巧思巧解

QIAOSIQIAOJIE

数学

高中一年级

广西教育出版社

巧思巧解

QIAOSIQIAOJIE

数学

高中一年级

陈矿初
曾　平　编著
谭　洁

广西教育出版社

巧思巧解丛书
数学
高中一年级
陈矿初　曾平　谭洁　编著
☆
广西教育出版社出版
南宁市鲤湾路 8 号
邮政编码：530022　电话：0771－5865797
本社网址　http：//www.gep.com.cn
读者电子信箱　master@gep.com.cn
全国新华书店经销　广西民族语文印刷厂印刷
*
开本 890×1240　1/32　8.875 印张　224 千字
2005 年 3 月第 1 版　　2005 年 8 月第 2 次印刷
印数：5 001—10 000 册
ISBN 7－5435－4114－9/G・3266　定价：16.00 元
如发现印装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换

前　言

中学代数是中学阶段学生重要的数学学习内容，它涉及若干数学分支的基础部分. 本书的核心内容是高一数学中的函数、三角、数列、向量等. 这些知识涉及面广，内容多，问题错综复杂，变化多，学生不易掌握.

为了帮助广大学生学好高中一年级数学知识，开拓思路，沟通各学科之间的联系，提高分析问题和解决问题的能力，我们根据新教材的要求，结合我们多年的教学经验和积累，精选一批富有思考性、代表性及多解性的典型范例，编写了这本书，奉献给广大读者. 希望它能成为广大中学生和自学青年加深学习的良师益友，成为中学教师指导学生学习不可缺少的参考资料.

本书的特点是着眼于高一数学中各部分内容的典型的常规方法，并同时挖掘问题的本质，从多角度"追踪"，探索规律，提高解题的技巧. 为了帮助读者加深理解，在各种解法前，阐明采用这些方法的动机和想法；每道题解答后都有简评，评价各种解法的优劣与关键，并总结解题规律；在每单元后附有练习，供广大读者巩固、提高之用，书末附有练习的提示与答案，供大家对照与参考.

希望读者在阅读此书时，首先应独立思考，然后再与书中的解法进行比较，以琢磨出最佳解法，提高解题能力.

作　者

目 录

一、集合与简易逻辑

(一)集合

1. **已知全集** $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$M\subseteq U$，$N\subseteq U$，**且** $M\cap N=\{3\}$，$(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$，$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{2,6\}$. **求集合** M、N.

思路 1 本题是研究集合的交、并、补三种运算，可通过交、并、补集的定义判断元素与集合的从属关系，从而使问题获解.

解法 1 $\because$ $M\cap N=\{3\}$，

$\therefore$ $3\in M$；$3\in N$.

$\because$ $(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$，

$\therefore$ $1,7,8\notin M$；$1,7,8\in N$.

又 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{2,6\}$，

$\therefore$ $2,6\notin M$；$2,6\notin N$.

下面考虑余下的元素 4,5 是否属于 M,N.

若 $4\in N$，则因为 $4\notin M\cap N$，所以 $4\notin M$，即 $4\in(\complement_U M)$，则 $4\in(\complement_U M)\cap N$，这与 $(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$ 相矛盾，故 $4\notin N$.

又 $4\notin(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$，

$\therefore$ $4\notin(\complement_U M)$，即 $4\in M$.

同理可得 $5\in M$，$5\notin N$.

故 $M=\{3,4,5\}$，$N=\{1,3,7,8\}$.

思路 2 本题可利用文氏图求解. 集合 M,N 将全集 U 分成如图

1 所示的①、②、③、④四个部分，然后根据题设条件确定这四个部分所含的元素.

解法 2 如图 1 所示，集合 M,N 将全集分成①、②、③、④四部分.

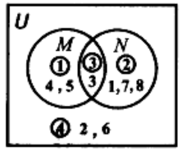

图 1

由 $M\cap N=\{3\}$，知③中含有 3；

由 $(\complement_U M)\cap N=\{1,7,8\}$，知②中含有 1,7,8；

由 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\complement_U(M\cup N)=\{2,6\}$，知④中含有 2,6；

余下的 4,5 只能在①中.

