高中数学

能力激活

（一年级下）

主编　李秋明

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高中数学能力激活

（一年级下）

主　编　李秋明

副主编　姚　莉　张建国

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学能力激活．一年级．下/李秋明主编．—北京：高等教育出版社，2005.1
ISBN 7－04－013610－4

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 002091 号

责任编辑　徐　东　**封面设计**　吴　昊　**责任印制**　潘文瑞

书　　名	高中数学能力激活(一年级下)		
主　　编	李秋明		
出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588 021－56964871
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		
邮政编码	100011	**免费咨询**	800－810－0598
总　　机	010－82028899	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn http://www.hepsh.com
传　　真	021－56965341		
排　　版	南京理工排版校对有限公司		
印　　刷	江苏南洋印务集团		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2005 年 1 月第 1 版
印　　张	9.5	**印　　次**	2005 年 1 月第 1 次
字　　数	230 000	**定　　价**	14.00 元

郑 重 声 明

前　　言

在二期课改教材即将全面推开之际，针对目前与之配套的能帮助学生深化概念、掌握方法、拓展能力的学习参考书的匮乏的现状，我们根据在几年的新教材使用过程中积累的一些经验与体会，编写了这本高一下学期的教学辅导用书，希望本书能达到使学生提高学习效率、激发学习兴趣、培养学习能力的效果.

在本书的编写过程中，着力体现以下几个特点：

1. 体现复旦大学附属中学的数学教学特点

复旦大学附属中学是一个有着优良数学教学传统的学校，在高考、数学奥林匹克竞赛以及研究性学习中都有辉煌的成绩. 因此在本书的编写过程中，力图体现附中数学课堂扎实、严谨、灵活的风格，使更多的学生能享有附中的优质教学资源.

2. 体现二期课改的教育理念，与二期课改教材同步配套

本书以二期课改的数学课程标准和教材为依据，内容紧密配合课本，旨在帮助学生在学习过程中更高效地掌握数学概念和方法，激发和拓展能力.

3. 以能力培养为核心来精选例题和练习题

本书的每章节大致包括[知识要点]、[基础训练]、[精选例题]和[能力训练]4 个板块，精选与学生能力培养密切相关的例题和练习. 例题都是经典而有代表性的，每例都有相应的解法指导. 适量的练习可以使学生避免"题海". 本书在引导学生在看书、练习的同时，深入思考数学概念的本质，切实掌握方法，提高学习能力.

本书的编写者均是复旦大学附属中学数学教研组的一线任课教师，由上海市特级教师李秋明主编，副主编为姚莉、张建国，参加编写的还有：肖恩利、杨丽婷、张敏峰.

限于编者的水平，加之编写时间仓促，书中难免会有一些错误和问题，恳请读者批评指正，以便再版时予以修正.

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第5章　三　角　比

本章导言

三角作为高中数学中的基础性、工具性内容，有着广泛的应用. 本章的内容是整个高中阶段三角学的基础与工具，其中主要涉及到“任意角”、“弧度制”、“任意角的三角比”、“同角三角比的关系”和“诱导公式”、“两角和与差的余弦、正弦和正切”、“倍角公式”、“半角公式”、“三角比的积化和差”与“和差化积”(拓展内容)，以及“正弦定理”、“余弦定理”等基本概念、定理和公式.

本章作为工具性内容，基本要求是能熟练掌握、灵活应用. 解决三角比问题的基本思想是，运用三角公式进行三角恒等变换，实现角和角、边和角、三角比和与积的相互转化. 这里要引起注意的是，本章的内容不仅是高中阶段的常用工具，而且是今后重要的研究问题的方法.

结合二期课改的精神，本章的学习要求是：

1. 切实掌握任意角以及弧度制的概念.
2. 掌握任意角的三角比的定义.
3. 理解诱导公式的本质意义，并能熟练运用.
4. 掌握和、差、倍、半的三角比公式.
5. 掌握正弦定理、余弦定理，并能解决生活实际中的解斜三角形问题.

