



新课标

黄冈海淀新成果

星星挑战

同步点拨 

九年级数学(上)

配北师大版

总主编 / 禹 林

 郑州大学出版社

黄冈海淀新成果

星星挑战

同步点拔 

总主编 / 禹 林

九年级数学(上)

配北师大版

 郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

星星挑战同步点拨·九年级数学(上):配北师大版/
禹林总主编. —郑州:郑州大学出版社,2005.7

ISBN 7-81106-099-X

I. 星… II. 禹… III. 数学课—初中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第061966号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路40号

出版人:邓世平

全国新华书店经销

郑州九州印务有限公司印制

开本:787 mm × 1 092 mm

印张:6.75

字数:208千字

版次:2005年7月第1版

邮政编码:450052

发行部电话:0371-66966070

1/16

印数:1~10 000

印次:2005年7月第1次印刷

书号:ISBN 7-81106-099-X/G·184

定价:9.50元

本书如有印装质量问题,请向本社调换

说 明

本丛书由郑州大学出版社组织一批长期工作在小学教学第一线,有着丰富教学经验的特、高级教师及教育专家精心研究、倾力打造。其具有以下特点:

一、紧扣大纲,倡导创新

本丛书本着“紧扣大纲,突破教材,拓展思路,培养能力”的宗旨,与课堂教学严格同步,与学生能力培养和发展同步,直观展示教材内容,检查学生对基础知识的掌握情况,重点培养对基础知识的理解能力。同时,书中原创大量新颖的与生活实际相结合的探究性问题,有利于培养学生在探究过程中增长知识、提高解决问题的能力。

二、三级训练,丰富实用

丛书编写对每章、每节知识重点凸现醒目,一课一练,一练三级。“基础达标”,“拓展创新”,“冲刺奥赛”,三级分步、三维整合,利用一些实际问题来巩固课堂学习内容;题型新颖、取材生动、设问灵活、拓展思维,既注重巩固学生所学基础知识,又引导学生提高用所学知识解决问题的能力,体现了教学改革命题新思想。

三、信息新颖,题量适中

为了适应日新月异的教材改革,编写人员紧跟时代步伐,力求使所选材料新颖、独特,语言准确、生动、有趣,融知识性、趣味性、创新性于一体。45分钟题量控制,题目难度合理搭配,使本丛书既适合随堂检测,也适合课后作业。

四、书卷搭配,方便实用

本丛书采用灵活的装帧设计,课堂练习册与单元测试卷搭配。练习册适合一课三练,巩固基础知识,提高基本能力,探究创新;单元测试卷每单元配套测试,网式训练,综合提高,是知识点横向结合的大检阅。

由于时间紧迫和编者水平所限,不妥之处,祈望读者不吝赐教,我们深表感谢!

编者

2005年4月

目 录

第一章 证明(二)	(1)	第四课时 三角形的中位线 ...	(48)
1.1 你能证明它们吗	(1)	3.2 特殊平行四边形	(52)
第一课时 等腰三角形的性质	(1)	第一课时 矩形的性质和判定	(52)
第二课时 等腰三角形的判定	(4)	第二课时 菱形的性质和判定	(56)
1.2 直角三角形	(7)	第三课时 正方形的性质和判定	(59)
第一课时 勾股定理与逆定理	(7)	第四章 视图与投影	(65)
第二课时 互逆命题、互逆定理	(11)	4.1 视图	(65)
1.3 线段的垂直平分线	(15)	4.2 太阳光与影子	(68)
1.4 角平分线	(19)	4.3 灯光与影子	(71)
第二章 一元二次方程	(23)	第五章 反比例函数	(75)
2.1 花边有多宽	(23)	5.1 反比例函数	(75)
2.2 配方法	(26)	5.2 反比例函数的图象与性质	(77)
2.3 公式法	(28)	5.3 反比例函数的应用	(83)
2.4 分解因式法	(31)	第六章 频率与概率	(89)
2.5 为什么是0.618	(34)	6.1 频率与概率	(89)
第三章 证明(三)	(38)	6.2 投针试验	(92)
3.1 平行四边形	(38)	6.3 生日相同的概率	(93)
第一课时 平行四边形的性质	(38)	6.4 池塘里有多少条鱼	(95)
第二课时 平行四边形的判定	(41)	参考答案	(97)
第三课时 等腰梯形的性质及判定	(45)		



第一章 证明(二)



整体把握

新课程标准

本章是初中几何中的基础内容,主要分四个部分。第一部分回顾了证明三角形全等的四个公理一个推论,然后在此基础上引出了等腰三角形的性质和判定以及对这些定理及公理的应用;第二部分介绍了勾股定理及逆定理和逆命题、互逆命题、逆定理、互逆定理的概念;第三部分引入了线段的垂直平分线的性质和判定;第四部分引入了角平分线的性质和判定。

本章的重点是以上各定理、公理的内容及综合运用去解决有关的几何问题,培养学生坚实的逻辑思维能力,为以后的继续学习奠定良好的基础。

1.1

你能证明它们吗

第一课时 等腰三角形的性质



课本知识精解

知识点睛

1. 重点、难点

(1) 判定两三角形全等的方法(SSS, SAS, ASA, AAS)。

(2) 等腰三角形的性质:等腰三角形两底角相等,简称:等边对等角。

(3) 推论1:等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合,即:三线合一。

推论2:等边三角形每个角都相等,并且每个角都等于 60° 。

例1: 已知:如图1-1-1所示,点D、E在 $\triangle ABC$ 的边BC上, $AB=AC$, $AD=AE$

求证: $BD=CE$

证明:作 $AF \perp BC$,垂足为F,则 $AF \perp DE$

$\because AB=AC, AD=AE$

(已知)

$AF \perp BC, AF \perp DE$ (辅助线作法)

$\therefore BF=CF, DF=EF$

(等腰三角形底边上的高与底边上的中线互相重合)