故　$M=\{3,4,5\}$，$N=\{1,3,7,8\}$.

通过集合的交、并、补求集合，一般用分析法（如解法 1）找出集合中一定含有或一定不含有的元素，然后再对余下元素逐个加以分析判断它的从属关系；利用文氏图进行集合运算（如解法 2）是解决集合问题的一种行之有效的重要方法，这种数形结合的思想方法既直观，又简捷.

2　**已知集合** $A=\{1,x,y\}$，$B=\{x,x^2,xy\}$，**且** $A=B$，**求实数** x,y **的值.**

思路 1 由条件 $A=B$ 可知：集合 A,B 中的元素相同，从而布列方程组进行求解. 根据集合元素的互异性对所求得的结果进行判断.

解法 1 ∵　$A=B$，

$$\therefore \begin{cases} x^2=1, \\ xy=y; \end{cases} ① \quad 或 \begin{cases} x^2=y, \\ xy=1. \end{cases} ②$$

$$解①，得 \begin{cases} x=1, \\ y\in \mathbf{R}; \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$$

当$\begin{cases}x=1,\\y\in\mathbf{R}\end{cases}$时，集合 A,B 中的元素不互异，所以$\begin{cases}x=1,\\y\in\mathbf{R}\end{cases}$不符合题意，舍去；

当$\begin{cases}x=-1,\\y=0\end{cases}$时，集合 A,B 中的元素互异，所以$\begin{cases}x=-1,\\y=0\end{cases}$符合题意.

解②，得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

当$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$时，集合 A,B 中的元素不互异，所以$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$不符合题意，舍去.

$\therefore\quad x=-1,y=0.$

思路 2 因为集合 A 中的 3 个元素与集合 B 中的 3 个元素相同，所以 A 中元素的和等于 B 中元素的和，A 中元素的积等于 B 中元素的积，从而布列方程组进行求解. 注意检验同一集合中的元素是否互异.

解法 2 $\because\quad A=B$,

$$\therefore\quad \begin{cases}1+x+y=x+x^2+xy,\\1\cdot x\cdot y=x\cdot x^2\cdot xy.\end{cases}$$

$$即\quad \begin{cases}(x-1)(x+y+1)=0, & ①\\xy(x^3-1)=0. & ②\end{cases}$$

由②得 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $y=0$.

根据集合元素的互异性，得 $x\neq0$ 且 $x\neq1$.

$\therefore\quad y=0.$

把 $y=0$ 代入①，得 $x=-1$.

故 $x=-1,y=0$.

解法 1 是根据“如果两个集合相等，则它们的元素完全相同”，列出关于 x,y 的方程组进行求解；解法 2 是根据“如果两个集合相等，则它们元素的和与积分别相等”，列出了关于 x,y 的方程组进行求解. 其中解法 2 避免了解法 1 中的分类讨论.

3. 集合 $A=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{y \middle| y=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则(　　).*

(A)$A\subsetneqq B$　(B)$A\supsetneqq B$　(C)$A=B$　(D)$A\cap B=\varnothing$

思路 1　将 k 的若干数值代入集合 A,B，列举出集合 A,B 的部分元素，进行观察分析，从而得出结论.

解法 1　令 $k=\cdots,-1,0,1,2,3,\cdots$ 代入集合 A，

得　$A=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\}$.

令 $k=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots$ 代入集合 B，

得　$B=\left\{\cdots,-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4},\cdots\right\}$.

经观察，得 $A\subsetneqq B$，故选(A).

思路 2　因集合 A,B 中的元素表示的是角，所以可在直角坐标系中，以原点为角的顶点，x 轴的正半轴为角的始边，作出集合 A,B 中所有角的终边，然后进行观察、判断，得到结论.

解法 2　在直角坐标系中，集合 A 中的角的终边分别落在各象限的角平分线上，如图 2 所示；

在直角坐标系中，集合 B 中的角的终边分别落在各象限的角

* 本书所有选择题所列的四个选项，有且只有一个是正确的.

