De Morgan 代数

罗从文 著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

De Morgan 代数

罗从文　著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

De Morgan 代数／罗从文著．—北京：北京理工大学出版社，2005.9

ISBN 7-5640-0582-3

Ⅰ.D...　Ⅱ.罗...　Ⅲ.①序②格　Ⅳ.O153.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 081859 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)
　　　　　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱／chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京圣瑞伦印刷厂
开　　本／850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张／4.75
字　　数／112 千字
版　　次／2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数／1～1500 册　　责任校对／郑兴玉
定　　价／10.00 元　　责任印制／刘京凤

序　言

格是随着经典逻辑代数化与泛代数的发展而引进的一个新的代数系统。近代格论大约形成于20世纪30年代，G. Birkhoff的专著《Lattice Theory》是这个时期的格论及其对于数理逻辑、泛代数、一般拓扑学、泛涵分析和概率论等数学分支中应用的系统总结。近年来，格的理论在组合数学、Fuzzy数学、理论计算机科学甚至社会科学中都得到了广泛的应用，同时也极大地推动了其自身的发展，使之成为数学和理论计算机科学中的重要研究对象。在格中有一种特别重要的格，就是分配格(即有两个二元运算满足幂等律、交换律、结合律、吸收律和分配律的一种代数系统)。可以说，分配格的理论是格论中内容最深刻、最丰富的部分。分配格促进了一般格论的发展，在应用方面，分配格的特殊子类构成了一些逻辑系统的代数基础，从而为逻辑系统的研究提供了一种代数方法。

布尔代数是一种特别重要的分配格，在计算机科学理论和数理逻辑中有着重要应用，得到了人们的广泛关注，获得了蓬勃发展。然而布尔代数由于受补余律的限制，不能概括广泛存在的模糊现象。随着模糊集理论和模糊逻辑的提出，模糊现象已被纳入人们的研究范围，研究没有补余律的布尔代数(即De Morgan代数)已成为不可回避的重要课题。20世纪50年代，A. Kalman，A. Bialynicki-Birula和H. Rasiowa等人就开始了对De Morgan代数的研究。模糊集概念引入后，给De Morgan代数找到了强大的实际背景。于是许多学者开始关注De Morgan代数自身的结构，他们将更多的数学思想与数学工具如拓扑思想、范畴思想等广泛运

用于这个研究领域，获得了很大的成功。如 R. Cignoli 等人给出了 De Morgan 代数的拓扑表示定理使得人们对同余关系的研究得到了深化，这种融拓扑结构与序结构于一体的探讨，可以使人们从拓扑学中若干有趣的空间出发，得到代数的结构，并且运用拓扑的方法与技巧，对这些代数的特性进行研究，从而得出关于格论中带有普遍意义的结论。

另一方面，A. Monteriro，H. Rasiowa 等人研究 Lukasiewicz 逻辑、带强非的构造逻辑的代数模型——Lukasiewicz 代数、Nelson 代数的性质。这些代数系统的基本结构是 De Morgan 代数。20 世纪 90 年代我国学者王国俊教授等人也在关注 De Morgan 代数在模糊逻辑方面的应用。他们提出了一种新的模糊命题演算的形式系统以求为模糊推理提供某种逻辑依据。鉴于国内还没有人编写这方面的著作，作者希望撰写本书来反映人们近几十年来在 De Morgan 代数研究领域所取得的成果，为人们更深入地研究多值逻辑提供坚实的代数基础。

本书系统地讲述了 De Morgan 代数的基本知识。全书共分五章，第一章介绍了以后各章所需的偏序集与格、布尔代数和分配格的表示；第二章阐述了 De Morgan 代数的构造与表示；第三章论述了 De Morgan 代数的理想与同余的关系；第四章论述了 De Morgan 代数的对偶理论；第五章介绍了伪补 De Morgan 代数的性质和 Kleene-Stone 逻辑函数的概念，并阐述了 Kleene-Stone 逻辑函数是一种五值逻辑函数。本书在介绍 De Morgan 代数的国内外最新研究成果的同时，还重点介绍了作者在武汉大学攻读硕士、博士学位以来取得的若干成果。

