



丛书主编 陈东旭

2006

同步辅导用书

高二 下册

依据教育部最新《教学大纲》编写

# 学习的艺术

数学

吉林文史出版社

# 学习的艺术

## 数 学 (九 A)

江西金太阳教育研究所

主 编:葛立其

副主编:王希年 吴先胜 刘光清

编 委:(按姓氏笔划排列)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 王希年 | 朱春英 | 何东华 | 吴小平 |
| 吴先胜 | 沈康生 | 闵 睿 | 陈 明 |
| 郭光前 | 彭德泽 | 葛立其 | 蒋玉清 |
| 黎金传 |     |     |     |

吉林文史出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习的艺术. 高二数学(A). 下册 / 陈东旭主编. —长春: 吉林文史出版社, 2005. 10  
ISBN 7-80702-311-2

I. 学... II. 陈... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 115206 号

书 名 学习的艺术(高二)  
丛书主编 陈东旭  
责任编辑 周海英  
出版发行 吉林文史出版社  
地 址 长春市人民大街 4646 号 130021  
印 刷 江西法制报社印务公司  
规 格 787 mm × 1092 mm  
开 本 16 开本  
印 张 125 印张  
字 数 3625 千字  
版 次 2005 年 10 月第 1 版 2005 年 10 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 7-80702-311-2  
定 价 150.00 元



# 前

# 言



## “金太阳”告诉您

### ——数学学习的艺术

数学是颇令人头疼的一门学科,许多学生为之投入了太多的时间,而成绩不佳,颇有“事倍而功半”的味道,于是乎,一片“数学难,难于上青天”的怨言.从根本上讲,这种现象是同学们没有掌握正确的学习方法造成的.我们说,学习是科学,但它更是一门艺术!如果真正掌握了学习方法,跨入了学习艺术的门槛,那么,许多难题也就迎刃而解了,也就起到了“事半功倍”的效果,这正是我们所追求的.

《学习的艺术》是什么?总体说来,主要是三个方面:

其一,对概念和定义进行严密的思考.只有全面深刻地理解概念的内涵与外延,构成完整的知识网络,才能在解题过程中有据可依,而不是乱套公式与定理.

其二,对例题与结论进行认真分析.书本上的例题是非常典型的,它们对理解概念、性质等都有着很好的帮助作用.而例题的解法更是经典的,既起到示范的作用,又揭示着某种规律性的东西.因此,那种对例题轻描淡写或者囫圇吞枣地看一下的做法是极端错误的.

其三,课外练习既要有针对性也要有一定的量.搞“题海战术”,毫无目标地乱做一气是错误的,然而“光说不练”同样也是不可取的.练习要有选择,要有针对性.在做题的过程中要思考“为什么这样做”,做完后要思考“有何规律,能否变形与拓展”.只有这样,才能起到做练习的作用,同时也会有做题的乐趣.

《学习的艺术》丛书,秉承“授人以鱼,不如授人以渔”的教育理念,带领大家跨入了学习艺术的门槛……

#### 课前导航

用趣味性、知识性、规律性的数学知识引导你学习,提高学习兴趣.

#### 要点索引

在透彻分析教材知识体系的基础上,把各个知识点系统化、网络化,使其易懂、易记、易用.

#### 范例导学

依据知识结构,精心挑选典型例题,展示经典解法;题后变式,展现“变中学”的乐趣.

#### 思维进阶

深入研究,提高层次,通过综合型例题,进一步提升解题技巧与知识综合能力,突破知识难点,跨越学习障碍.

#### 错解剖析

展现普遍性错误,探究根源所在,揭示规避方法与技巧.

#### 课时综述

概括重点难点,揭示命题规律,总结方法技巧,便于寻找解题突破口与切入点.

#### 针对训练

按照新颖性、基础性、方向性的原则,挑选具有思辨内涵的习题与知识形成完整的体系,以起到巩固所学、强化所学之功效.

编者

2005年10月

# 金 太 阳 系 列 丛 书

特别鸣谢以下学校的大力协助:

|      |                                              |                                                   |                                                |                                              |                                              |
|------|----------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 江西省: | 南昌二中<br>南昌十中<br>抚州一中<br>赣州一中<br>修水一中<br>鹰潭一中 | 江西师大附中<br>吉安一中<br>新建二中<br>江西南大附中<br>安福中学<br>景德镇一中 | 南昌一中<br>白鹭洲中学<br>上高二中<br>玉山一中<br>上饶一中<br>赣州市三中 | 南昌三中<br>新余一中<br>宜春中学<br>南康中学<br>萍乡中学<br>安义中学 | 临川一中<br>新余四中<br>临川二中<br>赣县中学<br>九江一中<br>峡江中学 |
| 北京市: | 北京四中<br>首都师大附中                               | 北京景山学校<br>北师大附中                                   | 清华大学附中<br>北京二中                                 | 北师大附属实验中学<br>北京二十中                           |                                              |
| 天津市: | 南开中学                                         | 耀华中学                                              | 天津实验中学                                         | 大港一中                                         | 静海县一中                                        |
| 河北省: | 邯郸一中                                         | 唐山市一中                                             | 衡水中学                                           | 正定中学                                         | 遵化一中                                         |
| 内蒙古: | 内蒙古师大附中                                      | 呼和浩特市二中                                           | 赤峰市二中                                          |                                              |                                              |
| 山西省: | 太原五中 临汾一中                                    | 平遥中学 运城中学                                         | 大同一中                                           | 晋城一中                                         | 怀仁县一中 沁县中学                                   |
| 辽宁省: | 沈阳市二中                                        | 东北育才中学                                            | 大连市八中                                          | 庄河高中                                         |                                              |
| 吉林省: | 东北师大附中<br>松原前郭五中                             | 省实验中学<br>松原市第二中学                                  | 长春市实验中学                                        | 吉林市一中                                        | 延边市二中                                        |
| 黑龙江: | 哈尔滨市六中                                       | 哈尔滨市九中                                            | 鸡西市一中                                          | 齐齐哈尔市实验中学                                    |                                              |
| 江苏省: | 南京师大附中<br>姜堰中学                               | 南京外国语学校<br>盐城中学                                   | 南京一中<br>徐州一中                                   | 南通中学<br>张家港高中                                | 启东中学                                         |
| 浙江省: | 杭州高级中学<br>浙师大附中                              | 浙江大学附中<br>东阳中学                                    | 宁波效实中学<br>衢州二中                                 | 诸暨学勉中学<br>绍兴柯桥中学                             | 金华市一中<br>温州中学                                |
| 山东省: | 省实验中学<br>滨州市北镇中学                             | 济南市一中<br>烟台市二中                                    | 青岛市二中<br>济宁市实验中学                               | 曲阜师大附中<br>牟平一中                               | 潍坊市一中                                        |
| 安徽省: | 合肥市一中                                        | 马鞍山市二中                                            | 安庆市一中                                          | 濉溪中学                                         |                                              |
| 福建省: | 福建师大附中                                       | 南平高级中学                                            | 福州三中                                           | 龙岩二中 龙岩一中                                    | 南平一中                                         |
| 河南省: | 河南大学附中                                       | 开封市高中                                             | 潢川一中                                           | 新乡市一中                                        | 平舆二高                                         |
| 湖北省: | 华中师大一附中<br>水果湖中学                             | 黄冈中学<br>武汉二中                                      | 荆州中学<br>荆门市一中                                  | 武汉中学<br>仙桃中学                                 | 天门中学                                         |
| 湖南省: | 湖南师大附中<br>沅江市三中                              | 长沙市一中<br>岳阳市一中                                    | 郴州市一中<br>岳阳县一中                                 | 株洲市二中<br>桑植一中                                | 衡阳市八中<br>株洲市南方中学                             |
| 广东省: | 华南师大附中<br>深圳教育学院附中                           | 广东省实验中学<br>顺德市一中                                  | 汕头金山中学<br>高州中学                                 | 惠州市一中                                        |                                              |
| 广西:  | 广西师大附中                                       | 南宁市二中                                             | 北海市教科所                                         | 桂林市临桂中学                                      |                                              |
| 四川省: | 成都市七中<br>彭州中学                                | 成都石室中学<br>南充高级中学                                  | 成都市十二中<br>攀枝花市三中                               | 四川师大附中                                       | 新都一中                                         |
| 重庆市: | 西南师大附中                                       | 重庆市一中                                             | 重庆市十一中                                         | 重庆市三中                                        | 重庆市八中                                        |
| 贵州省: | 凯里市一中                                        | 贵阳师大附中                                            | 兴义市一中                                          |                                              |                                              |
| 云南省: | 昆明一中                                         | 昆明三中                                              | 宣威一中                                           | 大理一中                                         | 曲靖一中                                         |
| 西藏:  | 拉萨中学                                         |                                                   |                                                |                                              |                                              |
| 陕西省: | 陕西师大附中<br>咸阳中学                               | 西安中学<br>韩城象山中学                                    | 安康中学<br>绥德中学                                   | 延安中学<br>榆林市第一中学                              | 渭南市瑞泉中学<br>榆林中学                              |
| 甘肃省: | 西北师大附中                                       | 兰州市一中                                             | 天水一中                                           |                                              |                                              |
| 宁夏:  | 宁夏大学附中                                       | 银川市一中                                             | 银川市唐徕回民中学                                      |                                              |                                              |
| 新疆:  | 新疆实验中学                                       | 乌鲁木齐一中                                            | 库尔勒华山中学兵团二中                                    |                                              | 乌鲁木齐铁路三中                                     |

(限于篇幅仅列部分学校,敬请谅解)

## 第九章 直线、平面、简单几何体

|                               |      |
|-------------------------------|------|
| §9.1 平面(第1课时)                 | (1)  |
| §9.1 平面(第2课时)                 | (4)  |
| §9.2 空间直线(第1课时)               | (7)  |
| §9.2 空间直线(第2课时)               | (10) |
| §9.3 直线与平面平行的判定和性质            | (13) |
| §9.4 直线与平面垂直的判定和性质(第1课时)      | (16) |
| §9.4 直线与平面垂直的判定和性质(第2课时)      | (18) |
| §9.4 斜线在平面内的射影,直线与平面所成角(第3课时) | (21) |
| §9.4 三垂线定理及其逆定理(第4课时)         | (24) |
| §9.4 三垂线定理及其逆定理(第5课时)         | (28) |
| 小结与复习(§9.1~§9.4)              | (31) |
| §9.5 两个平面平行的判定和性质             | (36) |
| §9.6 二面角(第1课时)                | (39) |
| §9.6 二面角(第2课时)                | (42) |
| §9.6 两个平面垂直的判定和性质(第3课时)       | (46) |
| §9.6 两个平面垂直的判定和性质(第4课时)       | (49) |
| 小结与复习(§9.5~§9.6)              | (51) |
| §9.7 棱柱(第1课时)                 | (55) |
| §9.7 棱柱(第2课时)                 | (58) |
| §9.8 棱锥(第1课时)                 | (61) |
| §9.8 棱锥(第2课时)                 | (64) |
| §9.8 多面体和欧拉定理(第3课时)           | (67) |
| §9.9 球(第1课时)                  | (70) |
| §9.9 球(第2课时)                  | (73) |

