前　言

“高考”是莘莘学子人生中最为重要的一关，近两年来，高考形式发生了重大变化，一改一卷统天下的局面，将逐渐形成各家争鸣的态势，高考试卷中的题型及命题角度也将随之丰富多彩了。那么对于面临高考的学生来说，学习和复习的内容，角度和视野也必须随之多元化，才能适应新的高考趋势。

“奥林匹克”这一响亮的名字，已经成为最高水平竞赛的代名词，对每一位有竞争意识的人来说，能够得到它的垂青，是一种无尚的荣誉，哪怕只是参与一下都会让人激动不已。中学生学科奥林匹克竞赛也是这样，近二十年来，中国的中学生选手在各项国际中学生学科奥赛中取得了令世人瞩目的辉煌成绩，充分证明了中国学生的能力。虽然不是每个人都有机会参加这一比赛并能获奖，但“奥赛”中渗透着的知识的精髓和创新的思维方法，对日常的学习和准备高考有着重要的指导和借鉴意义。

本书编写意图

奥林匹克竞赛具有如此高的地位，很重要的原因是各级“奥赛”试题具有很强的创新性、灵活性、综合性。注重考查学生对知识的理解及综合创新能力。而这一点恰恰是素质教育中知识教学的核心内容，也是高考试卷改革的精神实质。

2004 年和 2005 年的高考试卷虽然有十几个品种，但都有一个共同点：没有明显的送分题，考查点偏重于知识网络的交汇点。用常规的课堂教学思维应付已明显不够。如果考生缺乏开放性思维和应用意识，肯定拿不到高分。

对比“奥赛”初赛、复赛大纲和高考大纲，以及历年初赛、复赛试题和近几年各地高考中的难题、压轴题也不难看出，许多高考难题都能在“奥赛”试题中看到“影子”。甚至某些题就是上一届奥林匹克竞赛题的翻版。因此，我们学习和研究奥林匹克竞赛试题不光是为了夺取“奥赛”金牌，更重要的是可以让我们站在一个更高的高度俯视日常学习和高考，在学习和考试中脱颖而出。

如何进行课外拓展学习，不能盲目操作，要有一套科学的方法和计划，还要有一个得力的助手——辅导参考书。否则，会顾此失彼，得不偿失。

基于以上几方面原因，我们编写了这套丛书，将奥赛和高考有机地结合起来，借“他山之石”，攻“此山之玉”，希望能为同学们找到一条通向成功的有效捷径。

本书编写特点

本书内容的难度定位在略高于高考水平，相当于奥林匹克竞赛的中等难度，以高中教学大纲和高考大纲中的重、难点和被奥赛加深、拓展的知识点为知识基础，结合各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的开放性思维方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维能力，对接历年高考中的经典“拔高”题，用奥赛解题思维巧解高考难题，并通过边学边练及时巩固，引导创新。

本书重点放在例题讲解上。例题具有典型的代表性，思路剖析透彻，解答过程详尽，点津之笔富有启发性，跟踪练习题分为 A、B 卷两个部分，A 卷为基础卷，B 卷为能力提高卷。对于较难的练习题，给出了全解或解答提示，但这仅作参考。同学们要自己开动脑筋，结合例题，想出自己的解决方案来。

本套丛书涉及数学、物理、化学、生物各科，涵盖中学各个年级，共计 16 分册，知识讲解系统，题型全面，可作为同步提高、高考复习及竞赛辅导教材使用。

本书编写力量

参加本套丛书编写的人员为来自北京四中、人大附中、北师大附属实验中学、清华附中、黄冈中学、启东中学、龙岩一中、首师大附中、北师大二附中、北京八中、北京 101 中学、北京 13 中、民族大学附中等一批重点名校的一线优秀教师和奥赛辅导教练；部分清华大学和北京大学的奥赛保送生和高考理科状元也为本书做了许多有益工作。