$\therefore BD=CE$

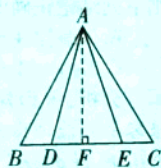


图1-1-1

强调说明:等腰三角形中的“三线合一”常常作为解决等腰三角形问题的辅助线,添加辅助线的时候,有时作顶角的平分线,有时作底边上的中线,有时作底边的高,有时作哪条线都可以,有时却不能,这要根据实际情况来定。

例2: 求证:等腰三角形两腰上中线的交点到底边两端点的距离相等。

分析:该题是文字证明题,常在理解题意的基础上首先画出图形,如图1-1-2所示。

要证 $OB=OC$,须证 $\triangle EOB \cong \triangle FOC$,而在这两个三角形中只知道 $\angle 1 = \angle 2$,所以需要寻找另外两个全等的条件,由已知的 $AB=AC$,E、F为中点,可证出 $BE=FC$,而 $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 相等的结论又需要证明 $\triangle EBC \cong \triangle FCB$,所以利用两次三角形全等,该问题就迎刃而解。

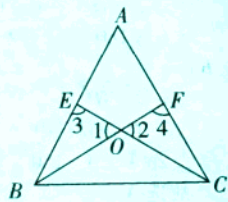


图1-1-2

证明:在 $\triangle EBC$ 与 $\triangle FCB$ 中, $\because AB=AC$,E、F为中点, $\therefore BE=FC$, $\angle EBC = \angle FCB$ (等腰三角形的两底角相等)又 $\because BC=BC$

$\therefore \triangle EBC \cong \triangle FCB$ (SAS) $\therefore \angle 3 = \angle 4$

在 $\triangle EOB$ 与 $\triangle FOC$ 中

$\because BE=FC$ (已证), $\angle 3 = \angle 4$ (已证), $\angle 1 = \angle 2$

$\therefore \triangle EOB \cong \triangle FOC$ (AAS)

$\therefore OB=OC$

$\therefore$ 等腰三角形两腰上中线的交点到底边两端点的距离相等。



2. 剖示考点

本节内容是初中几何的基础,在以后的学习中,经常需要用到本节知识去解决问题,也在本节定理基础上进一步推证出其他的一些定理,是几何问题中证明角相等的一种很重要的方法。

例:(2004,山东泰安)如图1-1-3所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BF=CD$, $BD=CE$, $\angle FDE=\alpha$,则下列结论正确的是 ()

- A. $2\alpha + \angle A = 180^\circ$ B. $\alpha + \angle A = 90^\circ$
C. $2\alpha + \angle A = 90^\circ$ D. $\alpha + \angle A = 180^\circ$

分析:由已知的条件很容易就能证出 $\triangle BFD \cong \triangle CDE$ 得到 $\angle 1 = \angle 2$ 。又因为 α 与 $\angle 1, \angle 3$ 构成平角,这样就把 α 角同 $\triangle BFD$ 中的内角联系起来,而 $\triangle BFD$ 中的内角又与 $\angle A$ 有着很密切的联系,从而可以找到 α 与 $\angle A$ 的关系。

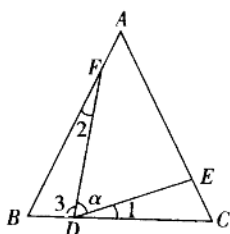


图1-1-3

解:在 $\triangle BFD$ 与 $\triangle CDE$ 中, $\because AB=AC$

$$\therefore \angle B = \angle C \quad \text{又} \because BF = CD, BD = CE$$

$$\therefore \triangle BFD \cong \triangle CDE (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\text{又} \because \alpha = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3)$$

$$\therefore \alpha = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ - (180^\circ - \angle B)$$

$$\therefore \alpha = \angle B$$

$$\text{又} \because \text{在} \triangle ABC \text{中}, \angle A + 2\angle B = 180^\circ$$

$$\therefore 2\alpha + \angle A = 180^\circ$$

故选A。

该题利用了三角形全等的判断定理,等腰三角形的性质定理,三角形的内角和定理,综合运用,望同学们在以后的学习中也要逐步强化训练这一点。



随堂演练

一、选择题

1. 如图1-1-4所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$,点D在AC上,且 $BD=BC=AD$,则 $\angle A$ 的度数为 ()

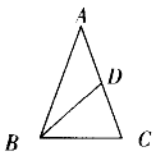


图1-1-4

- A. 30° B. 45° C. 36° D. 72°

2. 如图1-1-5所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BD=CD$, $\angle BAD=40^\circ$ 且 $AD=AE$,则 $\angle EDC =$ ()

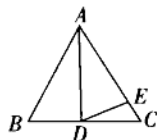


图1-1-5

- A. 10° B. 15° C. 20° D. 25°

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$,BD为 $\angle ABC$ 的角平分线,且 $\angle BDC=75^\circ$,则 $\angle BAC =$ ()

- A. 40° B. 30° C. 25° D. 20°

4. 如图1-1-6所示,已知 $AE=AC$, $DE=BC$, $\angle E = \angle ACB = 105^\circ$, $\angle B = 25^\circ$, $\angle DAC = 10^\circ$,则 $\angle DFB$ 的度数为 ()

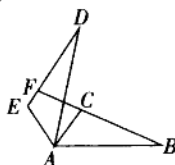


图1-1-6

- A. 60° B. 55° C. 50° D. 40°

二、填空题

5. 若等腰三角形的一个内角是 70° ,那么它的另外两个内角的度数是_____。

6. 若等腰三角形的一个内角是 100° ,那么它的另外两个内角的度数是_____。

7. 如图1-1-7所示,点B、D在AN上,C、E在AG上,且 $AB=BC=CD$, $EC=ED$, $\angle A=20^\circ$,则 $\angle EDN =$ _____。

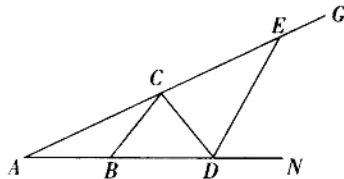


图1-1-7

8. 等边三角形的两中线相交所成的钝角是_____。

三、解答题

9. 如图1-1-8所示, $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于P点, $\angle BPC=134^\circ$,求 $\angle BAC$ 的度数。

