

Electrodynamics

电动力学

俎栋林 编著

清华大学出版社

Electrodynamics

电动力学

俎栋林 编著

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

电动力学是物理与电磁相关专业本科生的一门理论课、专业基础课。本书系统地阐述经典电磁场的基本概念、基本原理和理论体系。主要内容包括静电场、静磁场的规律和解法,稳恒电场、稳恒磁场的规律和解法,时变电磁场所遵循的普遍规律(麦克斯韦方程组)及其求解方法,简谐电磁波的辐射、传播和传输的规律,与介质相互作用的规律。还包括在动体电动力学基础上诞生的狭义相对论、相对论运动学、相对论电动力学、相对论牛顿力学、相对论分析电动力学,以及运动电荷的自有电磁场、辐射场、辐射阻尼和介质对电磁波的散射、介质色散等内容。

本书可作为理工科大学各物理类专业和电子工程专业类的本科生教材或参考书,也可供教师、研究人员、研究生以及对电磁场和狭义相对论有兴趣的其他人员参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

电动力学/昝栋林编著. —北京:清华大学出版社,2006.9

ISBN 7-302-12938-X

I. 电… II. 昝… III. 电动力学 IV. O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 039847 号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

组稿编辑:朱红莲

文稿编辑:赵从棉

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市李旗庄少明装订厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:175×245 印张:25.75 字数:522 千字

版 次:2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-12938-X/O·532

印 数:1~3000

定 价:39.00 元



对电磁现象的定量研究始于 1785 年库仑定律发表,1813 年得到电通量的高斯定理和静电势的泊松方程。1820 年奥斯特发现电流的磁效应是电磁学研究的重要里程碑,同年安培、毕奥、萨伐尔建立了电流元之间、电流对磁极作用力的定律。安培提出研究电的理论应称为“电动力学”,并于 1827 年写出一本“电动力学理论”。1846 年韦伯提出“电动力学数学理论”,被称为“韦伯电动力学”。1831 年法拉第发表电磁感应定律,提出电场、磁场概念,1851 年发表“论磁力线”,是近距离作用、场概念的提出者。至此,从理论上总结电磁场普遍规律的条件已经具备。1855 年麦克斯韦开始钻研法拉第的三卷论文集《电学实验研究》,主攻场的概念,引入新矢量函数描写电磁场,1861 年提出“涡旋电场”假设和“位移电流”假说。1865 年发表“电磁场的动力学理论”,总结出麦克斯韦方程组,预言电磁波的存在,提出了光的电磁理论。1875 年洛伦兹利用电磁场在介质界面的边值关系导出了反射、折射定律和非涅耳公式,1878 年提出解释光色散的电子论。1885 年亥维赛首次把麦克斯韦方程组整理成今天的样子。1888 年赫兹发现了电磁波,作为一个“判决性”实验,麦克斯韦电磁理论被广泛接受。到 1900 年左右,物理学的三个分支,即电学、磁学、光学,被合并为一个统一的理论,称为麦克斯韦电磁理论。基于该理论,J. J. 汤姆逊首次提出电磁波沿金属圆管内壁传播的可能性。1897 年瑞利奠定了矩形和圆形波导的理论基础。1896 年洛伦兹用其电子论成功解释了塞曼效应,洛伦兹和塞曼荣获了 1902 年诺贝尔物理奖。1897 年 J. J. 汤姆逊发现了电子,获得了 1906 年诺贝尔物理奖。1898 年勒纳德导出了运动电荷的推迟势,得到了加速运动电荷会产生辐射的结论,由于与赫兹一起发现光电效应,荣获了 1905 年诺贝尔物理奖。总之,麦克斯韦电磁理论为研究各种宏观电磁问题和电磁工业应用奠定了统一而全面的基础。

然而,麦克斯韦方程组从 1865 年发表就面临着在伽利略变换下不满足相对性原理的问题,认为只有在绝对静止的以太参考系麦克斯韦方程组才精确成立。于是,设计了各种实验来测量地球相对于以太的绝对运动,测量精度最高的是 1887 年的迈克尔逊-莫雷实验,得到的是零结果。为了解释实验的零结果,洛伦兹于