目

录

Contents



# Contents

|                   |      |
|-------------------|------|
| 小结与复习 (§9.7~§9.9) | (76) |
|-------------------|------|

## 第十章 排列、组合和二项式定理

|                     |       |
|---------------------|-------|
| §10.1 分类计数原理与分步计数原理 | (81)  |
| §10.2 排列(第1课时)      | (83)  |
| §10.2 排列(第2课时)      | (86)  |
| §10.2 排列(第3课时)      | (88)  |
| §10.3 组合(第1课时)      | (90)  |
| §10.3 组合(第2课时)      | (93)  |
| §10.3 排列与组合(第3课时)   | (95)  |
| §10.4 二项式定理(第1课时)   | (98)  |
| §10.4 二项式定理(第2课时)   | (100) |
| 小结与复习 (§10.1~§10.4) | (103) |

## 第十一章 概 率

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| §11.1 随机事件的概率(第1课时)       | (106) |
| §11.1 随机事件的概率(第2课时)       | (108) |
| §11.2 互斥事件有一个发生的概率(第1课时)  | (111) |
| §11.2 互斥事件有一个发生的概率(第2课时)  | (113) |
| §11.3 相互独立事件同时发生的概率(第1课时) | (116) |
| §11.3 相互独立事件同时发生的概率(第2课时) | (119) |
| §11.3 相互独立事件同时发生的概率(第3课时) | (123) |
| 小结与复习 (§11.1~§11.3)       | (125) |
| 参考答案                      | (130) |

## 第九章

## 直线、平面、简单几何体



## § 9.1 平面(第1课时)



知识海洋 太阳领航

课前提导

## 数学巨著《几何原本》

中学几何学大部分来自欧几里得的巨著《几何原本》，因此，搞清《几何原本》的形成、内容及作用对学习中学几何史无疑是重要的。

几何学经过漫长的萌芽时期之后，进入了独立的几何学形成时期，这一时期的代表著作就是欧几里得的《几何原本》。

《几何原本》的内容除了几何以外还有初等数论及初等代数。这部书有 13 卷，共计 465 个命题，中学几何的大部分内容来自这里。

第 11、12、13 卷讲的是立体几何，其中大部分是现行中学课本上的内容。例如，关于空间中的直线和平面的定义、定理，关于平行六面体的定理，关于球体的论述及球的五种内接正多面体的作图法等。

《几何原本》集前人数学研究之精华，以当时无与伦比的优点取代了以前所有的几何课本。在希腊之前的漫长年代里，人们的几何知识还处在零散的、互不联系的状态中，而欧几里得在《几何原本》中，由定义、公理和公设出发，从简到繁，有条不紊地陈述了一系列定理，对前人证明不够严密的所有定理都给出了论证，它对数学能在严密的推理中不断发展有极其深远的影响，《几何原本》的表现形式被称为公理的形式，这种形式已成为现代数学的原型，这种公理化的方法在今天已渗透于数学的各个领域。

2000 多年来，《几何原本》这本世界上古老的数学巨著，在没有印刷术的古代，人们辗转传抄它作为数学教材，并把它译成多种文字，直到五十多年前，欧洲和美洲各国的学校还在用翻译的《几何原本》作为教科书。就是今天，各国中学几何课的主要内容也是来自

《几何原本》。1607 年我国数学家徐光启在利玛窦的协助下，将《几何原本》的前六卷译成中文，这对中国数学的发展有很大影响。



基础知识 不可忽视

要点索引

## 1. 平面的概念

平面是一个描述而不定义的原始概念，立体几何中所说的平面是从生活中常见的平面（如桌子的表面，黑板面，平静的水面等）中抽象出来的，生活中的平面是比较平且有限的，我们在立体几何中所要研究的平面是绝对的平且无限延展的。

## 2. 平面的画法

(1) 在立体几何中通常用平行四边形来表示平面，但有时也用三角形、圆等其他平面图形来表示平面。

(2) 水平放置的平面：通常用锐角为  $45^\circ$ ，横边是邻边的 2 倍的平行四边形来表示水平放置的平面。

(3) 两个相交平面：当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，被遮住的部分要画成虚线或者不画。

## 3. 平面的表示

(1) 用一个希腊字母表示，如：平面  $\alpha$ 、平面  $\beta$ 、平面  $\gamma$ 。

(2) 用多边形的一条对角线的两个端点字母表示，如：平面  $AC$ 、平面  $BD$ 。

(3) 用多边形的各个顶点的字母表示，如：平面  $ABC$ 、平面  $ABCD$ 。

## 4. 平面的基本性质

公理 1 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线。

公理 3 经过不在一条直线上的三个点，有且只有



一个平面。

推论1 经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面。

推论2 经过两条相交直线,有且只有一个平面。

推论3 经过两条平行直线,有且只有一个平面。

名师指点 注意领悟

### 范例导学

#### 1. 符号语言表述

【例1】用符号语言及文字语言描述图9-1-1,并画出平面ABC和平面 $\alpha, \beta$ 的交线。



图9-1-1

【分析】要画出两个平面的交线,根据公理1和公理2,只要找出它们的两个公共点,显然平面ABC和 $\alpha$ 已有两个公共点A、B,延长AB交 $l$ 于D,  $D \in$ 平面 $\beta$ ,即为平面ABC与平面 $\beta$ 的第二个交点。

