应用数学基础

Fundamentals of Applied Mathematics

吴翊 李超 罗建书 戴清平 编著

高等教育出版社

应用数学基础

Fundamentals of Applied Mathematics

吴 翊　李 超　罗建书　戴清平　编著

高等教育出版社

内容简介

本书力求在一门课中介绍较为综合的数学知识。内容分为三篇:第一篇泛函分析,包括度量空间与赋范线性空间、有界线性算子、Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分等内容;第二篇矩阵代数与矩阵分析,包括矩阵的相似标准形、Hermite 二次型、矩阵的分解、矩阵分析等内容;第三篇 Fourier 分析与小波变换,包括 Fourier 级数与 Fourier 分析、小波变换及其应用等内容。三部分内容有机贯穿又相对独立,可作为一门课程的完整教材,也可根据不同需要选用部分内容。

本书可供工科类硕士研究生或高年级本科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础 / 吴翊等编著. —北京:高等教育出版社,2006.6

ISBN 7-04-019322-1

Ⅰ.应… Ⅱ.吴… Ⅲ.应用数学-高等学校-教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 037617 号

策划编辑 杨 波 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 郝 林
版式设计 张 岚 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2006年6月第1版
印　　张	15.5	**印　　次**	2006年6月第1次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	21.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 19322-00

前　言

当前,在研究生的教学中加强数学课程已成为一种趋势,人们越来越认识到数学知识和数学素质对于创新人才的培养十分重要。目前研究生阶段的数学教学普遍面临学时紧、专业面广、应用性强等特点,因此对于研究生的数学课程设置和建设仍是一个值得探讨的问题。针对研究生教学的上述特点和需求,我们编写了这本《应用数学基础》。

本书以工科硕士研究生为对象,以反映现代数学思想方法、提供必备的数学基础、力求贴近应用背景为编写宗旨,融合几位作者多年教学实践经验而成。全书以泛函分析为主线,内容分为三篇:第一篇泛函分析,第二篇矩阵代数与矩阵分析,第三篇 Fourier 分析与小波变换。三部分内容有机贯穿但又相对独立,既提供了一门课程的完整教材,又可根据不同需要选用部分内容。

本书首先较为系统地介绍泛函分析的理论与方法。第一章预备知识,主要介绍集合与映射、线性空间等基本概念;为了引入无穷维空间的需要,简要介绍了可数集;考虑到泛函分析中许多空间的性质都是从实数中抽象出来的,因此将实数的完备性也列入了预备知识。第二章赋范线性空间,介绍度量空间、赋范线性空间和内积空间的代数与拓扑结构。其中度量空间主要介绍赋范线性空间中那些与线性运算无关的拓扑性质,如序列、级数的收敛性,映射的连续性及空间的完备性、可分性和紧性等;赋范线性空间中则在阐述基本概念的基础上,介绍了应用中常见的赋范线性空间及其性质;最后将内积空间作为赋范线性空间的特殊情况进行了讨论,特别介绍了正交等几何性质及在实际问题中应用广泛的正交系、广义 Fourier 系数和最佳平方逼近等概念。第三章有界线性算子,阐述了有界线性算子和有界线性泛函的基本概念,扼要介绍了一致有界原理、开映射定理、闭图像定理和泛函延拓定理等泛函分析基本定理。第四章 Lebesgue 积分及应用,介绍了 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论,这既是一部分相对独立的内容,又为赋范线性空间及有界线性算子理论提供丰富的实例,同时也是后面 Fourier 分析与小波变换的基础。

其次,利用泛函分析的理论与方法讨论了矩阵空间中矩阵序列和矩阵级数的收敛性以及矩阵函数的定义与计算。为此,先介绍了矩阵代数方面的知识,包括矩阵的相似标准形理论、Hermite 矩阵和矩阵分解等方面的知识。第五章矩阵相似标准形,在介绍了多项式矩阵的理论的基础上,给出了矩阵相似的一系列充要条件和两类相似标准形。第六章 Hermite 二次型,在介绍酉矩阵、Hermite 矩