由于 De Morgan 代数的研究近几十年来成果丰富，考虑到 Lukasiewicz 代数和 Nelson 代数在 20 世纪 70 年代已有专著介绍，所以在选材上重点选用了 De Morgan 代数的构造理论、同余理论、对偶理论以及 Kleene-Stone 逻辑函数。十分遗憾本书没有收入 MS 代数的许多好的结论，如 T. S. Blyth 等人自 20 世纪 80 年代的

大量工作成果。

本书的出版和所论及的课题的研究工作得到了湖北省教育厅自然科学基金、三峡大学博士启动基金、三峡大学应用数学重点学科基金的资助，在此表示衷心的感谢。另外，作者衷心感谢导师任德麟教授和裴礼文教授多年来的指导、帮助和鼓励。

受作者水平所限，书中难免有错漏之处且取材可能不当，敬请读者批评指正。

罗从文
2005年4月于宜昌

目　　录

第一章　预备知识

格的概念是由 Dedekind(1831—1916)首先引入的,但当时并没有引起多大的重视.直到 1930 年,人们才逐渐认识到格的理论在代数学的各个分支和在几何基础等领域中的重要意义,以及一类特殊的格——布尔代数在计算机科学中的重要作用,从而对格作了广泛的研究.本章除了介绍偏序集与格的基本概念外,着重讨论布尔代数和分配格的对偶理论.

§1.1　偏序集与格

定义 1.1.1　设 P 是非空集合,$\leqslant$是 P 上的二元关系. 考虑以下性质:

(1) 自反性:$\forall a\in P\Rightarrow a\leqslant a$;

(2) 反对称性:$\forall a,b\in P, a\leqslant b, b\leqslant a\Rightarrow a=b$;

(3) 传递性:$\forall a,b,c\in P, a\leqslant b, b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$;

(4) 全序性:$\forall a,b\in P\Rightarrow a\leqslant b$ 或者 $b\leqslant a$.

此处对于 $a,b\in P, a\leqslant b\Leftrightarrow(a,b)\in\leqslant$.若$(a,b)\notin\leqslant$,则记作$a\nleqslant b$. 注意,$a\leqslant b$ 也记作 $b\geqslant a$.

若$\leqslant$满足传递性,则称$\leqslant$为 P 上的序,并称$(P,\leqslant)$为序集;若$\leqslant$满足自反性和传递性,则称$\leqslant$为 P 上的拟序(或准序),并称$(P,\leqslant)$为拟序集(或准序集);若$\leqslant$满足自反性、反对称性和传递性,则称$\leqslant$为 P 上的偏序,并称$(P,\leqslant)$为偏序集;若$\leqslant$满足自反性、反对称性、传递性和全序性,则称$\leqslant$为 P 上的全序(或线性

序),并称$(P,\leqslant)$为全序集(或链).

一般说来,对偏序集叙述的许多概念、记号和结论等也同样适用于序集或拟序集,但为了明确起见,本书仅限于讨论偏序集的情形.

在不引起混淆的情况下,$(P,\leqslant)$简记作 P.

例 1.1.1 $\mathbb{R}$是实数集,$\leqslant$是普通的顺序关系,$(\mathbb{R},\leqslant)$是一个偏序集.

例 1.1.2 $P=\mathbb{N}$是自然数集,$|$ 是整除关系,即 $a,b\in\mathbb{N}$时,$a|b$ 的意思是a 整除b. $(\mathbb{N},|)$是偏序集.

例 1.1.3 $P=P(X)$是集合 X 的幂集,$\subseteq$是 X 的子集的包含关系,$(P(X),\subseteq)$是偏序集.