【解析】如图9-1-1所示,  $\alpha \cap \beta = l, A \in \alpha, B \in \alpha, AB \not\subset l, C \in \beta, A, B, C$ 均不在 $l$ 上。

注意画两平面交线的方法。

作法:延长AB交 $l$ 于D,连结CD,则平面ABC与平面 $\alpha, \beta$ 的交线AD、DC即为所求,如图9-1-2所示。

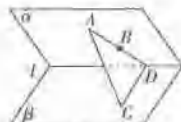


图9-1-2

【变式1】把下列文字叙述改写成数学符号表示:

点A在直线 $a$ 上,记作\_\_\_\_\_,点A不在直线 $a$ 上,记作\_\_\_\_\_;

点A在平面 $\alpha$ 内,记作\_\_\_\_\_,点A不在平面 $\alpha$ 内,记作\_\_\_\_\_;

直线 $l$ 在平面 $\alpha$ 内,记作\_\_\_\_\_,直线 $l$ 不在平面 $\alpha$ 内,记作\_\_\_\_\_;

直线 $l$ 和直线 $m$ 相交于点A,记作\_\_\_\_\_,直线 $l$ 和平面 $\alpha$ 相交于点A,记作\_\_\_\_\_;

平面 $\alpha$ 和平面 $\beta$ 相交于直线 $a$ ,记作\_\_\_\_\_。

#### 2. 平面划分空间

【例2】三个平面可将空间分成几部分? 试用图形表示出各种不同的情况。

【分析】本题可用递进的方法,先考虑两个平面的情况,然后再添加第三个平面后的各种情况加以讨论。

【解析】(1)  $\alpha \parallel \beta$ ,若 $\gamma$ 与二者皆平行,则空间被分成4个部分,如图9-1-3(1)所示。

(2)  $\alpha \parallel \beta$ ,若 $\gamma$ 与二者皆相交,或 $\alpha \cap \beta = l, \gamma$ 与 $\alpha, \beta$ 都相交且三条交线重合,则空间被分成6个部分,如图9-1-3(2)所示。

(3)  $\alpha \cap \beta = l$ ,若 $\gamma$ 与 $\alpha, \beta$ 都相交且三条交线共点,则空间被分成8个部分,如图9-1-3(3)所示。

(4)  $\alpha \cap \beta = l$ ,若 $\gamma$ 与 $\alpha, \beta$ 都相交且三条交线平行,空间被分成7个部分,如图9-1-3(4)所示。

你会这样分类吗?

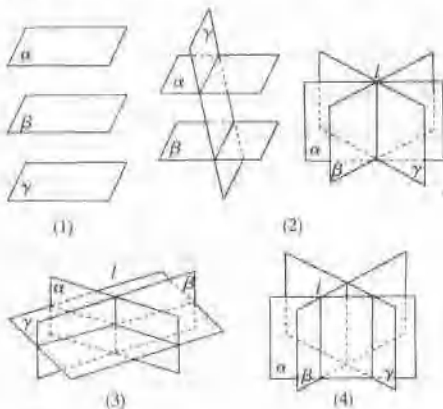


图9-1-3

【变式2】正方体各面所在的平面可将空间分成几部分?



**【例】**如图 9-1-4 所示,已知直线  $a \parallel b$ , 直线  $m$  与  $a, b$  分别交于点  $A, B$ , 求证: 经过  $a, b, m$  有且仅有一个平面.

**【分析】**证明三线共面与证明三线确定一个平面是不同的,前者只要证明平面的存在性即可,而后者则不但要证明其存在性,还要证明其唯一性,而反证法是证明唯一性的常用方法,“有且仅有”指的就是“确定”.

**【解析】** $\because a \parallel b, \therefore$  过  $a, b$  有一个平面  $\alpha$ , 又  $m \cap a = A, m \cap b = B, \therefore A \in a \subset \text{平面 } \alpha, B \in b \subset \text{平面 } \alpha$ , 又  $A \in m, B \in m, \therefore m \subset \text{平面 } \alpha$ , 也就是说  $a, b, m$  共面.

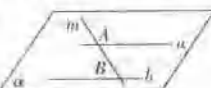


图 9-1-4

反过来,设经过  $a, b, m$  有另一个平面  $\beta$ , 且  $\beta$  不同于  $\alpha$ .

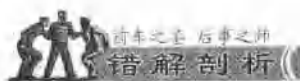
则  $a \subset \text{平面 } \alpha, b \subset \text{平面 } \alpha, a \subset \text{平面 } \beta, b \subset \text{平面 } \beta$ , 这就与  $a \parallel b$  时经过  $a, b$  有且仅有一个平面相矛盾.

因此,经过  $a, b, m$  有且仅有一个平面.

**练习:**

已知  $A, B, C, D$  四点不共面, 求证:  $A, B, C, D$  中任意三点不共线.

要掌握方法!