阵和正规矩阵酉对角化前提下,讨论 Hermite 二次型的分类和正定 Hermite 矩阵的性质与判定等问题。第七章矩阵的分解,讨论了矩阵的三角分解、正交三角分解、谱分解、奇异值分解和极分解等矩阵的分解形式。第八章矩阵分析,基于矩阵的相似标准形理论,利用泛函分析的思想与方法,讨论了矩阵空间中矩阵序列和矩阵幂级数的收敛性以及矩阵函数的定义与计算等问题。

最后,在 Lebesgue 积分和泛函分析的理论的基础上,讨论了 Fourier 级数与 Fourier 分析,并介绍了近年来在信息、控制等领域中广泛应用的小波变换的有关知识。

本教材较大幅度地对现有传统教材的框架进行改革,以使硕士研究生在较少的学时中,尽可能多地掌握必要的数学基础;教材将原属于不同课程的内容有机地组合在一起,既体现了现代数学相互贯通的一面,又注意了保持原有课程相对完整的体系;教材注重现代数学思想方法的介绍,而不强调数学论证细节,书中给出的证明,主要供教学中参考用,并不需要提出过高的掌握要求,而强调从应用背景出发,引出概念和问题,力求以适合工科学生的思维方式阐明基本的数学原理;教材选用较为基础性内容,虽然强调应用的背景,但不试图也不可能取代本应根据需要专门开设的其他数学课程。

全书力求深入浅出,可读性强,每章末附有一定习题以便利自学。本书既可作为工科类研究生教材,也可供工科高年级本科生选用。

各章的分工是第 1、2、3、4 章由吴翊执笔,第 5、6、7 章由李超执笔,第 8 章由戴清平执笔,第 9、10 章由罗建书执笔。

本书编写从立项到成书过程,一直得到国防科技大学研究生院的大力支持,高等教育出版社亦为本书问世做了大量的工作,在此一并致谢。

限于作者水平,加之成书仓促,书中不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编者

2005 年 12 月

郑重声明

目　　录

第一篇　泛函分析

第二篇　矩阵代数与矩阵分析

第三篇 Fourier 分析与小波变换

第一篇　泛 函 分 析

第1章　预备知识

数学分析(微积分)和线性代数是大学数学的重要内容,也是各专业的重要基础课程.数学分析和线性代数的研究对象主要是实数或有限维实向量空间,许多实际问题的描述和解决都可归结为这方面的问题,但是作为更广泛的应用基础,仅这些还远远不够.泛函分析从某种意义来讲是数学分析和线性代数在无穷维抽象空间的推广,它在近代物理学、信息科学、现代控制理论等领域均有广泛的应用.为了介绍泛函分析理论,需要简要回顾一下有关的数学基础知识,主要是集合与映射、可数集、实数的完备性与线性空间等内容.

1.1　集合与映射

1.1.1　集合的表示与运算

集合是数学中的一个最基本的概念,对集合的概念做更深入的理论分析超出了本书的范围,此处只给出它的描述性定义,即一些具体或抽象的事物聚集在一起所构成的整体称为集合,通常用大写字母表示,如 A,B,C 等等;集合中的个体事物称为集合的元素,常用小写字母表示,如 x,y,z 等等.如果 x 是集合 A 中的元素就记为 $x\in A$,否则记为 $x\notin A$.

集合中如果只有有限个元素,即可以将它们列出用以表示集合,如

$$A=\{x,y,z\}.$$

注意,设 x 是元素,记号 x 与 $\{x\}$ 是不同的,前者表示元素 x 本身,后者表示由单个元素 x 构成的集合,称为单点集.

集合的另一种常用的表示是以元素的特性来描述,记成

$$A=\{x\mid p(x)\},$$

其中,$p(x)$ 是关于 x 的一个命题,A 表示全体使得 $p(x)$ 成立的 x 构成的集合.

有可能不存在满足 $p(x)$ 的元素,此时特别约定使得 $p(x)$ 成立的 x 构成的

集合为空集，记为$\varnothing$，如$\{x\mid x$为实数，$x^2+1=0\}=\varnothing$.