5.1　任意角及其度量

知识要点

1. 任意角

为了能更简便而准确地描述质点的圆周运动的方向和量的大小，角的大小由 0°～360°拓展到任意大小. 这里包含了角的始边、终边，正角、负角、零角、象限角以及同终边角等概念.

2. 弧度制

为了科学运算的简便，本节引出了角的另一个度量单位——弧度制. 在弧度制下，扇形的面积公式和弧长公式都相对比较简单. 本节应该熟练掌握弧度制与角度制的换算，同时在解三角题时要注意单位统一，避免弧度制和角度制混用.

本节的学习要求：

1. 掌握任意角、正角、负角、零角以及象限角的概念.
2. 掌握同终边角的概念及其表示方法.
3. 理解角的另一度量单位——弧度制，熟练掌握角度制与弧度制之间的互化.

基础训练

1. 写出终边在 y 轴上的集合.

2. 求出与 $-612°$ 终边相同的最小正角的弧度数.

3. 已知 α 是第三象限角，求 $\frac{3}{2}\pi-\alpha$ 所在的象限.

4. 已知 $\alpha=\frac{2n+1}{2}\pi+(-1)^{n}\frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$，试判断 α 是第几象限的角.

5. 已知扇形 AOB 的面积为 1，周长为 4，求弧 AB 的长.

6. 设角 α 的终边与 $\frac{6}{5}\pi$ 的终边关于 y 轴对称，且 $\alpha\in(-2\pi, 2\pi)$，求 α.

精选例题

例 1 若 α 是第一象限角，试判断$\frac{\alpha}{3}$是第几象限角.

解法指导 写出满足条件“第一象限角”的 α 的一般式，再讨论$\frac{\alpha}{3}$的情况.

解 因为 α 是第一象限角，所以 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\frac{2k\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n\ (n\in\mathbf{Z})$ 时，$2n\pi<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{\pi}{6}$，所以$\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角；

当 $k=3n+1\ (n\in\mathbf{Z})$ 时，$2n\pi+\frac{2\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{5\pi}{6}$，所以$\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限角；

当 $k=3n+2\ (n\in\mathbf{Z})$ 时，$2n\pi+\frac{4\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{3\pi}{2}$，所以$\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角.

注 本题之所以将整数 k 按除以 3 的余数为 0、1、2 这三类来讨论，是要将 $\frac{\alpha}{3}$ 整理成 $2n\pi+\beta<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\gamma\ (n\in\mathbf{Z})$ 的形式，这样才能够去判别$\frac{\alpha}{3}$究竟是哪一个象限的角.

例 2 已知集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，集合 $P=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，试判断集合 M 与集合 P 的关系.

解法指导 两个集合之间的关系可能一个是另一个的子集，也可能互为子集（即相等），也可能任何一个都不是另一个的子集. 因此判断两个集合之间的关系，应该从考虑元素的归属入手.

解 任取 $x\in M$，则 $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}=\frac{(2k\pm1)\pi}{4}$，

因为 $2k\pm1\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in P$，即 $M\subseteq P$，

又 $0\in P\ (k=0$ 时)，而 $0\notin M\left(\text{否则 } k=\pm\frac{1}{2}\text{，与 } k\in\mathbf{Z}\text{ 矛盾}\right)$，所以 $M\subsetneqq P$，

即集合 M 是集合 P 的真子集.

注 在解题之前可以先做个判断，$\frac{k\pi}{2}$是终边落在坐标轴上的角，因此 $\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$ 是终边落在 4 个象限的角平分线上的角，而$\frac{k\pi}{4}$是终边落在坐标轴上和终边落在 4 个象限的角平分线上的角，据此可以判断 M 是 P 的真子集. 有了这个判断，也就很容易找到属于 P 但不属于 M 的元素了.

例 3 如图 5-1 所示，OA 是角$\frac{\pi}{3}$的终边，OB 是角$\frac{7\pi}{6}$的终边. 如果角 α 的终边在图中的阴影部分区域内（不包括边界 OA 与 OB），试写出角 α 的取值范围.