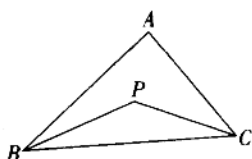


图 1-1-8

10. 如图 1-1-9 所示, 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AD = BE$, D 在 AB 上, E 在 BC 上, AE 、 CD 相交于 P , 求 $\angle CPE$ 的度数。

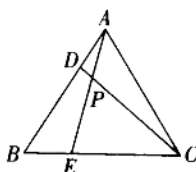


图 1-1-9



能力拓展迁移

学习方法探究

证明文字叙述的命题, 一般步骤是:

- (1) 根据题意画出图形。
- (2) 分析命题的题设和结论, 结合图形, 利用几何语言写出已知、求证。
- (3) 分析、探索证明途径, 写出证明过程。

例: 求证: 等腰三角形顶角相邻的外角的平分线平行于底边。

已知: 如图 1-1-10, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AE 是外角 $\angle CAD$ 的平分线。

求证: $AE \parallel BC$

证明: $\because \angle CAD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角

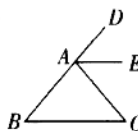


图 1-1-10

$$\therefore \angle CAD = \angle B + \angle C$$

$$\because AB = AC$$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\text{又} \because \angle DAE = \frac{1}{2} \angle DAC$$

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} (\angle B + \angle C) = \frac{1}{2} \times 2 \angle B = \angle B$$

$$\therefore AE \parallel BC$$

实践大验收

一、选择题

1. 下列命题中, 正确的是 ()
 A. 等腰三角形一定是锐角三角形
 B. 等腰三角形的腰长总大于底边长
 C. 等腰三角形的底角的外角一定是钝角
 D. 顶角相等的两个等腰三角形一定全等
2. 若等腰三角形的周长为 13 cm, 其中一边长为 3 cm, 则该等腰三角形的底边长为 ()
 A. 7 cm B. 3 cm
 C. 7 cm 或 3 cm D. 5 cm
3. 已知等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $BC = 8$ cm, 且 $|AC - BC| = 2$ cm, 则腰长 AC 为 ()
 A. 10 cm 或 6 cm B. 10 cm
 C. 6 cm D. 8 cm 或 6 cm
4. 如图 1-1-11 所示, 已知 $AB \perp BC$ 于 B , $AE \perp DE$ 于 E , $AB = AE$, $\angle ACB = \angle ADE$, $\angle ACD = \angle ADC = 70^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$, 则 $\angle BAE =$ ()

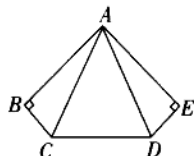


图 1-1-11

- A. 80° B. 120°
 C. 100° D. 以上答案都不对

二、填空题

5. 若等腰三角形两边长分别为 5 和 7, 那么这个三角形的周长为_____。

6. 如图 1-1-12, $AD : AB = 1 : 4$, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 且 $DE \parallel BC$, 如果 $BC = 8$ cm, 那么 $\triangle ADE$ 的周长等于_____ cm。

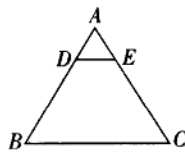


图 1-1-12

7. 如图 1-1-13 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AC, BC 上的点, 若 $\triangle ADB \cong \triangle EDB \cong \triangle EDC$, 则 $\angle C$ 的度数为_____。

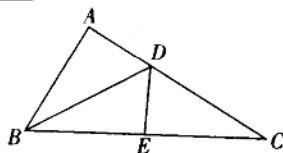


图 1-1-13



8. 如图 1-1-14 所示, C 为线段 AB 上的一点, 分别以 AC 、 CB 为一边作等边 $\triangle ACD$ 和等边 $\triangle CBE$, AE 交 CD 点 M , BD 交 CE 于点 N , 则 $\angle CNM =$ _____。

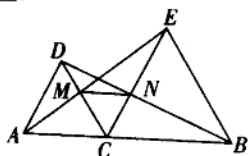


图 1-1-14

三、解答题

9. 已知: 如图 1-1-15 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BD 是 AC 边上的高。

求证: $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle A$

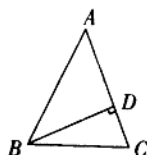


图 1-1-15

10. 求证: 等腰三角形底边中点到两腰的距离相等。

11. 如图 1-1-16 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 2\angle C$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D 。

求证: $AB + BD = AC$

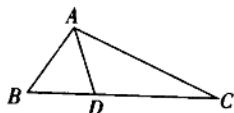


图 1-1-16

中考链接

1. (2004, 福建省福州) 等腰三角形的一个角是 120° , 那么另外两个角分别是 _____ ()

- A. $15^\circ, 45^\circ$ B. $30^\circ, 30^\circ$
C. $40^\circ, 40^\circ$ D. $60^\circ, 60^\circ$

2. (2004, 江苏省苏州市) 若等腰三角形的腰长为 4, 底边长为 2, 则其周长为 _____。

3. (2004, 山东省聊城市) 如图 1-1-17, D 是等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内一点, BC 是斜边, 如果将 $\triangle ABD$ 绕

点 A 按逆时针方向旋转到 $\triangle ACD'$ 的位置, 则 $\angle ADD'$ 的度数是 _____ ()

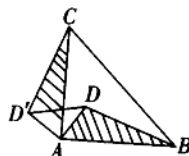


图 1-1-17

- A. 25° B. 30°
C. 35° D. 45°

第二课时 等腰三角形的判定



知识点睛

1. 重点、难点

(1) 有两个角相等的三角形是等腰三角形 (等角对等边)。

(2) 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形。

(3) 三个角都相等的三角形是等边三角形。

(4) 在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半。

另外, 在本节中还引入了反证法的应用。这也是解决数学问题的一种常用的思维方式。

难点是: 等腰三角形的性质与判定的区别以及它们的综合运用。

例 1: 如图 1-1-18 所示, $AB = AC$, $AD \perp AC$, $\angle BAD = 30^\circ$, $AD = 4 \text{ cm}$ 。