设A,B是两个集合，如果A中任意一个元素都是B中的元素，则称A是B的子集，或者称A含于B(或B包含A)，记成$A\subset B$；如果$A\subset B$，同时$B\subset A$，即A与B中的元素完全相同，则称A与B相等，记成$A=B$；如果$A\subset B$，但$A\neq B$，则称A是B的真子集. 记成$A\subsetneqq B$. 规定空集是一切集合的子集.

定义 1.1 设A,B是两个集合，则

(1) 称由既属于A又属于B的元素全体构成的集合为A与B的交，记成$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

(2) 称由属于A,B之一的元素全体构成的集合为A与B的并，记成$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

(3) 称由属于A但不属于B的元素全体构成的集合为A与B的差，记成$A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\};$$

(4) 当$B\subset A$时，称$A\backslash B$为B在A中的余集或补集，若所讨论的集合均为某一固定集合X(称之为基本集)的子集时，直接称$X\backslash B$为B的余集或补集，记成B^C.

两个集合交与并的运算可以推广到更一般的情形.

设I为一个非空的集合，当i遍取集合I时，$\{A_i\mid i\in I\}$是一个以所有的集合A_i为元素的集合，称为是以I为指标集的集族，它们的交$\bigcap\limits_{i\in I}A_i$与并$\bigcup\limits_{i\in I}A_i$定义为

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid \text{对一切 } i\in I, \text{皆有 } x\in A_i\},$$
$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid \text{存在某个 } i\in I, \text{使得 } x\in A_i\}.$$

当I为正整数集$\mathbb{Z}_+$时，$\bigcap\limits_{i\in I}A_i$和$\bigcup\limits_{i\in I}A_i$可分别记成$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$和$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 特别当$A_i$两两不交时，称$\bigcup\limits_{i\in I}A_i$为不交并.

例 1.1 设$\mathbb{Q}_+$为全体正有理数组成的集合，因为每个正有理数都可表示成$\dfrac{p}{q}$的形式，其中$p,q\in\mathbb{Z}_+$，对于每个$q\in\mathbb{Z}_+$，令$A_q=\left\{\dfrac{k}{q}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}_+\right\}$，则有$\mathbb{Q}_+=\bigcup\limits_{q=1}^{\infty}A_q$. 但在这一表达式里，诸$A_q$并非两两不交的，因为有理数的表示$\dfrac{p}{q}$并不唯一，但当$p,q$互素时，这一表示就唯一了，因此若令$B_q=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbb{Z}_+, \text{且 } p,q \text{ 互素}\right\}$，则有

$\mathbb{Q}_+ = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} B_q$，即将$\mathbb{Q}_+$表成了不交并.

由集合的定义容易得到

定理 1.1 设 A,B,C 及 $A_i, i\in I$ 均为集合，则有

(1) 幂等性 $A\cap A = A\cup A = A$；

(2) 传递性 若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$；

(3) 交换律 $A\cap B = B\cap A, A\cup B = B\cup A$；

(4) 结合律 $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C), (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$；

(5) 分配律 $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)\cup A = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i\cup A), \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)\cap A = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i\cap A)$.

证明 只证(5)中第二式，其余证明方法类似.

对于任意 $x\in\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)\cap A$，则 $x\in\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ 且 $x\in A$，于是存在 $i\in I$，使得 $x\in A_i$，从而 $x\in A_i\cap A$，故 $x\in\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\cap A)$，这表明$\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)\cap A\subset\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\cap A)$；另一方面，对于任意 $x\in\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\cap A)$，存在 $i\in I$，使得 $x\in A_i\cap A$，即 $x\in A_i$ 且 $x\in A$，故 $x\in\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)$且 $x\in A$，从而 $x\in\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)\cap A$，这表明 $\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\cap A)\subset\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)\cap A$，综合两方面即可得到

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap A = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap A).$$

对于集合关于余集的运算，有如下结论

定理 1.2 设 A,B 及 $A_i, i\in I$ 均为基本集 X 的子集，则有

(1) $A\backslash B = A\cap B^C, A\cap A^C = \varnothing, A\cup A^C = X, X^C = \varnothing, \varnothing^C = X, (A^C)^C = A$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $A^C\supset B^C$；若 $A\cap B = \varnothing$，则 $A\subset B^C$，且 $B\subset A^C$；

(3) 对偶原理(De Morgan 律)

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i\in I} A_i^C, \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} A_i^C$$

证明 只证明(3)，其余证明读者自己完成.