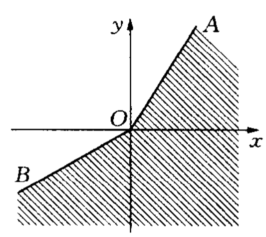

图 5-1

解法指导 这里要注意的是阴影部分是由 OB 逆时针方向旋转到 OA，或者由 OA 顺时针方向旋转到 OB 而得.

解 因为 OA 是角$\frac{\pi}{3}$的终边，

所以若由 OA 顺时针方向旋转到 OB，所得是角$-\frac{5\pi}{6}$的终边，

因此角 α 的取值范围是 $\left(2k\pi-\frac{5}{6}\pi,\ 2k\pi+\frac{1}{3}\pi\right)\ k\in\mathbf{Z}$.

注 该题容易犯的错误有：求出的取值范围是 $\left(2k\pi+\frac{7}{6}\pi,\ 2k\pi+\frac{1}{3}\pi\right)\ k\in\mathbf{Z}$，或者是 $\left(2k\pi+\frac{1}{3}\pi,\ 2k\pi+\frac{7}{6}\pi\right)\ k\in\mathbf{Z}$. 前者搞错了大小关系，后者是 OA 按逆时针方向旋转到 OB

所经过的区域. 该题的答案也可以表示为 $\left(2k\pi+\frac{7}{6}\pi,\ 2k\pi+\frac{7}{3}\pi\right)\ k\in\mathbf{Z}$.

例 4　在 1 时 15 分时，时针与分针所成的最小正角是多少弧度？

解法指导　在 1 时整时，时针指向数字 1，只要知道 15 分时针转动多大角度，问题就能解决.

解　一个小时时针转过的角度是 $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$，

所以 15 分时针转动的角度是 $\frac{1}{4}\times30^\circ=\left(\frac{15}{2}\right)^\circ$，

以指向 12 时为参照，可知 1 时 15 分时，时针与分针所成的最小正角是 $90^\circ-30^\circ-\left(\frac{15}{2}\right)^\circ=\left(\frac{105}{2}\right)^\circ$，

所以此时时针与分针所成的最小正角的弧度数是 $\frac{105}{2}\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{24}$.

注　在角度制与弧度制的互化时，关键是要掌握 $180^\circ=\pi$ 弧度，那么就很容易得到 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 弧度，1 弧度 $=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. 该题也可以直接以弧度制来运算.

例 5　一个扇形 OAB 的周长是 20，圆心角 $AOB\in(0,\pi)$，问扇形的半径、圆心角分别为多少时，扇形的面积最大？

解法指导　扇形的面积、圆弧长以及周长等都可以用扇形的半径和圆心角来表示，因此该题可以从半径和圆心角入手来解决.

解　设扇形半径为 r，圆心角 AOB 的大小为 α 弧度，扇形的面积为 S，

所以扇形 OAB 的周长是 $2r+\alpha r=20$，即 $\alpha=\frac{20-2r}{r}$，其中，$0<r<10$.

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=(10-r)r=-r^2+10r=-(r-5)^2+25,$$

所以当 $r=5$ 时，$S_{\max}=25$，此时 $\alpha=2$，

即扇形的半径为 5，圆心角为 2 弧度时，扇形面积取到最大值 25.

注　通过比较可以发现，弧度制下的扇形弧长公式和面积公式要比角度制下的相应公式简单，这是弧度制优越性的初步体现.

能力训练

1. 写出终边在直线 $y=x$ 上的角的集合.

2. 已知集合 $A=\left\{x \middle| k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\{x \mid 4-x^{2}\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$.

3. 若 α 是第一象限角，试判断 $-\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角.

4. 若角 α 与角 β 的终边互为反向延长线，试写出 α 与 β 之间的关系式.

5. 已知集合 A、B、C、D 分别为 $A=\left\{a \middle| a=2k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\left\{b \middle| b=k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $C=\left\{c \middle| c=4k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, $D=\left\{d \middle| d=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，求集合 A、B、C、D 之间的关系.

6. 写出终边在函数 $y=-|x|$ 图像上的角的集合.

7. 已知 $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\left\{\text{小于}\frac{\pi}{2}\text{的角}\right\}$，求 $A\cap B$.