例 1.1.4 设 P 是一个特定的人群,$a,b\in P$ 时,$a\leqslant b$ 的意思是:或者 a,b 是同一个人,或者 a 是b 的后代. 很明显,这里$(P,\leqslant)$也作为一个偏序集.

从例 1.1.1~例 1.1.4 可以看出:

(1) 偏序集是一种广泛存在的数学结构;

(2) 偏序集包含两个要素,一个非空集合 P 和P 上定义的一个偏序关系,两者缺一不可;

(3) 偏序集中并非任意两个元素都有关系. 如例 1.1.2 中元素 3 与 5 就没有整除关系,既没有 $3|5$,也没有 $5|3$.

今后把偏序集中有偏序关系的两个元素 x,y 称为是可比的,即 $x\leqslant y$,或者 $y\leqslant x$;否则是不可比的,即 $x\nleqslant y$ 且$y\nleqslant x$,用符号 $x\parallel y$ 表示.

定义 1.1.2 设$(P,\leqslant)$ 为一个偏序集,对 P 规定一个新的二元关系$\leqslant_{op}$如下:对一切

$$a,b\in P,a\leqslant_{op}b\Leftrightarrow b\leqslant a$$

则$\leqslant_{op}$为一个偏序关系. 偏序集$(P,\leqslant_{op})$称为偏序集$(P,\leqslant)$的对偶,用符号 P^{op}表示.

定义 1.1.3 设$(P,\leqslant)$是一个偏序集,$a,b\in P$ 并有$a\leqslant b$.

如果 P 中不再有元素 c 使得 $a \leqslant c \leqslant b$,则说元素 a 被元素 b 覆盖,或者说 b 覆盖 a,并记作 $a \prec b$.

设$(P, \leqslant_P)$,$(Q, \leqslant_Q)$是两个给定的偏序集.下面应用 3 种方法构造新的偏序集.

(1) 令 $T = P \times Q$(笛卡儿积),在 T 中如下定义一个二元关系 $\leqslant$:$(x,y) \leqslant (x_1,y_1) \Leftrightarrow x \leqslant_P x_1$ 且 $y \leqslant_Q y_1$($\forall (x,y),(x_1,y_1) \in T$).易见 $\leqslant$ 是 T 上的一个偏序关系,称偏序集$(T, \leqslant)$是偏序集 P 与偏序集 Q 的基数积(简称为积),记作 $T = P \times Q$.偏序集的基数积可以推广到任意多个偏序集上.如果$\{(X_i, \leqslant_i) \mid i \in I\}$是偏序集族,$I$ 是下标集合,在笛卡儿积 $T = \prod\limits_{i \in T} X_i$ 上定义二元关系 $\leqslant$ 如下

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(i) \leqslant_i g(i), \quad \forall i \in I, \quad \forall f, g \in T$$

则 $\leqslant$ 是 T 上的一个偏序关系,称偏序集$(T, \leqslant)$是偏序集族$\{(X_i, \leqslant_i) \mid i \in I\}$的基数积(简称积),仍记作 $T = \prod\limits_{i \in I} X_i$.特别地,当 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$是有限集时,可记作

$$T = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \text{ 或者 } T = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

(2) 令 $W = P \cup Q$,并且假定 $P \cap Q = \varnothing$(否则,以$\{0\} \times P$ 代替 P,以$\{1\} \times Q$ 代替 Q).在 W 中定义二元关系 $\leqslant$:$a \leqslant b \Leftrightarrow a, b \in P$ 且 $a \leqslant_P b$,或者 $a, b \in Q$ 且 $a \leqslant_Q b$($\forall a, b \in W$),即 W 中的二元关系 $\leqslant$ 分别保持了 P 与 Q 中原有的偏序关系,而任何 $x \in P$ 与 $y \in Q$ 对于 $\leqslant$ 不可比.易证 $\leqslant$ 是 W 上的一个偏序关系.称偏序集$(W, \leqslant)$是偏序集 P 与偏序集 Q 的不交并,记作 $W = P \dot{\cup} Q$.