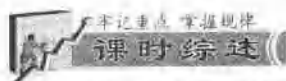


**【例】**在空间中有  $A, B, C, D, E$  五个点, 已知  $A, B, C, D$  共面,  $B, C, D, E$  共面, 那么这五个点\_\_\_\_\_.

**【错解】**一定共面.

**【剖析】**没有对这五个点的相对位置进行分类讨论.

**【正解】**当  $B, C, D$  三点共线时, 这五个点可能共面, 也可能不共面; 当  $B, C, D$  三点不共线时, 这五个点一定共面.



1. 平面是一个只描述而不定义的最基本的原始概念, 平面是无限延展的, 因此它没有边界, 没有厚薄, 也没有面积.

2. 公理 1 用来判断直线与平面的位置关系, 公理 2 用来判定两个平面是否相交或者证明空间点共线, 而公理 3 则用来确定一个平面.

3. 要准确理解“有且只有一个”: 有——存在, 只有一个——唯一.

## § 9.1 平面(第2课时)



知识海洋 太阳领航  
课前导航

### 生活中的“平面”问题

我们知道,自行车用一只撑脚就能停放平稳;一扇门用两个合页和一把锁就可把门固定在墙面上;而用两根拉紧的细绳就能检验桌子的四条腿的底端是否齐平.

我们还知道,照相机支架、水准仪的腿只用三条而不用四条,课桌、凳子的腿却用四条而不用三条.这些事实的存在,肯定是有道理的.

同学们能从数学的角度来解释这些道理吗?



基础知识 不可忽视  
要点索引

#### 1. 公理与推论

#### 2. 公理的作用:

(1)公理1的第一个作用是判定直线在平面内;第二个作用是判定点在平面内,即如果直线上两点在平面内,点在这条直线上,则点在平面内.

(2)公理2的第一个作用是判定两平面相交;第二个作用是判定点在直线上,即问“点是什么点,线是什么线”,若点是某两个平面的公共点,线是这两个平面的公共直线,则这个点在这条直线上;第三个作用是它是画两个平面相交的交线的依据.

(3)公理3及其三个推论的作用是确定平面.

#### 3. 公理的应用:

利用平面的基本性质,即公理1,2,3及公理3的三个推论,可以证明共线、共点、共面问题.



名师指点 注意领悟  
范例导学

#### 1. 多线共面

【例1】已知一条直线与三条平行直线都相交,求证:这四条直线共面.

【分析】先将已知和求证改写成符号语言.证明诸线共面,可先由其中的两条直线确定一个平面.然后再证明其余的直线均在此平面内即可.

于是原命题可改写为:如图9-1-6所示,已知  $a \parallel b \parallel c$ ,  $l \cap a = A$ ,  $l \cap b = B$ ,  $l \cap c = C$ , 求证:直线  $a, b, c, l$  共面.

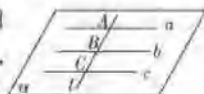


图 9-1-6

【证明】 $\because a \parallel b$ ,

$\therefore a$  和  $b$  可以确定一个平面  $\alpha$ .

$\because l \cap a = A, l \cap b = B$ ,

$\therefore A \in \alpha, B \in \alpha$ , 故  $l \subset \alpha$ ,

又  $a \parallel c$ ,

$\therefore a$  和  $c$  确定一个平面  $\beta$ .

同理  $l \subset \beta$ .

即  $l$  和  $a$  既在  $\alpha$  内又在  $\beta$  内,且  $l$  与  $a$  相交,

$\therefore l$  与  $a$  确定一个平面,故  $\alpha, \beta$  重合,

即直线  $a, b, c, l$  共面.

【变式1】如图9-1-7所示,经过直线  $a$  外一点  $A$ ,引三条直线分别与  $a$  相交于  $B, C, D$ . 求证:  $a, AB, AC, AD$  四线共面.

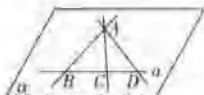


图 9-1-7



## 2. 多点共线



【例2】如图9-1-8所示,在三棱锥  $A-BCD$  中作截面  $PQR$ ,若  $PQ, CB$  的延长线交于  $M, RQ, DB$  的延长线交于  $N, RP, DC$  的延长线交于  $K$ ,求证:  $M, N, K$  三点共线.

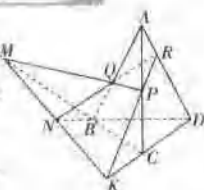


图 9-1-8

【分析】证多点共线可由其中两点确定一条直线后,再证其余的点也在该直线上;也可证这些点同时既在平面  $\alpha$  内,又在平面  $\beta$  内.

【证明】 $\because M \in$  直线  $PQ \subset$  面  $PQR, M \in$  直线  $BC \subset$  面  $BCD$ ,

$\therefore M$  是平面  $PQR$  与平面  $BCD$  的一个公共点,

即  $M$  在面  $PQR$  与面  $BCD$  的交线  $l$  上.

同理可证  $N, K$  也在  $l$  上,  $\therefore M, N, K$  三点共线.

【变式2】如图9-1-9所示,在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,设  $A_1C$  与平面  $ABC_1D_1$  交于  $Q$ ,则  $B, Q, D_1$  三点是否共线?

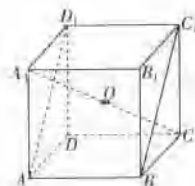


图 9-1-9



百尺竿头 更进一步

## 思维进阶

【例】已知三个平面两两相交,得三条交线,若其中有两条相交,则第三条也过它们的交点.