先证第一式，对于任意 $x\in\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^C$，即 $x\notin\bigcap\limits_{i\in I} A_i$，于是存在 $i\in I$，使得 $x\notin A_i$，即 $x\in A_i^C$，故 $x\in\bigcup\limits_{i\in I} A_i^C$，这表明$\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^C\subset\bigcup\limits_{i\in I} A_i^C$；另一方面，对于任意 $x\in\bigcup\limits_{i\in I} A_i^C$，存在 $i\in I$，使得 $x\in A_i^C$，即 $x\notin A_i$，故 $x\notin\bigcap\limits_{i\in I} A_i$，从而 $x\in\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^C$，这表明$\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^C\supset\bigcup\limits_{i\in I} A_i^C$，综合两方面即可得到$\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^C$，第一式得证. 于是以 A_i^C 取代 A_i

上式依然成立，即$\left(\bigcap\limits_{i\in I}A_i^C\right)^C=\bigcup\limits_{i\in I}(A_i^C)^C=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$. 对此式两端取余集即可得到第二式$\left(\bigcup\limits_{i\in I}A_i\right)^C=\bigcap\limits_{i\in I}A_i^C$.

推论 设$A_i, i\in I$为一族集合，E为任意集合，则有

$$E\setminus\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(E\setminus A_i),\quad E\setminus\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(E\setminus A_i).$$

下面给出集合的直积的概念

定义 1.2 设A,B为集合，其直积记为$A\times B$，定义为A,B中元素按A先B后的顺序构成的有序对(a,b)的全体所成的集合. 即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

直积又称 Descartes 乘积.

当A,B中有一个为空集时，规定$A\times B=\varnothing$.

一般地，设$A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$为n个集合，则它们的直积记成$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$定义为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\},$$

即为分别取自$A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$中元素的有序组的全体构成的集合，其中每一个$A_i\ (i=1,2,\cdots,n)$称为直积的坐标集. 当坐标集为相同的A时，$A\times A\times\cdots\times A$简记为$A^n$，如$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{C}^n$分别表示$n$维实数空间和复数空间；另外，坐标集也可以不是同一个基本集的子集，如$F\times X$，其中F为数域，X为向量空间.

1.1.2 映射及性质

在微积分中，函数是熟知的概念，将这一概念推广到一般的集合上，就是映射. 在不同的场合，映射又分别被称作函数、泛函、算子、变换等.

定义 1.3 设A,B为两个非空集合，如果存在一个对应法则f，使对任意的$x\in A$都有唯一的$y\in B$与之对应，就称f为A到B的一个映射，记成

$$f:A\to B,$$

或者

$$f:x\mapsto y\ (x\in A),$$

y称为是x在映射f下的像，记成$y=f(x)$. 集合A称为映射f的定义域，记成$A=\mathscr{D}(f)$. 对于A的任意非空子集$A_1\subset A$，称集合

$$f(A_1)=\{y\in B\mid 存在\ x\in A_1, 使得\ f(x)=y\}$$

为A_1在映射f下的像集，特别当$A_1=A$时，称$f(A)$为f的值域，记成$f(A)=\mathscr{R}(f)$.

对于B的任意子集$B_1\subset B$，称集合

$$f^{-1}(B_1)=\{x\in A\mid f(x)\in B_1\}$$

为B_1关于f的逆像（或原像）集，特别当B_1为单点集$\{y\}$时，$f^{-1}(\{y\})$简记为

$f^{-1}(y)$.

不要将 $f^{-1}(y)$ 与反函数的记号混淆起来. 事实上,完全可能有多于一个的 $x\in A$,使 $f(x)=y$,而 $f^{-1}(y)$ 是满足这一条件的 x 的全体.

定义 1.4 设映射 $f:A\to B$,则

(1) 若对于任意 $y\in B$,存在 $x\in A$,使得 $f(x)=y$,则称 f 是满射,或 A 到 B 上的映射.