(3) 令 $R = P \cup Q$,在 R 中如下定义一个二元关系 $\leqslant$:$x \leqslant y \Leftrightarrow x, y \in P$ 且 $x \leqslant_P y$,或者 $x, y \in Q$ 且 $x \leqslant_Q y$,或者 $x \in P$ 且 $y \in Q$.易见 $\leqslant$ 是 R 上的一个偏序关系.称偏序集$(R, \leqslant)$是偏序集 P 与偏序集 Q 的线性和,记作 $R = P \oplus Q$.

定义 1.1.4 设 A, B 是两个偏序集,如果存在映射 $f: A \to B$ 满足

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \quad (\forall x, y \in A)$$

称映射 $f: A \to B$ 为保序的(或序同态).如果满足

$$x \leqslant y \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) \quad (\forall x, y \in A)$$

称 f 为逆序的(或反序同态)。如果满足

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

称 f 是一个序嵌入.

若存在满射 $f: A \to B$ 使得

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y) \quad (\forall x, y \in A)$$

称偏序集 A 与 B 序同构(或同构).若存在满射 $f: A \to B$ 使得

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(y) \leqslant f(x) \quad (\forall x, y \in A)$$

称偏序集 A 与 B 对偶同构(或反序同构).

一个偏序集 A 对偶同构于自身,则称 A 是自对偶的. 一个映射 $f: A \to A$ 称为对合的,如果 f 满足 $f^2 = id_A$,即 A 上的恒等映射.

定义 1.1.5 设$(P, \leqslant)$是偏序集,$Q \subseteq P$ 称为 P 的一个下集,是指 Q 是减少的,即由 $i \in Q, j \leqslant i$ 推出 $j \in Q$.由 P 的子集 Q 生成的下集定义为:$\downarrow Q = \{y \in P \mid (\exists x \in Q) y \leqslant x\}$,有时也记为 $(Q]$.特别地,当 $Q = \{x\}$时,记 $\downarrow Q$ 为 $\downarrow x$ 或$(x]$.

相应地,$Q \subseteq P$ 称为 P 的一个上集,是指 Q 是增加的,即由 $i \in Q, j \geqslant i$ 推出 $j \in Q$. 由 P 的子集 Q 生成的上集定义为:$\uparrow Q = \{y \in P \mid (\exists x \in Q) y \geqslant x\}$,有时也记为$[Q)$.特别地,当 $Q = \{x\}$时,记 $\uparrow Q$ 为 $\uparrow x$ 或$[x)$.

定义 1.1.6 设$(P, \leqslant)$是偏序集,$a, b \in P$,则

(1) 若 $\forall x \in P$,都有 $x \leqslant a$,则称 a 是 P 的最大元;

(2) 若 $\forall x \in P$,都有 $b \leqslant x$,则称 b 是 P 的最小元;

(3) 若 $\forall x \in P, a \leqslant x \Rightarrow a = x$,则称 a 是 P 的极大元;

(4) 若 $\forall x \in P, x \leqslant b \Rightarrow b = x$,则称 b 是 P 的极小元.

对于偏序集来讲,最大元与最小元未必存在. 若存在,则分别是唯一的极大元与极小元. 任意有限偏序集必有极大元与极小

元. 但是未必有最大元与最小元. 对于全序集,最大元与极大元,最小元与极小元分别是一致的.

定义 1.1.7 设$(P,\leqslant)$是偏序集,$S\subseteq P$,并且 $u,v\in P$,

(1) 若$\forall x\in S$,有 $x\leqslant u$,则称 u 是S 的上界;

(2) 若$\forall x\in S$,有 $v\leqslant x$,则称 v 是S 的下界.

注意,一般说来,S 的上界或下界未必存在,即使存在也不必唯一,并且未必属于 S.