1892年提出“洛伦兹收缩”假设,1904年提出洛伦兹变换。1905年爱因斯坦发表“论运动物体的电动力学”和“物体的惯性同它所包含的能量有关吗?”两篇论文建立了狭义相对论,导致了时间和空间相统一的概念。要求麦克斯韦电磁理论服从相对性原理,必然导致狭义相对论的诞生。没有狭义相对论,这个理论与已经建立起来的牛顿力学理论不相协调。反过来说,麦克斯韦电磁理论与相对论是完全协调一致的,需要修改的是牛顿力学。因此,电动力学包括麦克斯韦电磁场理论和狭义相对论以及经典电子论。麦克斯韦电磁场理论又称为经典电磁理论。电动力学,区别于后来发展起来的量子电动力学,也叫经典或宏观电动力学,主要研究宏观带电体如何产生电磁场、电磁场如何运动以及与带电体和介质相互作用的规律。

电动力学理论在20世纪一方面随着应用范围的扩大和深入而发展,主要围绕麦克斯韦方程组的求解展开理论,发展新的解法;另一方面随理论物理的发展和新理论融合。为研究原子结构1926年量子力学建立起来,经典电磁场理论没有包括光子的粒子性,不太适用于微观客体的电磁作用,与量子力学不相容。1927年狄拉克(P. Dirac)从电磁场的哈密顿原理出发提出电磁场的量子化理论,到1929年与泡利、海森伯一起建立量子场论,研究电子和电磁场的相互作用。1948—1950年,费曼、施温格、朝永三人建立了量子电动力学(QED),可以精确处理微观辐射问题,精度高达 10^{-10} ,是迄今最完美的物理理论,为此他们荣获1965年诺贝尔物理奖。电动力学具有规范不变性,在它的启发下,杨振宁和米尔斯(R. L. Mills)发展了规范场论,在规范场论基础上,由格拉肖(S. L. Glashow)、萨拉姆(A. Salam)和温伯格(S. Weinberg)建立了电磁作用与弱作用的统一理论,为此他们荣获了1979年诺贝尔物理奖。量子力学和经典电动力学的结合还导致一个新学科,即量子电子学的诞生。从应用的角度说,电力工程的发展派生出电机理论;第二次世界大战前夕的三四十年代,由于雷达技术需要,几个学派发展了几套辐射理论,就电磁波天线技术的需要派生出天线理论。麦克斯韦方程组是矢量偏微分方程组,在单色波情况下矢量波方程可化为矢量亥姆霍兹方程,在一般曲线坐标系中分量方程是耦合的,无法分离变量。1935—1937年汉森(W. W. Hansen)提出了直接求解矢量波方程的方法,得到的矢量波函数被称为汉森函数。1941年斯特莱顿(J. A. Stratton)介绍了汉森的思路,给出了解法,讨论了解的形式。1971年C. T. Tai提出用并矢格林函数可以直接求解麦克斯韦方程组的边值问题,给出了形式完满对称的表达式。就电磁波传输来说,波导传输实验于1936年首次获得成功,此后开始了微波理论和工程技术的发展史。电磁理论与力学理论结合起来研究真空电子束与微波电磁场的相互作用,19世纪四五十年代发展了磁控管、速调管等功率源,行波加速管、驻波加速腔等微波电真空器件;伴随受控热核反应的研究发展了等离子体电动力学和磁流体力学;伴随加速器的研究发现了同步辐射现象,发展了同步辐射理论和同步辐射光源。结合电磁理论、相对论力学和量子力学研究相对论电

子束与甚高频电磁场相互作用,19 世纪六七十年代发展了脉泽(MASER)、铯原子钟、激光等。七八十年代还发明了自由电子激光、电子回旋谐振脉泽等高功率源。近 30 年来,随着计算机的发展,电磁场数值计算方法、程序、软件得到了大力发展。同时,电磁理论对毫米波雷达、光纤通信、卫星导航、遥控遥测遥感、电子对抗等应用需求的实现起到了很好的推动作用,然而其基础仍然是麦克斯韦经典电磁场理论。随着粒子加速器技术、核磁共振谱仪及大型医疗设备如核磁共振成像机的发展,除射频技术外,均匀磁场、梯度磁场设计方法包括“正方法”和“逆方法”都有新的发展。非线性材料的电磁性质、生物电磁学等都对电磁场理论提出了新的应用研究课题。