求: BC 的长

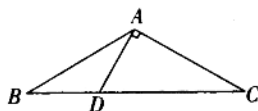


图 1-1-18

分析: 线段 BC 是 $\triangle ABC$ 的一条边, 但是该三角形中已知的唯一条件是 $AB = AC$, 不足以求出 BC 的长度。所以可考虑分开来求, 只需要分别求出 BD 和 DC 的长度即可。由已知可知 $\angle BAC$ 为 120° , 从而可得 $\angle C$ 为 30° , 便可以在 $\text{Rt}\triangle DAC$ 中运用本节所学的定理求出 CD , 在 $\triangle ABD$ 中求出 BD 。



解: $\because AC \perp AD$

$\therefore \angle DAC = 90^\circ$

又 $\because \angle BAD = 30^\circ$

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$

又 $\because AB = AC$

$$\therefore \angle C = \angle B = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

在 $Rt\triangle ADC$ 中, $AD = 4$ cm, $\angle C = 30^\circ$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}CD \text{ 即 } CD = 2AD = 8 \text{ cm}$$

在 $\triangle ABD$ 中,

$\because \angle B = \angle BAD = 30^\circ$

$\therefore BD = AD = 4$ cm (等角对等边)

$$\therefore BC = BD + CD = 4 + 8 = 12 \text{ cm}$$

例 2: 证明在任意三角形中,不可能有两个角是直角。

分析: 这是一个文字命题的证明,若按照文字证明题的常用步骤写出已知、求证,从正面入手的话很难解决,所以我们要采用从问题的反面入手,也就是采用反证法来证明,反证法有特定的证明格式,大家应通过本例去体会并逐步掌握这种固定的证明格式。

证明: 假设在 $\triangle ABC$ 中有两个角是直角,不妨令 $\angle B = \angle C = 90^\circ$, 则: $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ + \angle A > 180^\circ$

这与三角形的内角和定理相矛盾,所以假设不成立。

所以在任意三角形中,不可能有两个角是直角。

2. 剖示考点

本节内容是必考内容,也是初中几何的基础,掌握本节知识,将会为下一步的学习:如相似形、圆、四边形等打下良好的基础,是证明线段相等以及求线段的长度的一种常用方法。

例: (2004, 四川资阳) 如图 1-1-19 所示,在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 5$ cm, BP 、 CP 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线,且 $PD \parallel AB$, $PE \parallel AC$, 则 $\triangle PDE$ 的周长是 _____ cm。

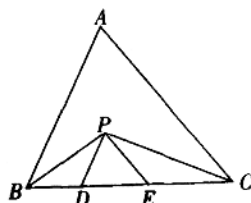


图 1-1-19

分析: $\triangle PDE$ 的周长为: $BD + PE + DE$, 若根据已知条件将这三条线段的长一一求出来是不可能的,所以可考虑线段之间的等量代换。利用已知条件不难求出 $PD = BD$, $PE = EC$, 从而将 $PD + PE + DE$ 转化为: $BD + DE + EC$ 即线段 BC 。从而得解。

解: $\because BP$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线

$$\therefore \angle ABP = \angle PBD$$

又 $\because PD \parallel AB \therefore \angle ABP = \angle BPD$

$$\therefore \angle PBD = \angle BPD \therefore PD = BD$$

同理可证: $PE = EC$

所以 $\triangle PDE$ 的周长: $PD + PE + DE = BD + EC + DE = BC = 5$ cm。



随堂演练

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle B = 36^\circ$, AD 、 AE 是 $\angle A$ 的三等分线,与 BC 分别交于 D 、 E (如图 1-1-20 所示), 则等腰三角形的个数是 ()

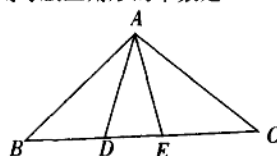


图 1-1-20

- A. 8 个
C. 4 个

- B. 6 个
D. 2 个

2. 如果三角形一边上的中线也是这边上的高, 那么这个三角形一定是 ()

- A. 直角三角形
C. 等腰三角形

- B. 等边三角形
D. 等腰直角三角形

3. 如图 1-1-21 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $\angle BAC$ 的平分线 AF 交 CD 于 E , 交 BC 于 F , 则 $\triangle CEF$ 必为 ()

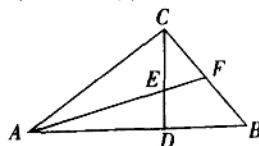


图 1-1-21

- A. 等腰三角形
C. 直角三角形

- B. 等边三角形
D. 等腰直角三角形

4. 若三角形 ABC 三边长为 a, b, c , 且满足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ 那么该三角形一定是 ()



- A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形

二、填空题

5. 有一个角是 60° 的 _____ 是等边三角形。

6. 直角三角形的一条直角边的长为 8 cm, 若它的对角为 60° , 则斜边上的高等于 _____。

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, CD 是 AB 边上的高, CE 为 AB 边上的中线, $BC = 12$ cm, 则 $DE =$ _____。

8. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC$, CD , CE 分别是斜边上的中线和 high 线, 则 $\angle DCE =$ _____ 度。

三、解答题

9. 已知: 如图 1-1-22 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $\angle A$ 的平分线 AE 交 CD 于 F , 交 CB 于 E 。

求证: $CE = CF$

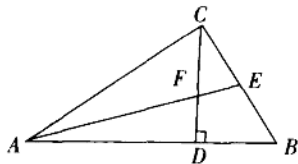


图 1-1-22



能力拓展迁移

学习方法探究

在几何问题当中, 若具有“角平分线”与“平行线”的条件, 常常可以找到等腰三角形, 从而利用等腰三角形的性质来解决问题。

例: 如图 1-1-23 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$, $\angle C$ 的平分线相交于点 O , 过点 O 的直线 $MN \parallel BC$, 分别交 AB , AC 于点 M , N , 求证: $MN = BM + CN$