设$(P,\leqslant)$是偏序集,$S\subseteq P$. 若存在 $a\in P$ 使得

(1) a 是S 的一个上界(即$\forall s\in S,s\leqslant a$);

(2) 若 $c\in P$ 是S 的任意上界,则 $a\leqslant c$,则称 a 是S 的最小上界或上确界,此时 a 记作$\vee S$ 或 $\sup S$.

相应地,设$(P,\leqslant)$是偏序集,$S\subseteq P$. 若存在 $b\in P$ 使得

(1) b 是S 的一个下界(即$\forall s\in S,b\leqslant s$);

(2) 若 $c\in P$ 是S 的任意下界,则 $c\leqslant b$. 则称 b 是S 的最大下界或下确界,此时 b 记作$\wedge S$ 或 $\inf S$.

对于偏序集 P 中的任意子集S,其上确界或下确界未必存在. 若$\vee S$ 或$\wedge S$ 存在,则由反对称性可知其必唯一,但是 S 的上确界或下确界未必属于S.

若 $S=\{a,b\}$,则记作

$$\vee S = a \vee b,\ \wedge S = a \wedge b$$

若 $S=\varnothing$,则 P 的每一元都是它的上界,也都是它的下界. 显然,$\varnothing$ 有没有上确界与下确界,分别取决于 P 有没有最小元与最大元. 若 P 存在最大元 1 与最小元 0,则$\vee\varnothing=0,\wedge\varnothing=1$.

定义 1.1.8 偏序集$(L,\leqslant)$称为格,如果对任意两个元素 $a,b\in L$,$a\vee b$ 和$a\wedge b$ 都存在. 如果格 L 的任意子集的最小上界和最大下界都存在,则称格 L 是完备的.

本书将 $a\vee b$ 和$a\wedge b$ 分别读作a,b 的并和a,b 的交. 因此,所谓格,就是一个其任意二元都有并和交存在的偏序集.

下面来看一下前面所举的偏序集的例中有哪些是格?

例 1.1.5 $(\mathbb{R},\leqslant)$是格，对任意 $a,b\in\mathbb{R}$，有 $a\vee b=\max\{a,b\}$，$a\wedge b=\min\{a,b\}$.

例 1.1.6 $(\mathbb{N},|)$是格，对 $a,b\in\mathbb{N}$，$a\vee b=[a,b]$，$a\wedge b=(a,b)$分别是自然数 a,b 的最小公倍数和最大公约数.

例 1.1.7 $(P(X),\subseteq$是格，对任意 $a,b\in P((X)$，$a\vee b=a\cup b$，$a\wedge b=a\cap b$正好是集合的并和交.

例 1.1.8 例 1.1.4 中的 P 不构成格，因此，并非任意两个人都有共同的祖先或后代.

如何根据泛代数的观点来看待格呢？泛代数的目的是将各种代数系统如群、环、域、模等的共同性质抽象出来加以研究. 泛代数的最重要的要素是运算的概念. 若 n 是一个自然数，集合 A 中的一个 n 元运算是一个映射 $f:A^n\to A$，最常见的是 $n=0,1,2$，分别称为零元运算、一元运算、二元运算. 一个$(n_1,n_2,\cdots,n_\alpha)$型代数是一个偶对$(A,F)$，其中 A 是一个非空集合，$F=(f_1,\cdots,f_\alpha)$且对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant\alpha)$，$f_i$ 是 A 上的一个 n_i 元运算. 这样，一个格 L 是一个(2,2)型代数，两个二元运算适合下面的等式：

$$\forall x,y\in L$$

(1) $x\wedge y=y\wedge x$，$x\vee y=y\vee x$(交换律)；

(2) $x\wedge x=x$，$x\vee x=x$ (幂等律)；

(3) $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$，$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ (结合律)；

(4) $x\wedge(x\vee y)=x$，$x\vee(x\wedge y)=x$ (吸收律).