修订版说明

本丛书面世以来，得到了读者朋友的一致认可。为了感谢读者的厚爱，继续提高本丛书质量，我们本着与时俱进的时代精神和自我批评、精益求精的态度，组织了一批经验丰富的专家和勇于创新的一线优秀青年教师，分析研究 2005 年的各类竞赛和高考新变化，对原书内容进行了必要的修订，为同学们迎接下一轮升学考试再出做贡献。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺憾，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

注:每章(节)均包含[考点对接]、[高考回顾]、[奥赛升级]、[思维链接]、[边学边练]五个板块。

第一章 不等式的证明方法

第一节 基本方法

考点对接

证明不等式,是以不等式的性质作为理论依据,利用一些基本不等式作为基础,而且证明的方法很多,技术性较强.因此,在证明不等式时,既要重视基本方法的运用,又要考虑其他方法和变形的技巧.本节所涉及的方法都是证明不等式时常用的基本方法.

1. 比较法

分比差和比商两种:即欲证明 $A>B$,可以证明 $A-B>0$ 或在 $B>0$ 条件下,证明 $\frac{A}{B}>1$.

2. 分析法

从所求证的不等式出发,将其逐步转化为明显、常见的不等式(注意转化过程中每步应可逆推).

3. 综合法

从已知条件、已知定理和不等式出发,以推理方式,每步阐明原因、根据,逐步推导求出结论.

4. 反证法

从所证不等式不成立的假定出发,推出与已知条件或与事实明显相矛盾的结果,从而证明结论成立.

高考回顾

例1 (2004 · 北京)如果 a,b,c 满足 $c<b<a$,且 $ac<0$,那么下列选项中

不一定成立的是 ( )

A. $ab > ac$　　B. $c(b-a) > 0$

C. $cb^2 < ab^2$　　D. $ac(a-c) < 0$

【解答】C　本题用代数法最快，$a>0, c<0, b$ 分为三种情况，设数 $b>0, b=0, b<0$.

由题知 $a>0, c<0$，而 b 可正可负可零. ①$b>c, a>0 \Rightarrow ab>ac$　②$b-a<0, c<0 \Rightarrow c(b-a)>0$　③反例是 $b=0$ 时 $cb^2<ab^2$　④$a>0, c<0, a-c>0 \Rightarrow ac(a-c)<0$　故正确答案是 C.

例 2 (2004·江苏)已知函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$ 满足下列条件：对任意的实数 x_1, x_2 都有

$\lambda(x_1-x_2)^2 \leqslant (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |x_1-x_2|$，

其中 λ 是大于 0 的常数.

设实数 a_0, a, b 满足

$f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$

(Ⅰ)证明 $\lambda \leqslant 1$，并且不存在 $b_0 \neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$；

(Ⅱ)证明 $(b-a_0)^2 \leqslant (1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；

(Ⅲ)证明 $[f(b)]^2 \leqslant (1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

【证明】(Ⅰ)任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2$，则由

$$\lambda(x_1-x_2)^2 \leqslant (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)] \quad ①$$

和 $$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |x_1-x_2| \quad ②$$

可知

$\lambda(x_1-x_2)^2 \leqslant (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)] \leqslant |x_1-x_2| \cdot |f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |x_1-x_2|^2$，

从而 $\lambda \leqslant 1$.

假设有 $b_0 \neq a_0$ 使得 $f(b_0)=0$，则由①式知 $0<\lambda(a_0-b_0)^2 \leqslant (a_0-b_0)[f(a_0)-f(b_0)]=0$，矛盾.

$\therefore$ 不存在 $b_0 \neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$.