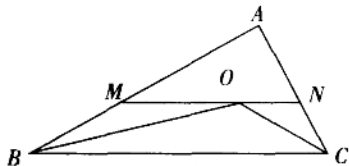


图 1-1-23

分析: 要证 $MN = BM + CN$, 可先把 MN 分成 OM 与 ON 的和, 结合已知条件可得 $BM = OM$, $CN = ON$, 则 $MN = BM + CN$

证明: $\because MN \parallel BC$

$$\therefore \angle BOM = \angle OBC$$

又 $\because BO$ 平分 $\angle MBC$

$$\therefore \angle MBO = \angle OBC$$

$$\therefore \angle MBO = \angle BOM$$

$$\therefore BM = MO$$

同理可证 $CN = NO$

$$\therefore MN = MO + ON = BM + CN$$

实践大验收

一、选择题

1. 若在等腰三角形中, AB 的长是 BC 长的 2 倍, 三角形的周长是 40, 则 AB 的长为 ()

- A. 20 B. 16
C. 20 或 16 D. 以上都不对

2. 如图 1-1-24 所示, $PM = PN$, MQ 为 $\angle PMN$ 的角平分线, 若 $\angle MQN = 72^\circ$ 则 $\angle P$ 的度数是 ()

- A. 18° B. 36°
C. 48° D. 60°

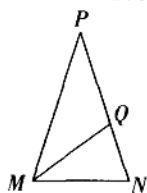


图 1-1-24

3. 已知三角形三内角满足: $\angle A = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{3} \angle C$, 它的最短边为 5, 则此三角形的面积为 ()

- A. 20 B. $10\sqrt{3}$
C. $5\sqrt{3}$ D. $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别是 a , b , c 且 $c + a = 2b$, $c - a = \frac{1}{2}b$, 那么 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 直角三角形 B. 等边三角形
C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形

二、填空题

5. 等边三角形的边长为 $2a$, 则它的面积是 _____。

6. 如图 1-1-25 所示, 已知 $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm, 现将直角三角形的边 AC 沿直线 AD 对折, 使它落在斜边 AB 上, 且与 AE 重合, 则 CD 等于 _____。

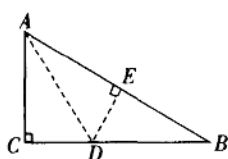


图 1-1-25

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = AC$, D 为 BC 上一点, 过 D 作 $DE \parallel AB$ 交 AC 于 E , 作 $DF \parallel AC$ 交 AB 于 F , 则四边形 $AFDE$ 的周长与 $\triangle ABC$ 的周长之比为_____。

8. 在等腰三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$ cm, 如果以 AC 的中点 O 为旋转中心, 将这个三角形旋转 180° , 点 B 落在点 B' 处, 那么点 B 与点 B' 的距离为_____ cm。

三、解答题

9. 如图 1-1-26 所示, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $BE \perp AD$, 交 AD 的延长线于 E , $EF \parallel AC$, 交 AB 于 F , 求证: $AF = FB$

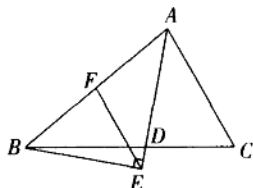


图 1-1-26

10. 如图 1-1-27 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CE 平分 $\angle ACB$, D 是 BA 的中点, $DE \perp AB$ 于 D 交 CE 于 E , 求证: $DE = \frac{1}{2} AB$

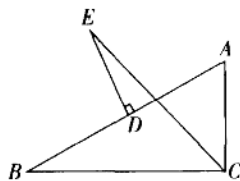


图 1-1-27

11. 已知: 如图 1-1-28 所示, 在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$, $\angle B$ 的平分线交 AC 于 E , 求证: $AE + BE = BC$

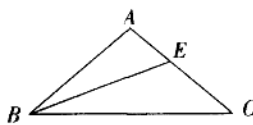


图 1-1-28

中考链接

1. (2003, 福建泉州)

如图 1-1-29 所示, 在四个正方形拼接成的图形中, 以这十个点中任意三点为顶点, 其能组成_____个等腰直角三角形, 你愿意把得到上述结论的探究方法与他人交流吗? 若愿意, 请在下方简要写出你的探究过程。

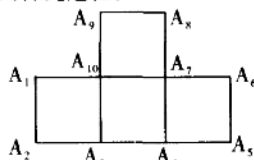


图 1-1-29

2. (2003, 重庆)

如图 1-1-30 所示, $\triangle ABP$ 和 $\triangle CDP$ 是两个全等的等边三角形, 且 $PA \perp PD$, 有下列四个命题: ① $\angle PBC = 15^\circ$ ② $AD \parallel BC$ ③ 直线 PC 与 AB 垂直 ④ 四边形 $ABCD$ 是轴对称图形, 其中正确结论的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

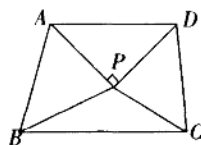


图 1-1-30

1.2 直角三角形

第一课时 勾股定理与逆定理



知识点睛

课本知识精解

1. 重点、难点

(1) 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方。

(2) 如果三角形两边的平方和等于第三边的平方



方,那么这个三角形是直角三角形。

难点是要正确运用勾股定理及其逆定理进行证明或计算。

勾股定理是用来求线段长的一种常用方法,但是必须有一个使用前提,那就是要在直角三角形中。而它的逆定理是用来判断一个角是否为直角的一种重要方法。

例1: 已知:如图1-2-1所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=15, BC=14, AC=13$ 求 $S_{\triangle ABC}$

分析: 要求 $\triangle ABC$ 的面积,关键是求 $\triangle ABC$ 一边上的高,不妨作 BC 边上的高 AD ,可构造出两个直角三角形 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle ACD$,其中 AD 为这两个直角三角形的公共边,运用勾股定理即可求出高 AD ,从而得到 $\triangle ABC$ 的面积。