【分析】设三个平面分别为  $\alpha, \beta, \gamma$  且  $\alpha \cap \beta = c, \alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = a$  (如图9-1-10所示),

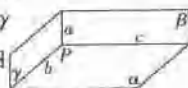


图 9-1-10

$\because$  三条交线中有两条相交.

$\therefore$  不妨设  $b$  与  $c$  相交于一点  $P$ ,故只需证明点  $P \in$  直线  $a$  就行.

【解析】 $\because \alpha \cap \beta = c, \alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = a$ ,不妨设  $b$  与  $c$  相交于一点  $P$ ,则  $b \cap c = P$ .

三线共点的判断方法.

$\because P \in b \subset$  面  $\gamma, \therefore$  点  $P \in$  面  $\gamma$ .

又  $P \in c \subset$  面  $\beta, \therefore$  点  $P \in$  面  $\beta$ .

$\therefore$  点  $P \in$  面  $\beta \cap$  面  $\gamma$ .

又  $\beta \cap \gamma = a, \therefore$  点  $P \in$  直线  $a$ .

故  $a, b, c$  三条交线相交于一点  $P$ .

练习:

如图9-1-11所示,在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F, G, H, K, L$  分别为  $A_1B_1, B_1B, BC, CD, DD_1, A_1D_1$  的中点,求证:  $EF, GH, KL$  共面.

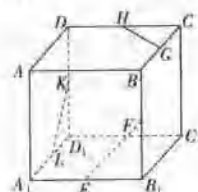


图 9-1-11





【例】在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为  $AB$  的中点,  $F$  为  $A_1A$  的中点, 求证:

- (1)  $E, C, D_1, F$  四点共面;
- (2)  $CE, D_1F, DA$  三线共点.

【错解】(1)  $\because$  四边形  $EFD_1C$  是梯形,

$\therefore E, F, D_1, C$  四点共面.

(2)  $\because$  四边形  $EFD_1C$  是梯形,

$\therefore D_1F$  与  $CE$  交于一点  $P$ .

又  $P$  点在直线  $DA$  上,

$\therefore D_1F, CE, DA$  三线共点.

【剖析】上述错误主要是画出图后, 心里认为正确的不加证明, 或认为没有必要证明, 使该写的步骤省略, 或本身有关性质不熟, 条件未记清楚, 乱凑结论所致.

【正解】如图 9-1-12 所示,

(1) 连结  $D_1F$ , 延长与  $DA$  交点为  $P$ ,  $\because FA \parallel \frac{1}{2}D_1D$ ,

$\therefore PA = AD$ .

同理连结  $CE$ , 延长与  $DA$  交于  $P'$  点,

易知  $AP' = AD$ ,

$\therefore P$  与  $P'$  重合, 记为  $P$ .

则  $PD_1, PC$  确定平面  $\alpha$ .

因此  $E, F, C, D_1$  四点共面.

(2)  $\because D_1F \subset$  平面  $A_1D_1DA$ ,

$\therefore P \in$  平面  $A_1D_1DA$ .

又  $CE \subset$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore P \in$  平面  $ABCD$ .

$\because$  平面  $A_1D_1DA \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,

$\therefore P \in AD$ .

又  $P \in D_1F, P \in CE$ ,

$\therefore CE, D_1F, DA$  三线共点.

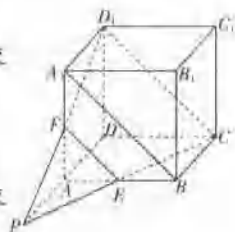


图 9-1-12

一点与一直线、两条相交直线或平行直线共面; 然后再由公理 1 证明其余的线也在该平面内 (此为落人法);

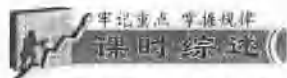
②即由一部分点线确定一个平面, 由另一部分点线确定一个平面, 再应用公理 3 或其推论证明这两个平面重合 (此为重合法).

## 2. 多点共线问题的证法

多点共线问题的常用证法是: 先证这些点均为两个平面的公共点, 然后根据公理 2 可得它们都在两个平面的交线上.

## 3. 三线共点的证法

证三线共点的方法是: 把三线中的两条线分别放在两相交平面内, 且相交, 而另一条为这两相交平面的交线, 则这三线共点.



在解立体几何问题时, 常常将空间问题转化到平面上去, 空间问题平面化是解立体几何问题的重要思想方法.

## 1. 点线共面问题的证法

证明点线共面问题的基本方法是:

①由公理 3 及其三个推论直接得出其中的三点.

## § 9.2 空间直线(第1课时)

知识海洋 太阳领航  
课 前 导 航

平面几何的定理能拓展到空间几何吗?

在初中学习的平面几何中有许多定理,它们能拓展到空间几何吗?

我们先看这样三个平面几何定理.

定理1 若  $a \parallel b, b \parallel c$ , 则  $a \parallel c$ .

定理2 如果一个角的两边分别平行另一个角的两边,那么这两个角相等或互补.

定理3 如果  $a$  与  $b$  不平行,那么  $a$  与  $b$  相交且存在唯一的交点.

观察正方体的各条棱及它们的相互关系,我们很快可以得出定理1、定理2是可以拓展的,而定理3是不能拓展的.

由此,我们可以得出如下结论:

结论1 平面几何中的定理有的可以拓展到空间几何,有的不可以拓展到空间几何.