麦克斯韦-洛伦兹-爱因斯坦电动力学和牛顿力学理论、薛定谔-海森伯-狄拉克量子力学并列,是对大学物理专业本科生进行基础理论训练的三大核心理论。这种训练也包括理论联系实际的训练以及对电磁应用前沿领域的关注。雄厚的理论基础不仅是产生广泛适应性即适应物理学任一支领域研究工作的必备条件,也是造就通观全局的物理通才包括未来能主持重大科学工程项目的科学泰斗的必备条件。

求解电磁工程问题通常有两个途径,即“场”方法和“路”方法,各有整套的理论和方法。1847 年基尔霍夫根据静电场的无旋性和电流连续性提出电路基本方程,奠定了电路理论基础。一般说“路”方法比“场”方法要简捷得多。但是,“场”方法具有普遍性,“路”方法有局限性。高频时电路定律失效,必须用“场”理论、“场”概念处理。

一个典型的电磁工程系统包括信号源(振荡器或谐振腔)、信号调制、功率放大、发送、传输、接收、耦合和用电磁场的部件。有些部分用“路”理论处理,有些部分用“场”理论处理。有些部分如耦合器要同时运用“场”和“路”概念才能处理。这些“接口”部分是书本上找不到的,即“场”理论和“路”理论都不包括的,要靠研究者的综合能力。电动力学的任务是只讨论电磁场的运动规律、狭义相对论以及单电子和电磁场的相互作用。由于课时限制,对电磁场只讨论最核心、最基本的问题。关于介质中的电磁场也只限于线性、各向同性介质。关于带电粒子在电磁场中的运动也只是给出最基本的方程式。真正处理这类问题是“带电粒子输运(束流光学)”和“粒子动力学”的任务。关于电磁波也只讲达朗贝尔方程导出推迟势以处理辐射问题,讲标量亥姆霍兹方程导出亥姆霍兹势以处理在波导中的传播问题,不涉及更高深的内容如矢量亥姆霍兹方程、汉森函数、Hallen 积分方程、矩量法等。

过去可能过于强调理、工的区别,理科生不太了解在电磁工程中电磁理论是怎样应用的,很少注意公式的适用条件,不知道怎样取近似。概括讲,有理论脱离实际的倾向。工科生对电磁理论的工程应用相对来说比较熟悉,然而一旦条件有变化,面对新情况,对理论的应用就难以把握。而且,过去工科院校不讲相对论,也就

是说工科生理论修养的深度和广度不足。自 20 世纪 80 年代开始,在教学内容上开始有些调整,注意理和工的结合。本教材的目标是为新世纪重点理、工科大学物理专业和电子工程类专业提供一本理论联系工程实际,触及到应用前沿,有足够深度和广度,适合 60 学时讲授内容的电动力学教科书。书中介绍了一些电磁工程和电磁部件,增加了一些例题。