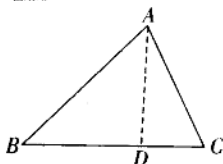


图1-2-1

解: 作 BC 边上的高 AD ,设 $BD=x$

则 $CD=BC-BD=14-x$

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $AD^2=AB^2-BD^2=15^2-x^2$

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $AD^2=AC^2-CD^2=13^2-(14-x)^2$

$$\therefore 15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2$$

解这个方程得 $x=9$

$$\therefore AD = \sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$$

注: 本题通过作高,把一般三角形转化为直角三角形,适当的情况下引入未知数,建立方程或方程组,不仅可以简化推理计算过程,还可以使一些难以解决的问题得解。

例2: 如图1-2-2所示,在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 中点, F 为 AD 上一点,且 $AF = \frac{1}{4}AD$

求证: $\triangle FEC$ 是直角三角形

分析: 利用勾股定理的逆定理,只要证出 $\triangle FEC$ 的三边满足两边的平方和是第三边的平方即可。

证明: 设正方形边长为 $4a$,则 $AE=EB=2a, AF=a, FD=3a$

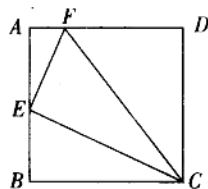


图1-2-2

$$\text{在 } Rt\triangle AFE \text{ 中, } EF^2 = AE^2 + AF^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCE \text{ 中 } CE^2 = 20a^2$$

$$\text{在 } Rt\triangle CDF \text{ 中 } CF^2 = 25a^2$$

$$\text{所以: } EF^2 + CE^2 = CF^2$$

所以: $\triangle FEC$ 是直角三角形。

说明: 在分析问题时,由于正方形边长相等,所以可引入未知数 a 来代替正方形的边长,但为了避免在运算过程中出现分数,故设正方形边长为 $4a$,这样可使问题得到简化。

2. 剖示考点

勾股定理在整个初中几何知识中应用非常广泛。是求线段长度的一种重要手段,逆定理仅仅依据三边的长度之间的数量关系就可以对一个三角形是否是直角三角形做出判断,而不必计算角的大小,是初中几何的必考知识。

例: (2004,安徽)如图1-2-3所示, $AD \perp CD, AB=10, BC=20, \angle A = \angle C = 30^\circ$,求 AD, CD 的长

分析: 由于图中没有三角形,所以在求 AD, CD 长时非常困难,因此需要作辅助线以构造三角形,从而利用三角形的有关定理去解决。

解: 延长 AB 交 CD 于 F ,过 B 作 $BE \perp CD$,垂足为 E ,设 BF 的长为 x

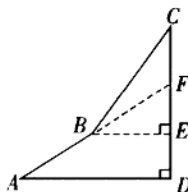


图1-2-3

$$\therefore AD \perp CD, BE \perp CD$$

$$\therefore BE \parallel AD$$

$$\therefore \angle FBE = \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} BF = \frac{x}{2}$$

$$\text{在 } Rt\triangle CBE \text{ 中, } \therefore \angle C = 30^\circ$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 20 = 10$$

在 $Rt\triangle BEF$ 中:

$$BE^2 + EF^2 = BF^2, \text{即 } 10^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \text{ 解得: } x =$$

$$\frac{20}{3}\sqrt{3}$$

$$\therefore AF = AB + BF = 10 + \frac{20}{3}\sqrt{3}$$

在 $Rt\triangle AFD$ 中

$$\therefore \angle A = 30^\circ \therefore DF = \frac{1}{2} AF = 5 + \frac{10}{3}\sqrt{3}$$

$$AD = \sqrt{AF^2 - DF^2} = 10 + 5\sqrt{3}$$

$$\text{又} \therefore \angle CBE = 60^\circ, \angle FBE = \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle CBF = \angle C = 30^\circ$$

$$\therefore FB = FC = \frac{20}{3}\sqrt{3}$$

$$\therefore CD = FC + DF = \frac{20}{3}\sqrt{3} + 5 + \frac{20}{3}\sqrt{3} = 5 + 10\sqrt{3}$$



随堂演练

一、选择题

- 下列命题中错误的是 ()
A. 直角三角形中,任意直角边上的中线小于斜边
B. 等腰直角三角形斜边上的高等于斜边长的一半
C. 到直角三角形三顶点距离相等的点一定是斜边的中点
D. 有两个锐角对应相等的两个直角三角形全等
- 下列各组数据分别是三角形的三边长,能构成直角三角形的一组是 ()
A. 5, 12, 13 B. 2, 2, 3
C. 2, $\sqrt{5}$, 4 D. 7, 6, 9
- 若三角形三个内角的度数比为 1 : 2 : 3, 则此三角形三个内角对边的比为 ()
A. 1 : 2 : 3 B. 3 : 2 : 1
C. 1 : $\sqrt{3}$: 2 D. 无法确定
- 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $(a-c)(a^2+b^2-c^2)=0$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()
A. 等腰三角形
B. 直角三角形
C. 等腰直角三角形
D. 等腰三角形或直角三角形

二、填空题

- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=17$ cm, $BC=16$ cm, 则高 $AD=$ _____, $S_{\triangle ABC}=$ _____.
- 已知直角三角形的两条直角边为 1 和 $2\sqrt{2}$, 则斜边上的高为 _____.
- 已知: $|x-12| + \sqrt{z-13} + (y^2-10y+25)=0$, 则以 x, y, z 为三边的三角形是 _____ 三角形.
- 一个直角三角形的三条边长为连续的自然数, 则这三个数为 _____.