结论2 这种拓展与类比的思想,对我们学习空间几何,提高逻辑推理能力是很有帮助的.

基础知识 不可忽视  
要 点 索 引

## 1. 空间两条直线的位置关系

研究空间两条直线,应从它们的位置关系入手,按照不同的分类原则,可以得到不同的分类方式.

若按两条直线(立体几何中一般不考虑两直线重合)的公共点的数目来分类,可以分成两类:

- ① 只有一个公共点——相交直线;
- ② 没有公共点——平行直线或异面直线.

若按两条直线的共面与否来分类,也可以分成两类:

- ① 在同一平面内——相交直线或平行直线;
- ② 不同在任何一个平面内——异面直线.

若综合以上两种情况考虑,可将空间两条直线的位置关系分成三类:

相交直线——在同一平面内,有且只有一个公共

点;

平行直线——在同一平面内,没有公共点;

异面直线——不同在任何一个平面内,没有公共点.三者的比较详见下表:

| 位置关系                  | 图示     | 表示方法            | 交点个数 |
|-----------------------|--------|-----------------|------|
| 两条直线共面                | 相交<br> | $a \cap b = P$  | 一个   |
|                       | 平行<br> | $a \parallel b$ | 无    |
| 两条直线异面:<br>不同在任何一个平面内 |        | $a$ 和 $b$ 是异面直线 | 无    |

## 2. 平行直线

定义:同一平面内,两条不相交的直线称为平行直线.

公理1 平行于同一条直线的两条直线平行,它是证明“对应边平行且方向相同的两个角相等”这个定理的基础,也是论证平行问题的主要根据.



名师指点 注意领悟

范 例 导 学



## 1. 空间两直线的位置关系

【例1】在空间中:(1)若四点不共面,则这四点中的任何三点都不共线;

(2)若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中,其逆命题为真命题的是\_\_\_\_\_.(填序号)

【分析】本题不是判断所给命题的真假,而是判断其逆命题的真假.故要分别写出逆命题,再作判断.

【解析】(1)的逆命题是:“若四点中任何三点都不共线,则这四点不共面”,是假命题;如平行四边形的四个顶点.

(2)的逆命题是:“若两条直线

反例:四点可共面,故命题是假的!

是异面直线,则这两条直线没有公共点”符合定义,是真命题.

【答案】(2)

变式1 回答下列问题:

- (1)若  $a \parallel b, b \parallel c$ , 那么  $a \parallel c$  吗?  $a, b, c$  共面吗?  
(2)过直线外一点作该直线的平行线,能作几条?

又  $\because EG \parallel A_1B_1, A_1B_1 \parallel C_1D_1,$

$\therefore EG \parallel D_1C_1,$

$\therefore$  四边形  $EGC_1D_1$  为平行四边

形,

$\therefore ED_1 \parallel GC_1,$

$\therefore BF \parallel ED_1,$

$\therefore$  四边形  $BFD_1E$  为平行四边形.

正方体是一种典型的几何模型.

变式2 如图 9-2-2 所示,两个三角形  $ABC$  和  $A'B'C'$  的对应顶点的连线  $AA', BB', CC'$  交于同一点  $O$ ,

且  $\frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'} = \frac{CO}{OC'} = \frac{2}{3}.$

(1)求证:  $A'B' \parallel AB, A'C' \parallel AC, B'C' \parallel BC;$

(2)求  $\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}$  的值.

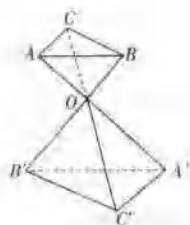


图 9-2-2



## 2. 平行公理的应用

【例 2】已知在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $AA_1, CC_1$  的中点, 求证:  $BFD_1E$  为平行四边形.

【分析】要证  $BFD_1E$  为平行四边形, 只须证  $BF \parallel D_1E$  即可, 利用公理 4 找到一条线段作媒介分别证明与  $BF$  和  $ED_1$  平行且相等.

【证明】如图 9-2-1 所示, 取  $BB_1$  的中点  $G$ , 连结  $GC_1, GE$ .

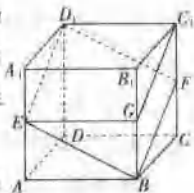


图 9-2-1

$\because F$  为  $CC_1$  的中点,

$\therefore BG \parallel C_1F,$

$\therefore$  四边形  $BGC_1F$  为平行四边形,

$\therefore BF \parallel GC_1.$



百尺竿头 更进一步

思维进阶

【例】如图 9-2-3 所示,在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,与对角线  $AC_1$  成异面直线的棱共有几条?

【分析】直接通过图形观察,所在直线与直线  $AC_1$  无公共点,且不平行,行的棱即为所求.

图 9-2-3

【解析】与  $AC_1$  有公共点的棱是:  $AD, AB, AA_1$  (公共点是  $A$  的 3 条),  $C_1B_1, C_1D_1, C_1C$  (公共点是  $C_1$  的 3 条),

不存在与  $AC_1$  平行的棱,

故剩余的 6 条棱都与  $AC_1$  异面,

即共有 6 条.

练习:

如图 9-2-4 所示,已知  $E, F, G, H$  顺次是空间四边形  $ABCD$  各边的中点,回答下列问题:

(1)如果  $AC=BD$ ,那么  $EFGH$  是什么四边形?

(2)如果  $AC \perp BD$ ,那么  $EFGH$  是什么四边形?

