1D_1 始终与水面 $EFGH$ 平行;④ 当容器倾斜如图 1-4(2)所示时,$BE\cdot BF$ 是定值.

其中正确的命题的序号是______(注:把你认为正确的命题的序号都填上).



(1) (2)

图 1-4

[解析] ① 是正确命题. 如图 1-4(1)时,水的形状是四棱柱形,如图 1-4(2)时,水的形状呈三棱柱形.

② 不是正确命题. 如图 1-4, $S_{矩形EFGH} \neq S_{平行四边形EFHG}$.

③ 是正确的. 如图 1-4(1), $A_1D_1 /\!/ EH$, $EH \subset$ 面 $EFGH$, 而 $A_1D_1 \not\subset$ 面 $EFGH$, 故 $A_1D_1 /\!/$ 面 $EFGH$. 如图 1-4(2), $A_1D_1 /\!/ B_1C_1$, 而 $B_1C_1 /\!/ EG$, $\therefore A_1D_1 /\!/ EG$, 又 $A_1D_1 \not\subset$ 面 $EFHG$, $EG \subset$ 面 $EFHG$, $\therefore A_1D_1 /\!/$ 面 $EFHG$.

④ 是正确的. 如图 1-4(2), $BE \cdot BF = \mathrm{Rt}\triangle BEF$ 面积的 2 倍, 而 $S_{\mathrm{Rt}\triangle BEF} = \dfrac{V_水}{BC}$ 为定值, 故 $BE \cdot BF$ 为定值.

[评注] 这是一道应用题型,与立体几何知识有紧密联系.

迁移冲浪

1. (上海高考题)若 $a<b<0$,则下列结论中正确的命题是 ( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

C. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$ 均不能成立

D. 不等式 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 和 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$ 均不能成立

2. (全国高考题)"$a+b>2c$"的一个充分条件是 ( )

A. $a>c$ 或 $b>c$ B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$ D. $a>c$ 且 $b<c$

3. $\triangle ABC$ 中, $A>B$ 是 $\cos 2B>\cos 2A$ 成立的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　　D. 既不充分也不必要条件

4. $a,b\in\mathbf{R}$,则使$|a|+|b|>1$成立的充分不必要条件是　　　　(　　)

A. $|a+b|\geqslant 1$　　　　B. $a^2+b^2>1-2|ab|$

C. $|a|+|b|>\frac{4}{5}$　　　　D. $b<-1$

5. 已知数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N})$,且$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,给出下列命题:

① 若$S_n=n^2+bn+c(b,c\in\mathbf{R})$,则$\{a_n\}$是等差数列;

② 若$\{a_n\}$是等差数列,则$\{a_1^{a_n}\}$($a_1>0$时)是等比数列;

③ 设$S_{10}=100,S_{20}=90,a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=-120$,则$\{a_n\}$是等差数列;

④ 若$\{a_n\}$是等差数列,且$S_n=100,a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}=-120$,则$S_{2n}=90$;

⑤"$\{\lg a_n\}$是等差数列"是"$\{a_n\}$为等比数列"的充要条件.

其中正确命题的序号是________.

6. 关于复数$z=\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2},\alpha\in(0,2\pi]$,有下列命题:

① 若$z=\bar{z}$,则α必是π的偶数倍;

② 将复数z在复平面内对应向量$\overrightarrow{OP}$逆时针旋转90°得向量$\overrightarrow{OQ}$,则$\overrightarrow{OQ}$对应的复数是$-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2},\alpha\in(0,2\pi]$;

③ 复数z在复平面内对应点的轨迹是单位圆;④ 复数z^2的辐角主值是α.

其中正确命题的序号是________.

7. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点是$F_1,F_2$. 短轴是$B_1B_2$,$P$是椭圆上异于$B_1,B_2$的点. 我们有下列命题:

① $|PF_1|-|B_1F_1|=|PF_2|-|B_2F_2|$;② $a-c\leqslant|PF_1|\leqslant a+c$;

③ 若b越接近于a,则离心率越接近于1;

④ 直线PB_1与PB_2的斜率之积等于$-\frac{b^2}{a^2}$.

其中正确命题的序号是________.(注:请把你认为正确的命题的序号都填上)

8. 分别指出由下列各组命题构成的"p或q","p且q","非p"形式的复合命题的真假:

(1) p:两个无理数的和是无理数;q:两个无理数的积是无理数.

(2) p:方程$x^2-x+2=0$没有实根;q:方程$x^2-x+2=0$的两根的符号不同.

【答案与提示】

1. B. $a<b<0\Rightarrow\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}<0\Rightarrow\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0\Rightarrow\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$. $a<b<0\Rightarrow a<a-b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{a-b}$. 故应选 B.

2. C. $\left.\begin{array}{l}a>c\\b>c\end{array}\right\}\Rightarrow a+b>2c$. 故应选 C.

3. C.　4. D.　$b<-1\Rightarrow|b|>1\Rightarrow|a|+|b|>1$. 反过来不成立.

5. ②,④　6. ①,②　7. ②,④

8. (1) $\because p$ 为假, q 为假, $\therefore$ "p 或 q"为假, "p 且 q"为假, "非 p"为真.
(2) $\because p$ 为真, q 为假, $\therefore$ "p 或 q"为真, "p 且 q"为假, "非 p"为假.