(2) 若对于任意 $y\in B$,$f^{-1}(y)$ 至多是单点集,则称 f 是单射,或 A 到 B 内的一一映射.

(3) 若 f 既是满射又是单射,则称 f 是双射,或 A 到 B 上的一一映射.

注意当 f 是单射时,对于每个 $y\in\mathscr{R}(f)$,$f^{-1}(y)$ 为 A 中的单点集,亦即对于此 y 有唯一的 $x\in A$ 与之对应,此时 f^{-1} 确定了一个映射 $f^{-1}:\mathscr{R}(f)\to A$ 称为 f 逆映射,当 f 为双射时,其逆映射为 $f^{-1}:B\to A$.

定义 1.5 设有映射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$,则可定义 f 与 g 的复合映射,记为 $g\circ f:A\to C$,使得对每个 $x\in A$,$g\circ f(x)=g(f(x))$.

关于映射有下列性质.

定理 1.3 设有映射 $f:A\to B$,$g:B\to C$,则有

(1) 对于任意 $E\subset A$,$F\subset B$,有

$$E\subset f^{-1}(f(E)),\ f(f^{-1}(F))\subset F,\ f^{-1}(F^C)=(f^{-1}(F))^C.$$

当 f 为单射时,第一式取等号;当 f 为满射时,第二式取等号;

(2) 设 $\{A_i\mid i\in I\}$ 与 $\{B_i\mid i\in I\}$ 分别为 A 与 B 的子集族,则有

$$f\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)=\bigcup_{i\in I}f(A_i),\quad f\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I}B_i\Big)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i),\quad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I}B_i\Big)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i);$$

(3) 若 f 是双射,则 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射,且 $f^{-1}\circ f$ 与 $f\circ f^{-1}$ 分别是 A 与 B 上的恒等映射,即对任意 $x\in A$,$y\in B$,$f^{-1}\circ f(x)=x$,$f\circ f^{-1}(y)=y$;

(4) 若 f,g 均为满射,则 $g\circ f$ 为满射;若 f,g 均为单射,则 $g\circ f$ 为单射;若 f,g 均为双射,则 $g\circ f$ 为双射.

以上定理不难,可由定义直接证明. 下面的例子可以帮助理解为什么在定理中几处式子只有包含关系而不能取等号.

例 1.2 设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{a,b,c\}$,从 A 到 B 的映射 f 定义如下:

$$f(1)=a,\ f(2)=f(3)=b.$$

取 $E=\{2\}$,$F=\{b,c\}$,$A_1=\{1,2\}$,$A_2=\{1,3\}$,则

$$E\subsetneqq f^{-1}(f(E))=\{2,3\},\ f(f^{-1}(F))=\{b\}\subsetneqq F,$$

$$f(A_1\cap A_2)=\{a\}\subsetneqq\{a,b\}=f(A_1)\cap f(A_2).$$

1.2　集合的基数与可数集

对于各种集合，一种常用的分类方法就是按照集合中所包含元素的个数分类，当元素的个数有限时，称之为有限集，否则称为无限集. 但是在数学研究中，不加区分地说无限集往往太粗糙了，事实上，即使是无限集，元素也有“多少”之分，但这个“多”“少”的量当然不是普通意义下数出来的，而是通过建立一一对应关系，即双射来得到的. 对于有限集 A 中元素个数的确定，可以一个个地数：$1,2,\cdots,n$，数的实质是什么？就是建立从 A（不管由什么元素构成）到正整数集的一个自 1 起不间断的子集（称为前段）$B=\{1,2,\cdots,n\}$ 之间的双射，如果这个双射存在，就说 A 中元素的个数为 n. 由此可以推广到一般的情形，这就是基数的概念.

定义 1.6　设 A 与 B 是两个集合，若存在双射 $f:A\to B$，则称 A 与 B 是对等的，或有相同的基数（或等势），记成 $A\sim B$.

显然，对等是一种等价关系，它满足

(1) 自反性　$A\sim A$；

(2) 对称性　若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) 传递性　若 $A\sim B, B\sim C$，则 $A\sim C$.

事实上，恒等映射 $I:A\to A, I(x)=x$ 是个双射；又若有双射 $f:A\to B$，则 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射；再若有双射 $f:A\to B$，及 $g:B\to C$，则 $g\circ f:A\to C$ 也是双射.