平分线上及 x 轴和 y 轴上，如图 3 所示.

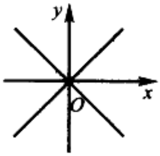

图 2

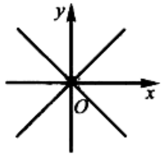

图 3

∴　$A \subsetneqq B$，故选(A).

思路 3　对集合 B 中的 k 值分 $2n$ 和 $2n-1(n\in \mathbf{Z})$ 进行讨论，然后与集合 A 进行比较，从而得到结论.

解法 3　在集合 B 中，当 $k=2n$ 或 $k=2n-1(n\in \mathbf{Z})$ 时，

$$B=\left\{y\left|y=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\text{或 } y=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4},n\in \mathbf{Z}\right.\right\}.$$

$$\text{而 } A=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\right.\right\},$$

∴　$A \subsetneqq B$，故选(A).

本题所介绍的三种解法是从三个不同角度对集合 A，B 进行分析，找出它们之间的包含关系. 解法 1 用的是列举法，思路直，易掌握；解法 2 用的是数形结合的思想方法，方法较为直观；解法 3 用的是分析法，方法较为简捷.

4. 已知集合 $A=\{x|x^2+(2+p)x+1=0,x\in \mathbf{R}\}$，若 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

思路 1　由 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，知 A 为空集或 A 中元素小于等于零. 若 A 为空集则判别式 $\Delta<0$；若 A 非空，解方程求出 A 中元素，令其小于等于零，解不等式求 p 的范围.

解法1 由 $A\cap\mathbf{R}^{+}=\varnothing$,知 A 为空集或 A 中元素不是正数.

①若 A 为空集,则 $\Delta=(2+p)^2-4<0$,即 $-4<p<0$.

②若 A 非空,则 $\Delta=(2+p)^2-4\geqslant0$,即 $p\leqslant-4$ 或 $p\geqslant0$.

设 x_1,x_2 是方程 $x^2+(2+p)x+1=0$ 的两根,

$$x_1=\frac{-(2+p)-\sqrt{p^2+4p}}{2},x_2=\frac{-(2+p)+\sqrt{p^2+4p}}{2}.$$

$\because$ $x_1\leqslant x_2$,

$\therefore$ 要 x_1,x_2 都小于等于零,只需 $x_2\leqslant0$.

解 $$\frac{-(2+p)+\sqrt{p^2+4p}}{2}\leqslant0,$$

即 $\sqrt{p^2+4p}\leqslant2+p$. (※)

(i)当 $p\leqslant-4$ 时,$2+p\leqslant-2$,(※)式不成立.

(ii)当 $p\geqslant0$ 时,$2+p\geqslant2$,(※)式两边平方,

得 $p^2+4p\leqslant p^2+4p+4$,显然成立.

由(i),(ii)可得 $p\geqslant0$.

综合①、②可得实数 p 的取值范围为 $p>-4$.

注 有关无理不等式的解法,在人教版高中教材《数学》第二册(上)中讲到.

思路2 依题意,A 为空集或 A 中元素不是正数,分两种情况由判别式及韦达定理列式,可求出实数 p 的范围.

解法2 由 $A\cap\mathbf{R}^{+}=\varnothing$,知 A 为空集或 A 中元素不是正数.

①若 A 为空集,则 $\Delta=(2+p)^2-4<0$,即 $-4<p<0$.

②若 A 为非空,设方程 $x^2+(2+p)x+1=0$ 的两根为 x_1,x_2,

则 $$\begin{cases}\Delta=(2+p)^2-4\geqslant0,\\ x_1+x_2=-(2+p)\leqslant0,\\ x_1\cdot x_2=1>0.\end{cases}$$

解得 $p\geqslant0$.

由①、②得 $p>-4$.

∴ 实数 p 的取值范围为 $p>-4$.

思路 3 利用补集的思想，先求 $A\cap\mathbf{R}^+\neq\varnothing$时 p 的范围，再求其补集，即得 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$时 p 的范围.