学习电动力学需要电磁学的基础和具备数理方程、特殊函数等数学工具,课程本身需要自补矢量分析和张量分析的数学内容。本教材内容安排本着先易后难、循序渐进的原则,按着电磁理论产生、发展的先后顺序,从静电场开始,继之稳恒场,再到时变场、稳态时谐场和运动物体电动力学。具体说,第 1 章讲静电场的性质和规律,根据静电场的有散无旋性引入电标势,导出泊松方程和拉普拉斯方程,把静电问题归结为三类“边值问题”,介绍求解边值问题的分离变量法、镜像法、格林函数法和多极展开法。第 2 章讲稳恒电场、稳恒电流磁场和静磁场。其中稳恒电场的规律为电路理论提供了依据。静磁场是指永磁体产生的磁场,其规律与静电场完全相同,引进磁标势,用分离变量法可以求解静磁边值问题。稳恒电流磁场的性质和规律是该章的重点。与静电场(纵场)正好相反,稳恒电流磁场代表另一类典型的准静态场(横场),根据其无散有旋性,引进磁矢势,借助于磁矢势可求解稳恒电流磁场问题。第 3 章讲随时间变化的电磁场的普遍规律,介绍建立在 3 大实验定律(库仑、安培-毕奥-萨伐尔和法拉第定律)和位移电流假说基础上的麦克斯韦方程组、建立在 3 个物质性质定律(电介质极化、磁介质磁化和导体的欧姆定律)基础上的物质方程和洛伦兹电磁力方程。这些方程合在一起加上牛顿第二定律是完备的,可以描述所有电磁现象,解决一切电磁问题。由这些方程导出电磁场能量转化和守恒定律、电磁场的动量转化和守恒定律以及电磁波动方程,定义了电磁场的能量、动量、能量流、动量流以及麦克斯韦应力张量。根据时变电磁场的性质和规律,引入了电磁场的矢势和标势,在洛伦兹规范条件下,把麦克斯韦方程组化为达朗贝尔方程,得到了推迟解,为后面几章讨论电磁波辐射、传播以及讨论加速运动电子的辐射准备了理论基础。第 4 章专讲定域振荡电荷、电流系统产生的辐射场,重点讨论电偶极、磁偶极、电四极和半波天线的辐射。第 5 章讲电磁波的传播规律,从平面波场的边值关系出发,讨论介质分界面上电磁波的运动学行为(导出反射、折射定律)和动力学行为(导出菲涅耳公式),进而讨论全折射和全反射现象和规律,涉及介质波导(光导纤维)和导体表面上的表面波以及趋肤损耗等概念。为讨论电磁波在金属管内的运动传输行为,引进赫兹势和赫兹波动方程,导出亥姆霍兹势、亥姆霍兹方程、横电和横磁模式的边界条件,把波导、同轴线和谐振腔都归结为边值问题,其中,讨论了本征模、本征波矢、相速、群速、简并等许多重要概念。最后讨论电磁波在等离子体中的运动传播特性。第 6 章讲狭义相对论,包括其产生的背景、实验基础、基本原理、运动学效应、电动力学方程的相对论协变式和

分析力学形式。第7章讲运动电荷的辐射,利用瞬时惯性系概念和洛伦兹变换导出勒纳德-威谢尔势,得到任意运动电荷的电磁场由“自有场”和“辐射场”两部分组成,进而讨论两种典型的辐射(直线加速器辐射和同步加速器辐射)和介质中的切伦科夫辐射。第8章讲经典电子论,包括电子质量和辐射阻尼、光谱线的自然宽度、电磁波与电子的相互作用(吸收与散射)以及介质色散和导体色散的内容。

作者自1993年主讲本科生“电动力学”课,使用虞福春、郑春开编著的《电动力学》9年,得到过虞福春教授、郑春开教授、许方官教授、陆善堃教授等前辈的帮助。1995年又并行开讲“核磁共振成像学”研究生课。教学、科研并重,科研方向先前是粒子加速器物理和工程,然后是核磁共振成像物理和工程,都需要应用电磁场理论。因此,在电磁场工程方面有切身体会,加上教学相长,逐渐对现有的电动力学教科书感到不满足、不尽意。在多年讲稿的基础上,于2002年写出《电动力学》讲义。正值北京大学成立物理学院,该讲义作为电动力学教材试用了四届,试用过程中,得到过王正行教授多次有益的讨论。同时,吸取了2002、2003级许多同学的意见和建议。在此一并表示衷心的感谢。

使我感到鼓舞的是,北大物理学院2002级的一位同学对我在课上提出的“匀场”课题很感兴趣,课外给他补充了一些工程背景后,他很快编制了软件,已经付诸使用,有关专家给予了很高的学术评价。1997级一位同学对电动力学特别感兴趣,尤其是电磁场,在硕士研究生期间,做设计梯度磁场的逆方法研究。毕业参加工作仅半年,就主持核磁共振成像磁体系统的设计,而且取得了突破性进展。这说明理论和实际应用前沿密切结合是必要的、有效的。