(Ⅱ)由 $$b=a-\lambda f(a), \quad ③$$

可知

$$(b-a_0)^2=[a-a_0-\lambda f(a)]^2$$
$$=(a-a_0)^2-2\lambda(a-a_0)f(a)+\lambda^2[f(a)]^2. \quad ④$$

由 $f(a_0)=0$ 和①式，得

$(a-a_0)f(a)=(a-a_0)[f(a)-f(a_0)]\geqslant\lambda(a-a_0)^2.$ ⑤

由 $f(a_0)=0$ 和②式知，$[f(a)]^2=[f(a)-f(a_0)]^2\leqslant(a-a_0)^2.$ ⑥

则将⑤、⑥代入④式，得

$(b-a_0)^2\leqslant(a-a_0)^2-2\lambda^2(a-a_0)^2+\lambda^2(a-a_0)^2=(1-\lambda^2)(a-a_0)^2.$

(Ⅲ)由③式，可知

$$\begin{aligned}[f(b)]^2&=[f(b)-f(a)+f(a)]^2\\&=[f(b)-f(a)]^2+2f(a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\\&\leqslant(b-a)^2-2\cdot\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\text{（用②式）}\\&=\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}(b-a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\\&\leqslant\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda\cdot(b-a)^2+[f(a)]^2\text{（用①式）}\\&=\lambda^2[f(a)]^2-2\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2\\&=(1-\lambda^2)[f(a)]^2.\end{aligned}$$

例3 (2004·北京)某段城铁线路上依次有 A,B,C 三站，$AB=5\text{km}$，$BC=3\text{km}$. 在列车运行时刻表上，规定列车8时整从 A 站发车，8时07分到达 B 站并停车1min，8时12分到达 C 站停留1min，并在行驶时以同一速度 $v$km/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(Ⅰ)分别写出列车在 B,C 两站的运行误差；

(Ⅱ)若要求列车在 B,C 两站的运行误差之和不超过2min，求 v 的取值范围.

【解答】(Ⅰ)列车在 B,C 两站的运行误差(单位:min)分别是

$\left|\frac{300}{v}-7\right|$ 和 $\left|\frac{480}{v}-11\right|$.

(Ⅱ)由于列车在 B,C 两站的运行误差之和不超过2min，所以

$\left|\frac{300}{v}-7\right|+\left|\frac{480}{v}-11\right|\leqslant2.$ ①

当 $0<v\leqslant\frac{300}{7}$ 时，①式变形为 $\frac{300}{v}-7+\frac{480}{v}-11\leqslant2$，

解得 $39\leqslant v\leqslant\frac{300}{7}$；

当 $\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11}$ 时，①式变形为 $7-\frac{300}{v}+\frac{480}{v}-11\leqslant2$，

解得$\dfrac{300}{7}<v\leqslant\dfrac{480}{11}$;

当$v>\dfrac{480}{11}$时,①式变形为$7-\dfrac{300}{v}+11-\dfrac{480}{v}\leqslant 2$,

解得$\dfrac{480}{11}<v\leqslant\dfrac{195}{4}$.

综合所述,v 的取值范围是$\left[39,\dfrac{195}{4}\right]$.

奥赛升级

例1 (2000·河北竞赛)已知 a、$b\in\mathbf{R}^*$,m、$n\in\mathbf{R}$,$m^2n^2>a^2m^2+b^2n^2$,令 $M=\sqrt{m^2+n^2}$,$N=a+b$,则 M 与 N 的关系是(　　).

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 不能确定

【思路导航】 用综合法,比较 M 与 N 的大小,等价于比较 M^2 与 N^2.

【解答】A.

显然 $m^2n^2\neq 0$. 不等式两边同除以 m^2n^2,得$\dfrac{a^2}{n^2}+\dfrac{b^2}{m^2}<1$. 此不等式两边再同乘 m^2+n^2,得

$$m^2+n^2>(m^2+n^2)\left(\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}\right)=a^2+b^2+\frac{m^2}{n^2}a^2+\frac{n^2}{m^2}b^2\geqslant$$

$$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.$$

【点津】 作差比较法,作差后的变形要有目的,作差的目的在于判断它的符号. 因此,变形的主要方法有分解因式和配方.