8. 在扇形 OAB 中，半径 $OA=8\text{ cm}$，弧 AB 的长是 12 cm，求圆心角 AOB 的大小，并求扇形 OAB 的面积.

5.2 任意角的三角比

知识要点

1. 任意角的三角比的定义

一个角的三角比的值与角的终边位置有关，而与点 P(不重合于点 O)在终边上的位置无关. 因此，同终边角的同名三角比相等，这就是第一组诱导公式.

2. 用单位圆中有向线段表示三角比

从任意角的三角比的定义，角 α 的三角比与角 α 的终边位置有关(图 5-2)，而与点 P 在 α 终边上的位置无关(只要不与点 O 重合即可). 为了更简便地研究问题，可以适当地选取终边上点的位置，使该角的三角比有直观的几何意义，即用单位圆中的有向线段表示三角比. 其中 $\sin\alpha$ 可用有向线段 MP(正弦线)表示，$\cos\alpha$ 可用有向线段 OM(余弦线)表示，$\tan\alpha$ 可用有向线段 AQ(正切线)表示(其中 Q 是 α 的终边或终边的反向延长线与单位圆的切线 AT 的交点)等.

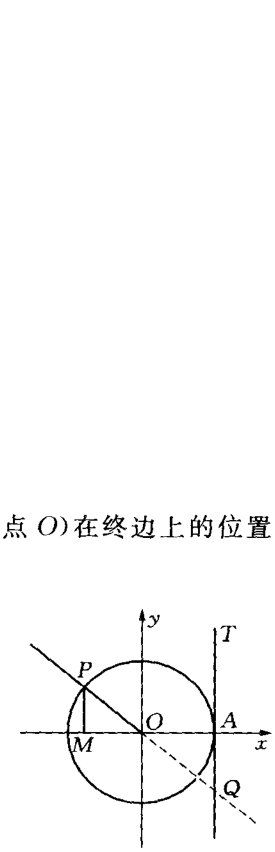

图 5-2

本节的学习要求：

1. 理解并掌握任意角的三角比的定义.
2. 掌握特殊角的各三角比的值.
3. 掌握各三角比的值在各象限的正负情况.
4. 能用单位圆中的有向线段表示三角比，并能解决相关问题.

基础训练

1. 已知点 $P(-\sqrt{2},\ -\sqrt{3})$ 在角 α 的终边上，求 $\sin\alpha-\cos\alpha$.

2. 设 α 是第三、四象限角，且 $\sin\alpha=\dfrac{2m-3}{4-m}$，求 m 的取值范围.

3. 已知点 $P(3,\ y)$ $(y<0)$ 在角 α 的终边上，若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，求角 α 的其他三角比的值.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A\cos B<0$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

5. 试确定 α 的取值范围，使 $\sin\alpha\cos\alpha<0$.

6. 已知角 α 的终边上在 $y=-3x\ (x>0)$ 上，求 α 的正弦值.

精选例题

例 1 已知角 α 的终边上的点 P 的坐标为$(-3a,\ 4a)$，其中，$a<0$，求 $\cos\alpha$.

解法指导 该题只要用任意角的余弦的定义即可.

解 由任意角的余弦的定义知 $\cos\alpha=\dfrac{x}{|OP|}=\dfrac{-3a}{\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}}=\dfrac{-3a}{5|a|}$，

因为 $a<0$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{-3a}{-5a}=\dfrac{3}{5}$.

注 本题要注意的是根式的运算 $\sqrt{a^2}=|a|$，常见的错误是 $\sqrt{a^2}=a$.

例 2 若 α 是第二象限角，试判断实数 $\sin(\cos\alpha)\cos(\sin\alpha)$ 的正负.

解法指导 本题的关键是理解式子 $\sin(\cos\alpha)$ 和 $\cos(\sin\alpha)$ 的含义. 在 $\sin(\cos\alpha)$ 中，求的是弧度数为 $\cos\alpha$ 的角的正弦值，即应将 $\cos\alpha$ 看作是一个角的弧度数.