如果格 L 是有界的，即 L 中有最小元 0 和最大元 1，则 L 可看成是一个(2,2,0,0)型代数.

定义 1.1.9 设 A,B 都是型为$(n_1,\cdots,n_\alpha)$的代数，一个映射 $\varphi:A\to B$ 叫做一个同态，指对每个 $i(1\leqslant i\leqslant\alpha)$，

$$f_i(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{n_i}))=\varphi(f_i(a_1,\cdots,a_{n_i}))$$

$$(a_1,\cdots,a_{n_i})\in A^{n_i}$$

另外,如果映射 φ 是满射,则称 φ 为一个满同态,此时 B 为 A 的满同态像;如果映射 φ 是单射,则称 φ 为一个单同态;如果映射 φ 既是满射,又是单射,则称 φ 为一个同构. 一个 A 到 A 自身的同态叫做 A 的一个自同态;一个 A 到 A 自身的同构叫做 A 的一个自同构.

设 L,M 是任意格. 则从 L 到 M 的格同态 φ 满足:

(1) $\varphi(x\vee y)=\varphi(x)\vee\varphi(y),\forall x,y\in L$;

(2) $\varphi(x\wedge y)=\varphi(x)\wedge\varphi(y),\forall x,y\in L$.

注意 如果 L 和 M 是有界格,则从 L 到 M 的任何同态 φ 需满足 $\varphi(0_L)=0_M,\varphi(1_L)=1_M$.

下面介绍几种特殊的格.

定义 1.1.10 设 L 是一个格,若对于任意 $a,b,c\in L$,下列分配律成立:

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

或

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称 L 为分配格.

定义 1.1.11 设 L 是一个有界分配格,若对于 L 的每个元 a,存在 $a'\in L$(叫做 a 的补)使得 $a\wedge a'=0,a\vee a'=1$,则称 L 为布尔格.

定义 1.1.12 设 L 是一个有最小元 0 的格,$a\in L$. 如果 L 的子集 $\{x\mid x\in L,a\wedge x=0\}$ 有最大元,则称此最大元是 a 的伪补,用 a^* 表示 a 的伪补. 如果 L 的每个元都有伪补,则称 L 为一个伪补格.

伪补格作为一个代数,其中的伪补应看作是格中的一个一元运算 $^*:L\to L$,它给每个元 $a\in L$ 对应一个运算结果 $a^*\in L$. 因此,一个伪补格可以看成一个(2,2,1,0,0)型代数. 习惯上把布尔格称作布尔代数就是现在所说意义下的代数,它是一个特殊的伪补代数,它的伪补运算就是补运算. 它比一般的伪补具有更好的

性质,例如它满足 De Morgan 律:$(a \vee b)' = a' \wedge b'$;$(a \wedge b)' = a' \vee b'$,并且是一个对合运算.

还有一种特殊的伪补代数是 Stone 代数,即一个分配的伪补代数满足:对于一切 $a \in L$,都有等式 $a^* \vee a^{**} = 1$ 成立. 把伪补代数和伪补格加以区别并非只是称谓的不同,它们是有本质的差异. 其区别不仅在于同态的不同,而且关于子代数和同余关系也不同. 例如,一个布尔格的子格仅是一个子格,而一个布尔代数的子代数是在一元运算下封闭的一个子格.

定义 1.1.13 设 A 是型为$(n_1, \cdots, n_\alpha)$的代数,B 为 A 的一个非空集合,若对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant \alpha)$,$(b_1, b_2, \cdots, b_{n_i}) \in B^{n_i}$,有 $f_i(b_1, \cdots, b_{n_i}) \in B$,则称$(B, (f_1 | B^{n_1}, \cdots, f_{n_\alpha} | B^{n_\alpha}))$是 A 的一个子代数.

注意 B 上的运算是A 上运算在B 上的限制,A 与B 是同型的代数.