与国外本科生教材相比,本教材理论偏深。然而,与其研究生教材比,比如J. D. Jackson著的 *Classical Electrodynamics* 相比,还是偏浅。考虑到目前国内物理专业研究生普遍开设“高等量子力学”课程,而没有开设“高等电动力学”课程,因此,本书内容有一定深度。电动力学只讲授60学时左右,在此学时内消化、吸收这样一门理论高深的课程,是有一定难度的。书中提供的内容和材料比较多,有些内容是必讲的,有些内容是供教师选择的,有些是可以不讲的。比如说,对光通信方向的学生,可以讲介质波导(光导纤维)而不讲金属波导,甚至不讲运动电荷的辐射。对粒子物理、核物理和加速器方向的学生则相反。标有星号的内容可依据专业方向的需要和学生的接受能力进行选择,也可供读者自学或参考。与本教材同时出版的还有配套的《电动力学习题解答》,供任课教师包括辅导教师使用。

由于作者水平有限,书中难免还有错误和不足,恳请各位老师和读者不吝赐教。

作 者

2006年3月于北京大学



第 1 章 静电场	1
1.1 真空中的静电场	1
1.2 真空中静电场的散度和旋度	4
1.3 介质中的静电场	8
1.4 静电势、泊松方程和拉普拉斯方程	12
1.5 静电问题的惟一性定理.....	16
1.6 分离变量法.....	19
1.7 镜像法.....	23
* 1.8 静电问题的格林函数法	29
1.9 静电场的能量.....	35
1.10 电多极矩及其与外场的相互作用	37
参考文献	43
矢量分析习题	43
习题	45
 第 2 章 稳恒电、磁场和静磁场	48
2.1 稳恒电流与稳恒电场.....	48
2.2 真空中稳恒电流磁场.....	54
2.3 磁矢势.....	63
2.4 磁介质中的磁场.....	71
2.5 磁矢势满足的微分方程.....	76
2.6 静磁场.....	78
2.7 稳恒电流磁场的磁标势解法.....	83
* 2.8 磁屏蔽	88
2.9 载流线圈间相互作用,磁场的能量	90
2.10 磁偶极子的磁场及其与外场的相互作用	94

* 2.11 目标场方法,逆问题	101
附录 2-1 魔环壳内泊松方程特解的求法	106
附录 2-2 柱坐标系中格林函数展开	107
参考文献	108
习题	109
第 3 章 时变电磁场的普遍规律	111
3.1 法拉第定律和涡旋电场	111
3.2 麦克斯韦方程组与洛伦兹力公式	112
3.3 电磁场的能量转换与守恒定律,坡印亭矢量	117
3.4 电磁场的动量转换和守恒定律	119
3.5 电磁波动方程和电磁波	124
* 3.6 时变电磁场的初、边值问题及其解的惟一性	127
3.7 电磁场的矢势与标势	129
习题	136
第 4 章 时谐辐射场和似稳场	137
4.1 定域振荡电荷、电流系统产生辐射场的一般规律	137
4.2 电偶极辐射	141
4.3 磁偶极辐射和电四极辐射	144
4.4 从中央馈送的直线天线辐射	150
4.5 天线阵列	155
* 4.6 似稳电磁场	157
习题	161
第 5 章 电磁波的传播	162
5.1 平面电磁波	162
5.2 电磁波在绝缘介质分界面上的反射与折射	169
5.3 电磁波在导电介质中的衰减及在导体表面上的反射和透射	178
5.4 赫兹势和赫兹波动方程,亥姆霍兹势和亥姆霍兹波动方程	188
5.5 矩形波导	194
5.6 圆柱形波导中的导行波	206
* 5.7 介质波导、光导纤维	212
5.8 同轴传输线	222
5.9 电磁驻波与谐振腔	228