解 令 $\theta_1=\cos\alpha$，因为 α 是第二象限角，所以 $-1<\theta_1=\cos\alpha<0$，所以 $\sin\theta_1<0$，即 $\sin(\cos\alpha)<0$；

令 $\theta_2=\sin\alpha$，因为 α 是第二象限角，所以 $0<\theta_2=\sin\alpha<1$，所以 $\cos\theta_2>0$，即 $\cos(\sin\alpha)>0$；

所以 $\sin(\cos\alpha)\cos(\sin\alpha)$ 是负数.

注 对于这一问题的一种常见错误是将 $\sin(\cos\alpha)$ 以为是 $\sin\alpha\cos\alpha$.

例 3 求函数 $y=\log_{\sin x}\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域.

解法指导 在求函数的定义域时，若没有特殊说明，则使函数有意义的自变量的集合就是定义域. 本题要注意的是对数式中不仅真数为正，底数也是不为 1 的正数.

解 $\begin{cases}\sin x>0,\\ \sin x\neq 1,\\ \cos x+\dfrac{1}{2}>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<\sin x<1,\\ \cos x>-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

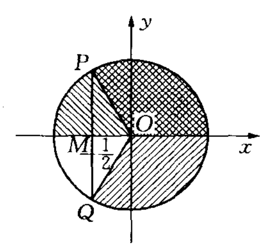

图 5-3

由正弦线和余弦线(图 5-3 中的 MP 和 OM)我们知道，

$0<\sin x<1$，则角 x 的终边在 x 轴上方，不包括 y 轴正半轴，

$\cos x>-\dfrac{1}{2}$，则点 M 的横坐标大于 $-\dfrac{1}{2}$，

所以角 x 的终边在 OP、OQ 的右边(如图 5-3 中阴影部分)，

所以，函数的定义域是 $\left\{x \left| 2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 或 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}\right.\right\}$.

注 本题也可以在学习正弦函数和余弦函数的图像后，用这两个函数的图像来解决. 利用正弦线和余弦线，可以快速地在单位圆内找出角 x 的终边的位置所在区域.

能力训练

1. 角 α 的终边经过点 $P(-12\cos\theta,\ 5\cos\theta)$，其中 $\theta \in \left(\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

2. 已知角 α 终边上一点 P 与 x 轴的距离和与 y 轴的距离之比为 $4:3$，且 $\cos\alpha < 0$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

3. 试用列举法表示集合 $\left\{y \left| y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|} + \frac{|\cot x|}{\cot x},\ x \in \mathbf{R}\right.\right\}$.

4. 求函数 $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$ 的定义域.

5. 求 $\sin\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的值.

6. 已知函数 $f(x)$的定义域是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,求函数 $F(x)=f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$ 的定义域.

5.3 同角三角比的关系和诱导公式

知识要点

1. 同角三角比的关系

同角三角比的关系有倒数关系、商数关系和平方关系等. 通过上述关系,可以将一个三角比转换为同角的另一个三角比,如将"切割化为弦"等,以简化问题.

2. 诱导公式

诱导公式的重要之处在于可以将某一个角的三角比转换为我们指定范围内的某个角的三角比,这样可以使问题简化. 在实际应用中,应注意三角比名称及符号的变化,在实践中掌握其变化规律.

本节的学习要求:

1. 掌握同角三角比的倒数关系、商数关系以及平方关系.
2. 已知某角的一个三角比的值,能利用同角三角比的关系,求出其他三角比的值.
3. 掌握诱导公式,能运用诱导公式,将一个角的三角比转换到另一个角的三角比.

基础训练

1. 计算: $\cos(-750^\circ)$.

2. 已知角 α 的终边上一点 $M(\tan\theta, 1)$，其中 θ 是 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内的常数，求 $\cos\alpha$.

3. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，且 $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$，求 $\tan(\pi-\alpha)$.

4. $\tan\alpha=2$，试求 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$ 和 $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值.

5. 试确定实数 m 的值，使对 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$，有 $\sin\theta=m-1$, $\cos\theta=m-2$.

6. 在△ABC 中，证明：

(1) $\sin(B+C)=\sin A$；

(2) $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$.