(3)如果  $AC=BD$ ,且  $AC \perp BD$ ,那么  $EFGH$  是什么四边形?

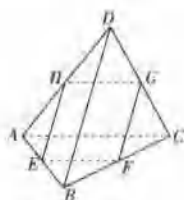


图 9-2-4



前车之鉴 后事之师

错解剖析

【例】填空:(1)和两条相交直线中的一条相交的直线与另一条的位置关系是\_\_\_\_\_.

(2)和两条异面直线中的一条相交的直线与另一条的位置关系是\_\_\_\_\_.

(3)和两条异面直线都相交的两直线的位置关系是\_\_\_\_\_.

【错解】(1)平行、垂直、异面;

(2)垂直、异面;

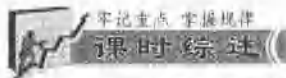
(3)异面.

【剖析】对空间两条直线的位置关系不清楚,得出结论时没有经过严密的逻辑推理,而是凭空想象.

【正解】(1)平行或相交或异面;

(2)平行或相交或异面;

(3)异面或相交.



牢记重点 掌握规律

课时总结

1. 空间两直线的位置关系可分为共面直线与异面直线两大类,共面又可分为平行与相交两种情形;从交点个数来看,两直线相交时有一个公共点,两直线平行或异面时无公共点.

2. 平行公理是空间图形中平行关系过渡的重要原理,这种平行关系的传递不受直线条数的限制,是判断两条直线平行的重要方法.

3. 等角定理条件中的“……分别平行”与“方向相同”同等重要,在只有前一条件而不知后一条件时,只能得出“两角相等或互补”.

## § 9.2 空间直线(第2课时)



知识海洋 太阳领航

课前导航

### 立交桥上的争论

小王、小李是两位爱动脑筋的初中生。一天,他们来到某城市的立交桥上,看到畅通无阻的滚滚车流,突然想到这样一个问题:把这两条公路抽象成直线。那么,这两条直线是平行的,还是相交的?

小王说:应该是相交的。因为两条公路的走向不一样,一条是东西方向,而另一条是南北方向的。

小李说:应该是平行的。如果相交,那么应该有唯一交点,现在交点在哪里?如有交点,车流是无法畅通的。

小王说:肯定相交,可以用反证法证明:假设不相交,那么就平行,所以两条公路的走向一致。这显然是不对的,因此是相交的。

两人一直争论不清,谁也说服不了谁,都无法解释清楚。

你帮助一下如何?



基础知识 不可忽视

要点索引

1. 异面直线的定义:不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线。

2. 异面直线的判定定理:过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线。

3. 异面直线所成的角:直线  $a, b$  是异面直线,经过空间任意一点  $O$ , 分别引直线  $a' \parallel a, b' \parallel b$ , 我们把直线  $a'$  和  $b'$  所成的锐角(或直角)叫做异面直线  $a$  和  $b$  所成的角。

在定义中,空间一点  $O$  是任意选取的,根据等角定理,可以肯定  $a'$  和  $b'$  所成的锐角(或直角)的大小与点  $O$  的位置无关。

两条异面直线所成的角是直角,则称两条异面直线互相垂直。所以线线垂直包括两条相交直线互相垂直和两条异面直线互相垂直两种情况。

异面直线所成的角的范围是  $(0^\circ, 90^\circ]$ 。

4. 两条异面直线间的距离:和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线;两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度叫做

这两条异面直线间的距离。

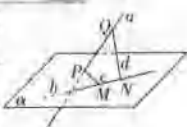


名师指点 注意领悟

范例导学

### 1. 异面直线的判定

【例1】已知  $a, b$  是异面直线,直线  $c, d$  分别与  $a$  交于不同的两点  $P, Q$ , 与  $b$  交于不同的两点  $M, N$ , 求证:  $c, d$  是异面直线。



【分析】异面直线的判定主要有两种方法:判定定理和反证法。异面直线的定义由于在具体实践中操作很困难,因此一般不使用。

【证明】(法一)假设  $c, d$  不是异面直线,则  $c, d$  共面于平面  $\alpha$ 。

$\because c \cap a = P, d \cap a = Q, c, d \subset \alpha,$

$\therefore P, Q \in \alpha,$

而  $P, Q \in a, \therefore a \subset \alpha$ , 同理  $b \subset \alpha$ 。

$\therefore a, b$  共面,这与已知  $a, b$  是异面直线矛盾。

所以假设不成立。

即  $c, d$  是异面直线。

(法二) $\because P \in a, a, b$  是异面直线,  $\therefore P \notin b$ ,

$\therefore b$  与  $P$  确定一个平面,设为平面  $\alpha$ (如图 9-2-7 所示)。

$\because a \cap \alpha = P, Q \in a, \therefore Q \in \alpha,$

又  $N \in \alpha, N \in PM, PM \subset \alpha,$

$\therefore QN$  与  $PM$  是异面直线。

即  $d$  与  $c$  是异面直线。

【变式1】如图 9-2-8 所示,已知  $P \notin$  平面  $ABC$ ,  $PA \neq PC$ ,  $BM$  是  $AC$  边上的中线,  $PN \perp AC$  于  $N$ 。求证:  $BM$  和  $PN$  是异面直线。

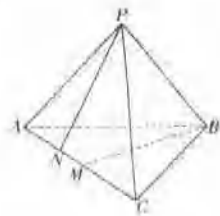


图 9-2-8