5.10 电磁波在等离子体中的传播	237
习题	246
第 6 章 狭义相对论	248
6.1 狭义相对论的实验基础及产生的历史背景	248
6.2 狭义相对论基本原理及洛伦兹变换	255
6.3 相对论运动学	259
6.4 张量分析	277
6.5 电动力学方程的相对论协变形式	283
6.6 相对论牛顿力学	296
6.7 相对论分析电动力学	308
习题	316
第 7 章 运动电荷的辐射	319
7.1 任意运动电荷的势和场	319
7.2 加速运动电荷的辐射	324
7.3 直线加速器中的辐射	327
7.4 同步(加速器)辐射	329
7.5 切伦科夫辐射	339
* 7.6 运动电子的其他辐射机制	345
习题	346
第 8 章 电磁场(波)与电子(物质)的相互作用	347
8.1 电子的电磁质量和计及辐射阻尼效应的 A-L 方程	347
8.2 谐振电子的辐射阻尼和光谱线的自然宽度	353
* 8.3 自由电子对电磁波的散射	356
* 8.4 束缚电子对电磁波的散射	360
8.5 介质的色散和吸收	364
8.6 导体的色散	370
习题	373
附录 A 矢量分析常用公式及有关定理	374
附录 B 正交曲线坐标系	377

附录 C δ 函数	380
附录 D 球函数	382
附录 E 柱函数	385
附录 F 常用的物理常数	389
习题答案	390
主要参考书目	399

第 1 章 静 电 场

在一定空间区域内,电荷分布不随时间变化,其电场也不随时间变化,则称这样的电场为静电场。本章从基本实验定律——库仑定律出发,引进电场、电势的概念,导出描述静电场基本性质和规律的微分方程式和积分方程式。据此讨论静电场的求解方法。其中许多概念和方法也是全书的基础。

1.1 真空中的静电场

1. 库仑定律

1785 年库仑发表了关于两个点电荷之间相互作用力的规律,即著名的库仑定律。库仑用扭秤测量两个点电荷之间的作用力,总结出一个规律,其实验精度只有 4×10^{-2} 。由于受到万有引力定律的启发,库仑坚信电荷之间的作用力与其距离之间的关系一定也是平方反比律,故很快发表了他的研究成果。其实卡文迪什早在 1773 年就已经发现了这个定律,只是由于卡文迪什过于谨慎没有发表。麦克斯韦在整理卡文迪什的手稿时才得知这一情况。卡文迪什是用同心球做实验,实验精度是 2×10^{-2} ,比库仑的实验精度高一倍。实验方法本身就表明,卡文迪什不仅知道静电作用的平方反比律,而且还知道静电场满足高斯定理。后人不断验证库仑定律的平方反比律,几乎都采用同心球方案^[1]。

对于库仑定律的文字表述大家已经熟知,这里着重给出其普遍的数学表达式。著名物理学家费曼认为,自然规律能用数学表达的时候才称得上是真正意义上的科学,也只有通过数学才能演绎出理论。马克思也认为:“一种科学,只有成功地运用数学时,才算达到完美的地步。”下面是库仑定律的数学表达式:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1.1.1)$$

式中 ϵ_0 是真空介电常数,矢径 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 分别是点电荷 q_1 和 q_2 的空间坐标。式(1.1.1)清楚地描述了两点电荷之间作用力的量值和方向,它极其简练而准确。 $\mathbf{F}_{12}$ 代表 q_1 对 q_2 的作用力,如图 1.1.1 所示。 $\mathbf{F}_{21}$ 代表 q_2 对 q_1 的作用力,并满足

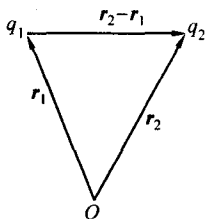


图 1.1.1

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (1.1.2)$$

如果一个点电荷 q 位于 $\mathbf{r}$ 处, 同时受到许多点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 的作用, 那么 q 所受的力是各个点电荷 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 单独存在时对 q 作用力的矢量和, 可表示为

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \quad (1.1.3)$$

式中 $\mathbf{r}_i$ 是第 i 个电荷的空间坐标。这里必须注意两点:

①电荷必须静止; ②电荷必须是点电荷。否则, 该表达式将不成立。大家可能要问, 点电荷是什么含义?