例2 已知 $0<x<1$,求证:

$$\left|\log_a(1-x)\right|>\left|\log_a(1+x)\right|.$$

【证法一】 作差,并分两种情形.

(Ⅰ)当 $0<a<1$ 时,因 $0<x<1$,故

$$\begin{aligned}&\left|\log_a(1-x)\right|-\left|\log_a(1+x)\right|\\&=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)\\&=\log_a(1-x^2)>0.\end{aligned}$$

(Ⅱ)当 $a>1$ 时,因 $0<x<1$,故

$$\left|\log_a(1-x)\right| - \left|\log_a(1+x)\right|$$
$$= -\log_a(1-x) - \log_a(1+x)$$
$$= -\log_a(1-x^2) > 0.$$

综合(Ⅰ),(Ⅱ),知不等式成立.

【证法二】 因为$0<x<1$,所以$\left|\log_a(1-x)\right|>0$,$\left|\log_a(1+x)\right|>0$,有

$$\frac{\left|\log_a(1-x)\right|}{\left|\log_a(1+x)\right|} = \left|\log_{(1+x)}(1-x)\right| = -\log_{(1+x)}(1-x)$$
$$= \log_{(1+x)}\frac{1}{1-x} = \log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}$$
$$> \log_{(1+x)}(1+x) = 1,$$

所以不等式成立.

例3 设有n个实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足条件:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$中最小者为a,最大者为b,分别记作$a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$b=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 求证:$ab\leqslant -\frac{1}{n}$.

【证明】 只须证明

$$1+nab\leqslant 0 \quad ①$$

根据题设条件,①可改写为

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)(a+b)+nab\leqslant 0 \quad ②$$

②又可改写为

$$[x_1^2-(a+b)x_1+ab]+[x_2^2-(a+b)x_2+ab]+\cdots+[x_n^2-(a+b)x_n+ab]\leqslant 0 \quad ③$$

现只须再证明

$$x_i^2-(a+b)x_i+ab\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$$

即 $$(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n) \quad ④$$

④式显然成立,故命题得证.

【点津】 将①改为②,是本例分析中关键一步. 这一"妙招"与发掘题设

中所隐含的关系$(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0$,可以说是一脉相承.

例4 设$\triangle ABC$的三边分别是a、b、c.求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2$.

【思路导航】 左边的不等式是平方和与积的关系,我们可用$a^2+b^2\geqslant 2ab$来证,右边的不等式在证明时,要注意应用“在同一三角形中,任意两边之和大于第三边”.

【证明】 $\because a^2+b^2\geqslant 2ab, b^2+c^2\geqslant 2bc, c^2+a^2\geqslant 2ca$.

将上面三个不等式相加,得

$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

$\because a$、b、c是三角形的三边

$\therefore a+b>c, b+c>a, a+c>b$

$\therefore ac+bc>c^2, ba+ca>a^2, ab+bc>b^2$

将上面三个不等式相加,得

$$2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$$

又$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca<4(ab+bc+ca)$

$\therefore \frac{1}{4}(a+b+c)^2<ab+bc+ca$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2$

思维对接

下面这个不等式证法多多,从不同角度切入,会有不同证法,堪称一题多证的典型.

例 已知$a,b\in\mathbf{R}^+$,且$a+b=1$,求证:$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$.

【证法一】(分析法):

原不等式等价于$(a^2+1)(b^2+1)\geqslant\frac{25}{4}ab$

即$4(ab)^2+4(a^2+b^2)-25ab+4\geqslant 0$

由于$a+b=1$,则有$a^2+b^2=1-2ab$,代入得

$4(ab)^2+4(1-2ab)-25ab+4\geqslant 0$

即 $4(ab)^2-33ab+8\geqslant 0$

要证此，只须证得 $ab\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $ab\geqslant 8$ 即可.

而由 $a+b=1(a,b\in\mathbf{R}^*)$ 知 $ab\geqslant 8$ 不可能.