三、解答题

- 如图 1-2-4 所示, $\angle DCB = \angle B = 90^\circ$, $AB=20$, $AD=16$, $CD=12$
求: ① $\angle DAB$ 的度数
② BC 的长
③ AC 的长

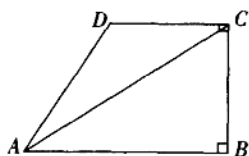


图 1-2-4

- 如图 1-2-5 所示: 四边形 $ABCD$, $AB=3$ cm, $AD=4$ cm, $\angle A=90^\circ$, $BC=13$ cm, $CD=12$ cm, 求四边形 $ABCD$ 的面积

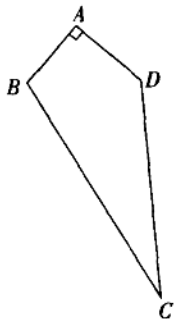


图 1-2-5



能力拓展迁移

学习方法指导

勾股定理把形的特征转化成数量关系, 逆定理是把数量关系转化为形的特征, 这两个定理把数与形密切联系起来, 更进一步体现了数学学科“数形结合”的思想。

例: 如图 1-2-6 所示, 一架 2.5 m 长的梯子 AB 斜靠在一竖直的墙 AC 上, 这时梯足 B 到墙底端 C 的距离是 0.7 m, 如果梯子的顶端沿墙下滑了 0.4 m, 那么梯足将外移多少 m?

分析: 运用勾股定理求出 AC 的长, 则易求 A_1C 的长度, 然后在 $Rt\triangle A_1B_1C$ 中, 运用勾股定理求出 B_1C (梯子在下滑过程中长度是不变的), 从而求出 B_1B .

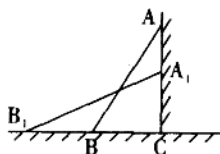


图 1-2-6

解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中 $AB=2.5$, $BC=0.7$, $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{2.5^2-0.7^2}$



=2.4

在 $\text{Rt}\triangle A_1B_1C$ 中, $A_1C = AC - AA_1 = 2.4 - 0.4 = 2$ $\therefore A_1B_1 = AB = 2.5$ $\therefore B_1C = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C^2} = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5$ $\therefore BB_1 = B_1C - BC = 1.5 - 0.7 = 0.8$

答:梯足将外移 0.8 m。

说明:本题十分切合实际,在思考过程中,同学们往往会有种错觉,会认为梯子下滑 0.4 m 则梯足会外移 0.4 m。事实上,经过严格的几何推理,证实这种想法是错误的,本题告诉我们:一个问题的结论正确与否,一定要通过严密的科学论证才能得出结论,不能想当然。

实践大验收

一.选择题

1. 若三角形的三边长 a, b, c 满足 $(a+b)^2 - c^2 = 2ab$, 则此三角形为 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 等边三角形

2. 若一直角三角形的两边长分别为 12 和 5, 则第三边长为 ()

- A. 13 B. 13 或 $\sqrt{119}$
C. 13 或 15 D. 15

3. 已知三角形三内角 $\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$, 它的最短边为 5, 则此三角形的面积为 ()

- A. 20 B. $10\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $\frac{25}{2}\sqrt{3}$

4. 如图 1-2-7, AD 是 $\triangle ABC$ 边 BC 的中线, $\angle ADC = 45^\circ$, 把 $\triangle ADC$ 沿直线 AD 翻折, 使 C 落在 C' 的位置, 若 $BC = 4$, 则 BC' 长为 ()

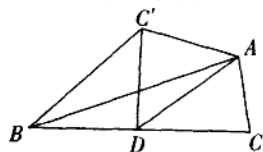


图 1-2-7

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 不可求

二.填空题

5. 高为 a 的等边三角形的面积等于_____。

6. 已知三角形的三边长分别为 $n^2 - 1$, $2n$ 和 $n^2 + 1$ ($n > 1$) 则此三角形是_____三角形。

7. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$, $AC = 5$, 则 $BC =$ _____, 面积为_____, AB 边上的高为_____。

8. 如图 1-2-8 所示, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABD = 90^\circ$, 若 $AB = 3$, $BC = 5$, 则 $S_{\square ABCD} =$ _____。

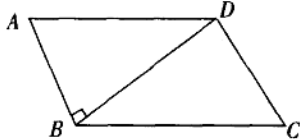


图 1-2-8

三.解答题

9. 如图 1-2-9 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D, E 分别是 BC, AC 的中点, $AD = 5$, $BE = 2\sqrt{10}$, 求 AB

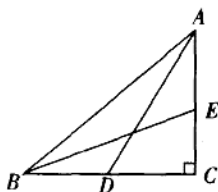


图 1-2-9

10. 求证: $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ (m, n 是自然数且 $m > n$) 是直角三角形的三条边。

11. 如图 1-2-10 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, 且 $AE \perp BC$ 于 E , 若 $AB = 12$, $BC = 10$, $AC = 8$

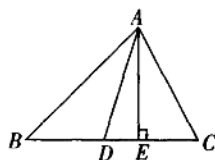
求: DE 的长

图 1-2-10

中考链接

1. (2004, 山东烟台) 如图 1-2-11 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 3$, 将 BC 向 BA 方向折过去, 使点 C 落在 BA 上的 C' 点, 折痕为 BE , 则: $C'E$ 的长是_____。

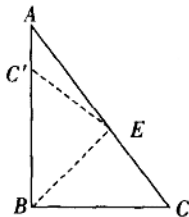


图 1-2-11



2. (2003, 山东烟台) 细心观察图形 (如图 1-2-12 所示) 认真分析各式, 然后解答下列各问题:

$$(\sqrt{1})^2 + 1 = 2 \quad s_1 = \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$(\sqrt{2})^2 + 1 = 3 \quad s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\sqrt{3})^2 + 1 = 4 \quad s_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

.....