点电荷是一个数学模型, 类似于力学上的质点。物理上的点与数学上的点不同, 数学上的点没有大小、没有体积; 而物理上的点是有大小、有形状、有体积的, 其形状是一个小圆球, 其大小只能相对来说。当带电体的几何线度远小于它们之间的距离时就可以当点电荷处理。另外, 点电荷的电量在宏观上看是无穷小, 在微观上看是无穷大。

如果带电体比较大, 或其距离比较近, 不能当点电荷处理怎么办呢? 那么就通过切割, 划分成电荷微元, 引进电荷密度 ρ , 其定义为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (1.1.4)$$

即单位体积内的电荷量。用 dV 表示体积元, ρdV 可看成点电荷。有时电荷分布在导体表面上或介质分界面上, 怎样处理呢? 物理上的面也不同于数学上的面, 物理上的面是有厚度的。当不关心厚度时, 可引进一个面电荷密度 σ_e , 定义为

$$\sigma_e = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (1.1.5)$$

即单位面积上的电荷量, $dq = \sigma_e dS$ 可以看成点电荷。有时电荷不是连续分布, 而是离散分布的点电荷, 可用一个特殊的密度函数

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i) \quad (1.1.6)$$

来描述。式中 $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_i)$ 是 δ 函数, 是狄拉克于 1926 年引进的。 δ 函数有三条性质:

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \begin{cases} \infty & (\mathbf{r}' = \mathbf{r}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}) \end{cases} \\ \int_0^\infty \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV' = 1 \\ \int_0^\infty f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV' = f(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (1.1.7)$$

根据这三条性质, 有

$$\int \rho(\mathbf{r}) dV = \int_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) dV = q_i \quad (1.1.8)$$

点电荷可以看成体积很小、密度很大的一个带电球体的极限,所以可用 δ 函数来表示点电荷的密度分布。关于库仑定律还需要说明如下两点:

① 库仑定律适用的空间范围:在各种尺度上都有实验证明,微观小到 10^{-17}m (质子内部),宏观大到 10^7m (宇宙空间),库仑定律都成立。在某些极限情况,比如在原子核内,质子之间不是纯粹的电磁力,还有核力作用。因此核子运动规律不完全由电磁力决定。

② 库仑定律的平方反比律 $\frac{1}{r^2}$ 的验证精度 ε 已达 6×10^{-16} ,这是由测量仪器精度所决定的一个量。对平方反比律的任何微小偏离都会引起极其严重的后果^[1]。比如关系到光子静止质量不等于零,关系到光速不变即相对论的基础,以及整个电磁理论,等等。

2. 真空中的电场和场强叠加原理

如果在某个真空空间区域内,一个试探点电荷总是受到一个力的作用,则将具有此性质的空间叫做电场。设 q_0 是试探点电荷,其受力为

$$\boldsymbol{F} = q_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \quad (1.1.9)$$

在式(1.1.1)中,设 q_2 为试探电荷, q_1 产生的电场可写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3} \quad (1.1.10)$$

如果电场是由 n 个点电荷激发的,将式(1.1.3)两边除以 q ,得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \quad (1.1.11)$$

电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 不依赖于试探电荷,是真实存在的。通常将 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 称作电场强度,它是空间位置的函数。最初引进电场 $\boldsymbol{E}$,只是作为一个符号,后来逐步发现它有丰富而深刻的物理内涵(见1.9节)。电荷连续分布时,式(1.1.11)可以写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dV' \quad (1.1.12)$$

式(1.1.12)是对所有存在电荷的空间体积进行积分, $\boldsymbol{r}$ 是场点坐标, $\boldsymbol{r}'$ 是源点坐标。并且本书约定:用带撇的变量描写源点的坐标,用不带撇的变量描写场点的坐标。应当指出,得到上面式子是运用了场强叠加原理。该原理表述为: n 个点电荷在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的电场等于各个点电荷单独存在时在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的电场的矢量和。