对于有限集 A，显然与 A 对等的集合都有相同的元素个数，因此规定有限集的基数就是元素个数，特别地，空集的基数为 0. 对于无限集的基数，只讨论其中最常用的一种，有如下定义.

定义 1.7　定义正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的基数为可数无穷（或可列无穷）；一切与 $\mathbb{Z}_+$ 对等的集称可数集（或可列集），可数集与有限集统称至多可数集.

相应于可数无穷基数，当然也有不可数无穷，以它为基数的集合称为不可数集，例如 $[0,1]$ 中的全体实数就是不可数集，此处不作详细讨论.

无穷集的一个重要特征是它存在到自身的一个真子集上的一一对应，即双射；而任何一个有限集合都不可能存在到自身真子集上的双射.

例 1.3　正奇数的全体 N_1，正偶数的全体 N_2 均为可数集，因为显然

$$f_1:\mathbb{Z}_+\to N_1, f_1(n)=2n-1, n\in\mathbb{Z}_+;$$

$$f_2:\mathbb{Z}_+\to N_2, f_2(n)=2n, n\in\mathbb{Z}_+$$

都是双射.

若 A 是可数集，即存在双射 $f:\mathbb{Z}_+\to A$，记 $f(n)=a_n, n\in\mathbb{Z}_+$，因为 f 是双射，所以其所有元素都通过上式写成 a_n 的形式，亦即 A 可以表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}. \tag{1.1}$$

反之每个可以写成上述形式的集合均为可数集，因为显然 $f: n \mapsto a_n$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 到 A 的双射.

既然可数集的真子集仍有可能是可数集，即比可数集"小一点"的集仍可能是可数的集，那么比可数集"大一点"的集如何呢，为讨论这一点，先引用 Bernstein 定理.

定理 1.4 (Bernstein) 设有集合 $A_1 \subset A, B_1 \subset B$，若 $A_1 \sim B, B_1 \sim A$，则 $A \sim B$.

即两个集合分别与对方的一个子集对等，则这两个集合自身也对等. 这一定理的一个常见情形是当 $A = B_1$ 时，即有 $A_1 \subset A \subset B$，而 $A_1 \sim B$，则 $A \sim B$.

下面进一步研究可数集的性质.

定理 1.5 (1) 可数集的子集是至多可数集；

(2) 有限或可数个可数集的并是可数集；

(3) 有限个可数集的直积是可数集.

证明 (1) 设 A 为可数集，即具有式(1.1)的形式，若 B 为 A 的非空子集，则可将 B 中元素按式(1.1)中的顺序依次列出，若 B 不是有限的，则得到

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\},$$

它显然是可数集.

(2) 只需证明可数个可数集之并仍是可数集，设有可数个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，它们的元素可排列如下：

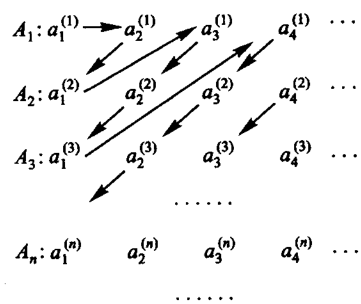

图 1.1

将所有元素 $a_j^{(i)}, i, j \in \mathbb{Z}_+$，按照 $i+j$ 的大小顺序排列，小的在前；对于 $i+j$ 相等的元素，i 小的排在前，即按如图 1.1 箭头所示方向排成一元素列

$$\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_4^{(1)}, \cdots\},$$

这一元素列的项数是可数的，其中可能有不同的项代表同一元素(所以不用"集合的元素个数"这样的术语)，此时剔除排在后面的重复项，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 可写成上述元素列的一个子列，因此它是至多可数集；另一方面 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \supset A_1$，而后者是可数集，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集.

(3) 先考虑可数集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 和 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$ 的直积 $A \times B$，易知，其中元素的全体可写成 $A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i, j \in \mathbb{Z}_+\}$，按照(2)中类似的证法知 $A \times B$ 为可数集，再用数学归纳法推出对于任意有限个可数集的直积是可数集.