定义 1.1.14 令 A 为型为$(n_1, \cdots, n_\alpha)$的代数,A 上的一个等价关系 ϑ 叫做一个同余关系,指 ϑ 满足替换性质:对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, \alpha\}$,若$(a_j, b_j) \in \vartheta (j = 1, 2, \cdots, n_i)$,则$(f_i(a_1, \cdots, a_{n_i}), f_i(b_1, \cdots, b_{n_i})) \in \vartheta$.

例 1.1.9 在一个 Stone 格 L 中,一个等价关系 ϑ 如果满足:

$(a,b) \in \vartheta, (c,d) \in \vartheta \Rightarrow (a \wedge c, b \wedge d) \in \vartheta, (a \vee c, b \vee d) \in \vartheta$

则 ϑ 是一个同余关系.

注意 由$\wedge$和$\vee$的交换性,上式可简化成

$(a,b) \in \vartheta \Rightarrow (\forall c \in L)(a \wedge c, b \wedge c) \in \vartheta, (a \vee c, b \vee c) \in \vartheta$

然而,在一个 Stone 代数里,等价关系 ϑ 还需满足条件

$$(a,b) \in \vartheta \Rightarrow (a^*, b^*) \in \vartheta$$

代数 A 上所有同余关系的集合以集合的包含为序构成一个格,其最小元$\mathbf{0} = \{(x,x) | x \in A\}$,最大元$\mathbf{1} = A \times A$. 这个格叫

作 A 的同余格,记作 Con$A$.

最后,介绍了代数等式类的概念,一类代数是等式类是指它们能由一串等式来确定. G. Birkhoff 定理告诉我们:代数等式类刚好是那些在子代数、满同态象、直积下封闭的代数.

§1.2 布尔代数和分配格的表示

设 L 是一个格,$\emptyset \neq I \subseteq L$. 若 I 满足:

(1) 若 $x, y \in I$,则 $x \vee y \in I$;

(2) 若 $y \in I$ 且 $x \leqslant y$,则 $x \in I$.

则称 I 是 L 的一个理想. 理想 I 若满足:$x \wedge y \in I \Rightarrow x \in I$ 或 $y \in I$,则称为一个素理想.

相应地,可给出滤子和素滤子的定义. 本书将一个格 L 的全体素理想构成的集合用 $I_p(L)$ 表示.

定理 1.2.1 设 B 是一个布尔代数. 则映射

$$\eta: a \rightarrow X_a := \{I \in I_p(B) \mid a \notin I\}$$

是从 B 到幂集代数 $P(I_p(B))$ 的一个嵌入映射.

在此不给出定理 1.2.1 的证明,感兴趣的读者可自行证明.

如何刻画嵌入映射 η 的像 Imη 呢? 根据素理想集上拓扑结构来刻画. 集合 X 上的一个拓扑是 X 的包含 X 和 $\emptyset$ 在内的一族子集,且在任意并和有限交下封闭. 很显然,一个拓扑空间 (X, τ) 的所有既开又闭的子集族构成一个布尔代数. 这就启发在 $I_p(B)$ 上定义一个拓扑 τ 使得嵌入映射 η 的像 Imη 恰好是拓扑空间 $(I_p(B), \tau)$ 的所有既开又闭的子集族. 因此,对于每个 $a \in B$,$X_a := \{I \in I_p(B) \mid a \notin I\}$ 应该在 τ 中. 但集族 $\boldsymbol{B} := \{X_a \mid a \in B\}$ 在任意并下不封闭,因而不是一个拓扑. 令

$$\tau := \{U \subseteq I_p(B) \mid U \text{ 是 } \boldsymbol{B} \text{ 中成员之并}\}$$

则 $\boldsymbol{B}$ 是拓扑 τ 的一个基. 拓扑空间 $(I_p(B), \tau)$ 叫作 B 的素理想空