又恰有 $2\sqrt{ab}\leqslant a+b=1$，即有 $ab\leqslant\frac{1}{4}$ 成立.

则原式得证

【证法二】(比较法)：

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})-\frac{25}{4}=\frac{4(ab)^2+4(a^2+b^2)-25ab+4}{4ab}$$

$$=\frac{(4ab-1)(ab-8)}{4ab}$$

易见 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}$，$ab-8<0$，$\therefore\ \frac{(4ab-1)(ab-8)}{4ab}\geqslant 0$

此即 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})-\frac{25}{4}\geqslant 0$

亦即 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$

【证法三】(比较法)：

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{(ab)^2+(1-2ab)+1}{ab}=\frac{(1-ab)^2+1}{ab}$$

由于 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}$，则 $1-ab\geqslant\frac{3}{4}$，有 $(1-ab)^2+1\geqslant\frac{25}{16}$，

结合 $\frac{1}{ab}\geqslant 4$，便得 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$.

【证法四】(三角法)：

由于 $a,b\in\mathbf{R}^*$ 且 $a+b=1$

令 $a=\sin^2\alpha,b=\cos^2\alpha,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\therefore\ (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{\sin^4\alpha\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^4\alpha\cos^4\alpha+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1)^2+1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-1)^2+1}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}$$

$$=\frac{(4-\sin^2 2\alpha)^2+16}{4\sin^2 2\alpha}.$$

$\because 0<\sin^2 2\alpha\leqslant 1$

$\therefore 4-\sin^2 2\alpha\geqslant 3$

$\therefore (4-\sin^2 2\alpha)^2+16\geqslant 25$

而$\frac{1}{4\sin^2\alpha}\geqslant\frac{1}{4}$

则$[(4-\sin^2 2\alpha)^2+16]\cdot\frac{1}{4\sin^2 2\alpha}\geqslant\frac{25}{4}$

即$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}.$

【证法五】(均值代换法):

由 $a+b=1$,可设 $a=\frac{1}{2}+t,b=\frac{1}{2}-t$,这里$|t|<\frac{1}{2}.$

则有$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{(\frac{5}{4}+t+t^2)(\frac{5}{4}-t+t^2)}{(\frac{1}{2}+t)(\frac{1}{2}-t)}=\frac{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}t^2+t^4}{\frac{1}{4}-t^2}$

$\because |t|<\frac{1}{2},\therefore 0<\frac{1}{4}-t^2\leqslant\frac{1}{4},\frac{25}{16}+\frac{3}{2}t^2+t^4\geqslant\frac{25}{16}$,则可见$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{16}/(\frac{1}{4})=\frac{25}{4}.$

【证法六】(求导法):

由 $b=1-a$,得

$$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=(a+\frac{1}{a})(1-a+\frac{1}{1-a})$$

$$=a-a^2-2+\frac{3}{2a}+\frac{3}{2(1-a)}$$

令 $f(a)=a-a^2-2+\frac{3}{2a}+\frac{3}{2(1-a)}$

则$f'(a)=1-2a-\frac{3}{2a^2}+\frac{3}{2(1-a)^2}$

$$=(1-2a)+\frac{3(2a-1)}{2a^2(1-a)^2}$$

$$=(2a-1)\left[\frac{3}{2a^2(1-a)^2}-1\right] \quad ①$$

由于 $a(1-a)\leqslant\left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

$$\therefore \frac{3}{2a^2(1-a^2)}-1>0 \quad ②$$

若令 $f'(a)=0$，则由①②知，有且只有 $2a-1=0$，即有且只有一解 $a=\frac{1}{2}$，使 $f'(a)=0$，此点即为 $f(a)$ 的极值点，此时 $f(a)=\frac{25}{4}$，经检验知此值必为极小值.（若不然，即若此时 $f(a)=\frac{25}{4}$ 为极大值. 取 $a=\frac{1}{3}$，得 $f(a)=\frac{65}{9}>\frac{25}{4}$）.