式(1.1.12)说明:只要给定空间电荷分布,就可以确定空间任意一点的电场强度。这正是静电学的核心问题,它是利用库仑定律和叠加原理导出的一个直接结果。

1.2 真空中静电场的散度和旋度

原则上讲,给定电荷分布就可由式(1.1.12)计算出电场分布。但是,静电问题没有这么简单。因为,一般情况求积分很难,只有在对称性很好的情况下才能得到解析结果。更大的困难尚不在于此,因为积分实在积不出来还可以用数值积分,在当今计算机时代,这不成问题。从物理上说,实际情况是电荷分布常常是不知道的。因为场和电荷有相互作用,使得场和电荷都是未知量。因此有必要进一步研究电场本身的性质和所遵循的规律。

根据亥姆霍兹定理,如果在一个有限区域内矢量场的散度和旋度是处处已知的,该矢量场就是惟一确定的。电场是矢量场,对其散度和旋度研究清楚,电场所遵循的规律就清楚了。研究散度和旋度的数学工具是矢量场论中的高斯定理和斯托克斯定理。

1. 静电场的高斯定理

穿过任意闭曲面 S 的电通量等于该曲面包围的电荷除以 ϵ_0 , 表达式为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1.2.1)$$

上式的证明过程如下。

证明 出发点是库仑定律的普遍表达式,将式(1.1.12)代入式(1.2.1)(注意 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, 如图 1.2.1(a)所示),有

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \int_{V_\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \rho(\mathbf{r}') dV' \oint_S \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{R^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \rho(\mathbf{r}') dV' \oint_S d\Omega \end{aligned}$$

式中 V_∞ 代表全空间,因为场是全空间电荷产生的。上式第二个等号是因为 S 面取定后,可以交换积分次序;第三个等号是根据立体角的定义,因为 $d\Omega$ 是面元 dS 对 $\mathbf{r}'$ 点所张立体角。由于 S 面内的电荷对闭曲面 S 所张立体角为 4π , 而 S 面外的电荷对闭曲面 S 张的立体角等于零(图 1.2.1(b)), 即

$$\oint_S d\Omega = \begin{cases} 4\pi & (\text{当 } \mathbf{r}' \text{ 点位于闭曲面 } S \text{ 内部时}) \\ 0 & (\text{当 } \mathbf{r}' \text{ 点位于闭曲面 } S \text{ 外部时}) \end{cases}$$

于是上式的积分体积 V_∞ 应代之以 V_S :

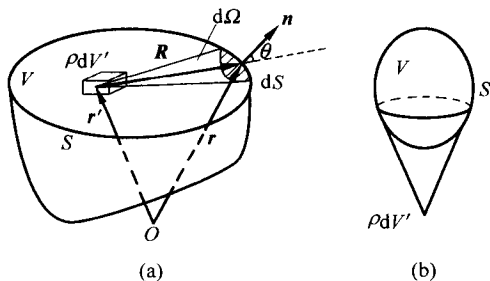


图 1.2.1

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_S} \rho(\mathbf{r}') dV'$$

V_S 代表曲面 S 所包围的体积,证毕。

方程(1.2.1)是高斯定理的积分形式。由于 V_S 为 S 面所包围的体积,所以高斯定理的积分形式只能反映电场强度 $\mathbf{E}$ 变化的平均效果。利用矢量场论中的高斯定理:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (1.2.2)$$

由于封闭面 S 是任意取的,此式都满足,所以必须要求被积函数相等,于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2.3)$$

此为静电场高斯定理的微分形式。式(1.2.3)说明静电场是有源场,其散度等于 $\frac{\rho}{\epsilon_0}$,这意味着有电荷的地方有散度,无电荷的地方无散度。反过来说,凡是散度不等于零的空间点一定有电荷,而且根据散度的正、负号可以判定是正电荷还是负电荷。可见散度方程可以细致地描写空间每一点的性质,给出每一点的场-源关系。这可以从散度的定义

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

来加深理解。散度把场和源直接联系起来,且是点-点对应的。式(1.2.3)是库仑平方反比律的必然结果,但比库仑定律要深刻得多。

2. 静电场的无旋性

对任一闭合回路 C ,取电场的环路积分,并把式(1.1.12)代入,得

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_C \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \cdot d\mathbf{l}$$