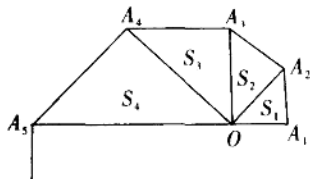


图 1-2-12

(1) 请用含有 n (n 为正整数) 的等式表示上述变化规律。

(2) 推算出 OA_{10} 的长

(3) 求出 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_m^2$ 的值。

第二课时 互逆命题、互逆定理



知识点睛

1. 重点、难点

(1) 理解互逆命题和互逆定理的联系和区别, 一个命题一定有逆命题, 而一个定理不一定有逆定理, 逆命题不一定是真命题, 而逆定理一定是真命题, 并且可以用来做为几何问题推理的依据, 互逆命题不一定是互逆定理, 而互逆定理一定是互逆命题。

(2) 本节还引入了一种证明两直角三角形全等的方法: 斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等 (简称 HL)。

例 1: 已知: 如图 1-2-13 所示, 若 $AD \perp DB$, $BC \perp CA$, AC, BD 相交于点 O , 且 $AC = BD$

求证: $AD = BC$

证明: $\because AD \perp DB, BC \perp CA$

$\therefore \triangle ADB$ 和 $\triangle BCA$ 都是直角三角形

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle BCA$ 中

$$\begin{cases} BD = AC \\ AB = BA \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle BCA (\text{HL})$$

$$\therefore AD = BC$$

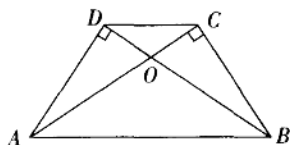


图 1-2-13

说明: 直角三角形是特殊的三角形, 所以除了可用一般三角形全等的判定方法以外, 还要注意“HL”的使用, 也就是说, 对于直角三角形共有四种证明全等的方法, 即: SSS, SAS, ASA, HL, 至于选择哪一种判定方法来解决具体问题, 还要根据具体题目的已知条件去确定。但是必须注意一点: HL 只适用于直角三角形, 而对于一般的三角形是不适用的。

例 2: 写出定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的逆命题, 并判断真假。

分析: 所要写的逆命题是判定一个三角形是否为直角三角形的一种方法, 因此在题设中不能把直角三角形当作条件。并且在逆命题的叙述中, 结论应是判断一个三角形是否是直角三角形, 所以在题设中不能出现“斜边”的说法。

解: 逆命题是: 如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半, 那么这个三角形是直角三角形。该命题是真命题。

说明: 一般情况下, 若所给命题中没有“如果”“那么”关联词, 在写它们的逆命题时, 若能添上“如果”“那么”, 则所写的逆命题中题设与结论会层次分明, 命题真假易辨。

2. 剖示考点

中考对本课时的要求是: ①能正确地分析命题的题设和结论, 并能构造一个命题的逆命题, 并做到运用几何推理和举反例的方法来推断命题的真假性。②能正确分析问题并适时地选择“HL”去证明两个直角三角形全等。

例: (2004, 无锡) 如图 1-2-14 所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, BD 是对角线, $AE \perp BD$ 于 E , $CF \perp BD$ 于 F

求证: $BE = DF$

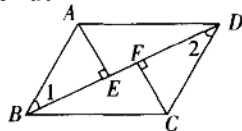


图 1-2-14



解法一:

分析:若证明 $BE = DF$, 只须证 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.
 因为已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 易得出: $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ 得证.

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 $\therefore AB = CD$, 且 $AB \parallel CD$ $\therefore \angle 1 = \angle 2$ 在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 中 $\begin{cases} \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AB = CD \end{cases}$ $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ $\therefore BE = DF$

解法二:

分析:若连接 AC , 如图 1-2-15, 易证: $\triangle AOE \cong \triangle COF$, 从而可得 $AE = CF$, 然后在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 与 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中使用“HL”证明全等, 得证.

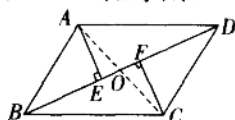


图 1-2-15

证明: 连结 AC 交 BD 于 O $\because \square ABCD$ $\therefore OA = OC$, $AB = CD$, 在 $\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$ 中
$$\begin{cases} \angle AEO = \angle CFO = 90^\circ \\ \angle AOE = \angle COF \\ OA = OC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ $\therefore AE = CF$ 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 与 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中
$$\begin{cases} AE = CF \\ AB = CD \end{cases}$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle CDF (\text{HL})$ $\therefore BE = DF$

同学们, 你还能用其他方法来证明吗? 试一下。



随堂演练

一. 选择题

1. 下列命题中, 假命题是 ()

A. 三个角的度数之比为 $1:3:4$ 的三角形是直角三角形B. 三个角的度数之比为 $1:\sqrt{3}:2$ 的三角形是直角三角形C. 三边长之比为 $1:\sqrt{3}:2$ 的三角形是直角三角形D. 三边长之比为 $\sqrt{2}:\sqrt{2}:2$ 的三角形是直角三角形

2. 下列命题中, 真命题是 ()

A. 若 $a^2 = b^2$ 则 $a = b$

B. 任意一个数的平方都是正数

C. 任意一个数的倒数一定小于这个数

D. 若 $a^2 = b^2$ 则 $\sqrt{1a} = \sqrt{1b}$

3. 下列命题中, 正确的是 ()

A. 斜边对应相等的两个等腰直角三角形全等

B. 有一条边相等的两个等腰直角三角形全等

C. 有一条边和一个角对应相等的两个等腰直角三角形全等

D. 有一边和这边上的中线对应相等的两个 $\text{Rt}\triangle$ 全等

4. 下列命题中是真命题的有 ()

① 周长相等的两个直角三角形全等

② 腰长对应相等的两个等腰三角形全等

③ 有一边和一角对应相等的两个直角三角形全等

④ 成轴对称的两个三角形全等

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二. 填空题

5. “等腰三角形两腰上的高相等”的逆命题是

6. “直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方”的逆命题是 _____, 该逆命题是 _____。(填“真”或“假”命题)

7. 如图 1-2-16 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, 要证 $CE = BD$, 只须再加一个适当的条件 _____ 或 _____ 或 _____ 即可。

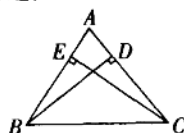


图 1-2-16

8. 如图 1-2-17 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B$ 的平分线交 AC 于 D , $DE \perp AB$ 于 E , $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, 则 $\triangle ADE$ 的周长为 _____。

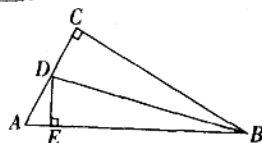


图 1-2-17