解法 3 若 $A\cap\mathbf{R}^+\neq\varnothing$，则方程 $x^2+(2+p)x+1=0$ 有正实根，设方程的两根为 x_1,x_2.

∵ $x_1\cdot x_2=1>0$，

∴ x_1,x_2 两根必同号.

∵ 方程 $x^2+(2+p)x+1=0$ 有正实根，

∴ $\begin{cases}\Delta=(2+p)^2-4\geqslant 0,\\ x_1+x_2=-(2+p)>0.\end{cases}$

解得 $p\leqslant -4$.

∴ 当 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$时，实数 p 的取值范围是 $p>-4$.

本题考查集合语言、集合思想在解决方程问题时的应用. 解法 1、解法 2 根据题意直接求解，注意当问题的情形不只一种时，应该进行不重不漏的讨论. 解法 2 运用韦达定理，避免解无理不等式，故解法 2 优于解法 1. 解法 3 运用补集的思想方法求解，避免了分类讨论，故此解法优于解法 2.

5 在一次数学竞赛中共出甲、乙、丙三题，有 81 人做出了甲题，有 72 人做出了乙题，有 60 人做出了丙题，有 23 人做出了甲、乙两题，有 18 人做出了甲、丙两题，有 13 人做出了乙、丙两题，有 3 人甲、乙、丙三题全做出了，问至少做出了一题的有多少人？

思路 1 应用有限集合的计数公式：$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$. 计算多个集合元素个数之和时，由于重复出现元

素只能作一个元素计算，所以应减去它们交集元素的个数，注意重复减去部分要加回来.

解法 1 以 A、B、C 分别表示做出了甲题、乙题、丙题的学生的集合，则 $A\cap B$ 表示做出了甲、乙两题的学生的集合；$A\cap C$ 表示做出了甲、丙两题的学生的集合；$B\cap C$ 表示做出了乙、丙两题的学生的集合；$A\cap B\cap C$ 表示做出了甲、乙、丙三题的学生的集合.

则至少做出了一题的学生人数为：

$\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=81+72+60-23-18-13+3=162$（人）.

∴ 有 162 人至少做出了一题.

思路 2 本题可利用文氏图求解. 首先画三个两两相交的圆表示三个集合，明确图中各区域所表示的含义，然后再按条件依次对各区域填入元素个数.

解法 2 如图 4，用三个圆分别表示做出了甲题、乙题、丙题的学生集合，这样得到了七个区域.

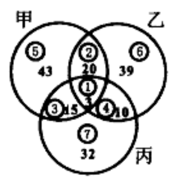

图 4

区域①表示做出了甲、乙、丙三题的学生集合，依题意有 3 个元素.

∵ 有 23 人做出了甲、乙两题，

∴ 区域②有 $23-3=20$ 个元素.

∵ 有 18 人做出了甲、丙两题，

∴ 区域③有 $18-3=15$ 个元素.

∵ 有 13 人做出了乙、丙两题，

∴ 区域④有 $13-3=10$ 个元素.

∵ 有 81 人做出了甲题，

$\therefore$ 区域⑤有 $81-3-20-15=43$ 个元素.

$\because$ 有 72 人做出了乙题,

$\therefore$ 区域⑥有 $72-3-20-10=39$ 个元素.

$\because$ 有 60 人做出了丙题,

$\therefore$ 区域⑦有 $60-3-15-10=32$ 个元素.

所求人数为七个区域元素个数之和,

即 $3+20+15+10+43+39+32=162$(人).

$\therefore$ 至少做出了一题的有 162 人.

本题考查学生利用集合知识解决实际问题的能力.解法 1 应用有限集合的计数公式这一集合知识,解法简捷;解法 2 用图示法直观地揭示各个区域之间的数量关系,清楚明白,值得效仿.

6 **已知** $A=\{(x,y)\mid x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant144\}$**是坐标平面内的点集,问是否存在实数** a,b **使得**①$A\cap B\neq\varnothing$,②$(a,b)\in C$ **同时成立.**

思路 1 本题是一道探索性题目,不妨假设满足条件的实数 a,b 存在.根据条件①、②及非空集合的概念,元素从属关系的含义,布列方程及不等式,解出 a,b 的值.