边学边练

A 卷

1. $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且 $d>c,a+b=c+d,a+d<b+c$，则 （　　）

A. $d>b>a>c$　　B. $b>c>d>a$

C. $b>d>c>a$　　D. $b>d>a>c$

2. 设 $a<b<c<d,x=(a+b)(c+d),y=(a+c)(b+d),z=(a+d)(b+c)$，则 （　　）

A. $x<y<z$　　B. $x<z<y$

C. $y<x<z$　　D. $z<y<x$

3. 设 $a<b<c$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.

4. 设 $x>a>0$，求证：$x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.

5. $n\in\mathbf{N},n\geqslant3$. 求证：$n^{n+1}>(n+1)^n$.

6. 已知 $a>0,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}$，求证：$\frac{1+a+\cdots+a^n}{a+a^2+\cdots+a^{n-1}}\geqslant\frac{n+1}{n-1}$.

7. 已知 p,q,r 为非负实数，且 $p^2+q^2+r^2=2$，求证：$p+q+r-pqr\leqslant2$.

8. 已知$A+B+C=\frac{\pi}{2}$,求证:$\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{1}{8}$.

B　卷

1. 已知:a,b,c是互不相等的正数,求证:$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

2. 对于实数$x_1,x_2,\cdots,x_n,x_1+x_2+\cdots+x_n=0$,求证:不等式$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leqslant0$在$n=3,4$时成立,$n\geqslant5$时不成立.

3. 已知$0<a<1,0<b<1,0<c<1$.求证:$(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$中至少有一个不大于$\frac{1}{4}$.

4. 已知:$a>0,a\neq1,0<b<1$,试证:$|\log_a(1-b)|>|\log_a(1+b)|$.

5. 已知实数x,y,z满足条件$x+y+z=a,x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$,其中$a>0$.试证:$0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}a,0\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}a,0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a$.

6. 已知a_1,a_2,b_1,b_2都是正数,试证:$\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}\geqslant\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2}$.

7. 设$b+c>a\geqslant b\geqslant c>0$,求证:$2(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3$.

8. 若$a,b,c>0$,求证:$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

9. 已知$0<a<1,x^2+y=0$,求证:$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a2+\frac{1}{8}$.

第二节　基本技巧

考点对接

在不等式的证明中,放缩、换元、构造以及利用判别式都是证明不等式的重要技巧.

1. 放缩

基本方法:欲证明$A\geqslant B$,通过适当的放大,使得$B\leqslant B_1,B_1\leqslant B_2,\cdots,B_{n-1}$

$\leq B_n, B_n \leq A$,或通过适当的缩小,使得 $A \geq A_1, A_1 \geq A_2, \cdots, A_{n-1} \geq A_n, A_n \geq B$. 基本思路:我们设法寻找一个或多个中间量 M,使关系式 $A > M > B$ 成立,根据不等式的传递性,可知 $A \geq B$ 成立.

2. 换元

基本方法:将一个较复杂的代数式视为一个整体,用一个字母代换它.

基本思路:通过代换,简化原有结构,实现某种变通.

3. 构造

基本思路是:以已知条件为原料,以所求证的不等式为方向,构造出一种新的数学模型,使所求证的不等式在新的数学模型中得到简捷的证明. 用构造法证明不等式常用的数学模型有函数,几何图形等.

4. 利用判别式

主要有两种类型:一类是根据实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根的充要条件 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ 来建立不等关系;另一类是根据实系数二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 恒大于等于零的充要条件 $\Delta=b^2-4ac\leq 0$ 来推导所求证的不等式成立.

高考回顾

例1 (2001 · 全国)已知 i、m、n 是正整数,且 $1<i\leq m<n$.

(Ⅰ)证明:$n^i A_m^i < m^i A_n^i$;

(Ⅱ)证明:$(1+m)^n > (1+n)^m$.

【思路导航】 应将排列数展开来寻求关系.