解法 1 若存在实数 a,b 使得 $A\cap B\neq\varnothing$成立,则集合 A 与集合 B 对应的方程组 $\begin{cases}y=ax+b,\\y=3x^2+15\end{cases}$ 有整数解,

即方程 $3x^2-ax+15-b=0$ (※)必有整数解,

因此,$\Delta=a^2-4\times3\times(15-b)\geqslant0$,

即 $-a^2-12b+180\leqslant0$. ①

若$(a,b)\in C$,则 $a^2+b^2\leqslant144$. ②

①+②,得 $b^2-12b+36\leqslant0$,

即　$(b-6)^2\leqslant 0$.

$\therefore$　$b=6$.

把 $b=6$ 代入①，得 $a^2\geqslant 108$.

把 $b=6$ 代入②，得 $a^2\leqslant 108$.

$\therefore$　$a^2=108, a=\pm 6\sqrt{3}$.

再将 $a=\pm 6\sqrt{3}, b=6$ 代入(※)式，得 $3x^2\pm 6\sqrt{3}x+9=0$，

解得 $x=\pm\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$.

所以不存在实数 a,b 使①、②同时成立.

注　求出 $a=\pm 6\sqrt{3}, b=6$ 后，本题并未结束. 注意检验集合 A,B 中 x 的值是否为整数，若 x 为整数，则 a,b 为所求，若 x 不是整数，则满足条件的实数 a,b 不存在.

思路 2　根据题意，可得本题等价于关于 a,b 的不等式组：

$$\begin{cases} na+b=3n^2+15, & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144, & ② \\ n\in\mathbf{Z} \end{cases}$$

是否有实数解. 由解析几何知识可知：①式表示直线，②式表示圆盘面. 结合图形可知不等式组有解的充要条件是圆心到直线的距离小于或等于半径.

解法 2　由 $A\cap B\neq\varnothing$，

得方程组$\begin{cases} n=m, \\ na+b=3m^2+15 \end{cases}$有整数解.

消去 m，得 $na+b=3n^2+15$.

而$(a,b)\in C$，意味着 $a^2+b^2\leqslant 144$.

问题转化为关于 a、b 的不等式组

$$\begin{cases} na+b=3n^2+15, & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144 & ② \end{cases}$$

是否有实数解，其中 $n\in\mathbf{Z}$. ①式表示直线，②式表示圆盘面.

如果不等式组有解，则圆心(0,0)到直线 $na+b-3n^2-15=0$ 的距离小于或等于半径，

即 $d=\dfrac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12$,

两边平方，整理，得 $(n^2-3)^2\leqslant 0$,

则 $n=\pm\sqrt{3}$，这与 $n\in\mathbf{Z}$ 矛盾.

所以符合条件①、②的实数 a,b 不存在.

注 此解法应用了第七章《直线和圆的方程》的知识.

思路 3 由解法 2 可知：原题等价于关于 a,b 的不等式组

$$\begin{cases}na+b-3n^2-15=0,\\ a^2+b^2\leqslant 144,\\ n\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

是否有实数解. 从方程出发，巧妙地应用柯西不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^{\,2}\right)\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$，从而使问题获解.

解法 3 若 $A\cap B\neq\varnothing$，则存在整数 n，使得 $na+b=3n^2+15$.

若 $(a,b)\in C$，则 $a^2+b^2\leqslant 144$.

此题等价于关于 a,b 的不等式组 $\begin{cases}na+b=3n^2+15,(n\in\mathbf{Z})\\ a^2+b^2\leqslant 144\end{cases}$ 是否有实数解.

$\because\ (3n^2+15)^2=(na+b)^2\leqslant(n^2+1)(a^2+b^2)$,

而 $a^2+b^2\leqslant 144$,

$\therefore\ (3n^2+15)^2\leqslant 144(n^2+1)$,

整理得 $(n^2-3)^2\leqslant 0$,

$\therefore\ n^2=3, n=\pm\sqrt{3}$，这与 $n\in\mathbf{Z}$ 相矛盾.