【解答】 (Ⅰ)证明:对于 $1<i\leq m$,有

$$A_m^i = m(m-1)\cdots(m-i+1),$$

$$\frac{A_m^i}{m^i} = \frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-i+1}{m}.$$

同理有 $\dfrac{A_n^i}{n^i} = \dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{n-i+1}{n}$.

$\because m<n$,且 $\dfrac{n-k}{n} > \dfrac{m-k}{m}$,$(k=1,2,\cdots,i-1)$.

$\therefore \dfrac{A_n^i}{n^i} > \dfrac{A_m^i}{m^i}$

即 $m^i\mathrm{A}_n^i > n^i\mathrm{A}_m^i$.

(Ⅱ)由二项式定理,有

$(1+m)^n=\sum\limits_{i=0}^{m}m^i\mathrm{C}_n^i,(1+n)^m=\sum\limits_{i=0}^{m}n^i\mathrm{C}_m^i$,由(Ⅰ)知 $m^i\mathrm{A}_n^i > n^i\mathrm{A}_m^i(1<i\leqslant m<n)$.

因此,$\sum\limits_{i=2}^{m}m^i\mathrm{A}_n^i > \sum\limits_{i=2}^{m}n^i\mathrm{A}_m^i$,

又 $m^0\mathrm{A}_n^0=n^0\mathrm{A}_m^0=1, m\mathrm{A}_n^1=n\mathrm{A}_m^1=mn$,

$\therefore \sum\limits_{i=0}^{n}m^i\mathrm{A}_n^i > \sum\limits_{i=0}^{m}n^i\mathrm{A}_m^i$,

即 $(1+m)^n>(1+n)^m$.

【点津】 本题把排列数、组合数以及二项式定理等基础知识作为知识背景,与不等式证明相结合,问题有一定难度,是一道考察学生推理论证能力的好题,有可能代表着未来几年高考试卷对不等式证明能力的要求及命题方向.

例2 (2002·广州市质量检测)已知 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x, a>0, b>0, A=f\left(\frac{a+b}{2}\right), G=f(\sqrt{ab}), H=f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$,则 A、G、H 的大小关系是 ( )

A. $A\leqslant G\leqslant H$　　　B. $A\leqslant H\leqslant G$

C. $G\leqslant H\leqslant A$　　　D. $H\leqslant G\leqslant A$

【解答】 $\because f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

$\therefore f(x)$是单调递减函数.

$\because a>0, b>0, \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,

$\therefore \frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{ab}}$,

$\therefore \frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}, \therefore \frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$,

$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant f(\sqrt{ab})\leqslant f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$.

答案:A.

奥赛升级

例1（41 届 IMO）设 a、b、c 是正实数，且满足 $abc=1$. 证明：
$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1.$$

【思路导航】 由于此式含有分式，而且复杂，可考虑换元

【证明】 令 $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$,

其中 x、y、z 为正实数. 则原不等式变为
$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leqslant xyz.$$

记 $u=x-y+z,v=y-z+x,w=z-x+y$.

因为这三个数中的任意两个之和都是正数，所以它们中间最多只有一个是负数.

如果恰有一个是负数，则 $uvw\leqslant 0<xyz$. 不等式得证.

如果这三个数都大于 0，则由算术—几何平均不等式可得
$$\sqrt{uv}=\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)}\leqslant\frac{1}{2}[(x-y+z)+(y-z+x)]=x.$$

同理，$\sqrt{vw}\leqslant y$，$\sqrt{wu}\leqslant z$.

于是，$uvw\leqslant xyz$. 不等式得证.

例2（42 届 IMO）对所有正实数 a、b、c. 证明：
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

【思路导航】 先换元

令 $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$　　$y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}$　　$z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$

于是可得 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=512$

要证 $x+y+z\geqslant 1$ 考虑反证法

【解答】 记 $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}},z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$，则 x、y、$z\in\mathbf{R}^+$,