



21世纪高职高专公共基础课系列教材

简明高等数学教程 学习导引

JIANMING
GAODENGSHUXUE
JIAOCHENG
XUEXI DAOYIN

□ 彭奇林 胡玉玺 编 著



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

21 世纪高职高专公共基础课系列教材

简明高等数学教程

学习导引

彭奇林 胡玉玺 编著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

简明高等数学教程学习导引/彭奇林 胡玉玺 编著
武汉:华中科技大学出版社,2006年5月
ISBN 7-5609-3699-7

I. 简…

II. ①彭… ②胡…

III. 高等数学-高等学校-学习参考资料

IV. O13

简明高等数学教程学习导引

彭奇林 胡玉玺 编著

责任编辑:曾 光 彭保林

封面设计:刘 卉

责任校对:吴 晗

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉万卷鸿图科技有限公司

印 刷:湖北省通山县九宫印务有限公司

开本:787×960 1/16

印张:15.75

字数:281 000

版次:2006年5月第1版

印次:2006年5月第1次印刷

定价:19.00元

ISBN 7-5609-3699-7/O·387

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是华中科技大学出版社 21 世纪高职高专公共基础课系列教材《简明高等数学教程》的辅助教材，其章次与有关术语、符号等均同主教材完全一致。本书共八章，各章分别划分为若干单元，每个单元均由基本要求、重点难点、内容综述、疑难解析、典型例题、单元检测共六个部分组成，此外每章还配有检测题，最后附录给出了全书的所有单元检测和章检测题的答案。

本书以高等数学的基础知识和基本理论为重点，尤其重视高等数学的思想方法的渗透，注重学生发现问题、分析问题、解决问题的能力培养。使用本书，可以促进掌握高等数学的基本知识，增强应用能力，提高数学素养。

本书可以作为高职、高专、成人高校的高等数学课程配套教材使用，也可以供高校教师等相关人员参考。

前 言

本书是华中科技大学出版社 21 世纪高职高专公共基础课系列教材《简明高等数学教程》的配套辅助教材, 主要供使用该教材的教师和学生作教学参考书。为使用方便起见, 本书的章次与有关术语、符号等均同主教材完全一致, 因此非常贴近主教材。同时考虑到读者使用需要, 本书也具有一定的独立性。

本书共八章, 各章分别划分为若干单元(第五、六章没有划分单元)。考虑到学生学习的逻辑性和系统性, 各单元由本章中次序相连且内容相互关联的若干节合并而成。每个单元均由基本要求、重点难点、内容综述、疑难解析、典型例题、单元检测(第五、六章除外)共六个部分组成, 此外每章还配有检测题, 最后附录给出了全书的所有单元检测和章检测题的答案。

基本要求 逐条列出本单元基本的教学目的和要求, 为学生学习本课程提出了具体的目标, 使其做到有的放矢, 少走弯路。

重点难点 明确指出本单元的教学重点和难点, 让学生能够准确地抓住重点, 及时地突破难点, 使其成效明显, 事半功倍。

内容综述 根据主教材的具体内容的编排顺序, 系统归纳出本单元的基本概念、性质、定理、公式和重要结论。为学生学习时尽快掌握主要内容和复习时迅速查阅重点项目提供方便, 同时加深对这些内容的认知和掌握。

疑难解析 对于本单元的主要内容中, 容易产生疑惑的概念、性质、定理、公式和重要结论, 做一些必要的分析与说明, 或者提供一些背景材料, 促进学生的理解。有时也把一些相关概念进行对比和辨析, 以便学生正确区分它们并熟练掌握之。

典型例题 根据本单元的主要内容, 将其基本题型和重要题型一一列举出来, 分别进行详细解答, 以做示范。从而在某种程度上而言, 这也是对主教材的一个补充。同时, 可以使得学生进一步深化对相关概念、性质、定理、公式的理解。

单元检测 依照本单元基本要求的重点难点, 对本单元的学习情况进行考核和检测, 属于自我测试的性质。

此外, 每一章的检测题是对这一章全部内容的检查和测试。

本书以高等数学的基础知识和基本理论为重点, 尤其重视高等数学的思想方法的渗透, 注重培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力。使用本书, 可

以促进学生掌握高等数学的基本知识，+强应用能力，提高数学素养。

参加本书编写的人员为彭奇林老师（第一、二、三、四、五、六章）、胡玉玺老师（第七、八章）。全书的总体策划、框架结构、统稿定稿由彭奇林老师承担。

本书的编写和出版得到了编著者所在学校的有关领导和部分教师的大力支持，同时还得到了华中科技大学出版社有关领导的高度重视。本书的策划编辑和责任编辑为本书的编著和出版付出了辛勤的劳动，也提出了不少好的意见和建议。在此一并致以最诚挚的谢意。

由于我们编写水平有限，加上经验不足，书中有不当之处在所难免。恳请广大师生和读者同仁批评指正，不吝赐教。

编著者

2005 年 10 月

目 录

第 0 章 绪论	(1)
一、为什么要学习高等数学	(1)
二、高等数学的主要特点	(2)
三、高等数学与初等数学之区别	(3)
四、高等数学的发展过程	(4)
五、如何学习高等数学	(5)
第 1 章 极限与连续	(7)
第 1 单元 函数	(7)
一、基本要求	(7)
二、重点难点	(7)
三、内容综述	(7)
四、疑难解析	(9)
五、典型例题	(14)
第 1 单元检测题	(16)
第 2 单元 极限	(18)
一、基本要求	(18)
二、重点难点	(18)
三、内容综述	(18)
四、疑难解析	(24)
五、典型例题	(29)
第 2 单元检测题	(34)
第 3 单元 函数的连续性	(36)
一、基本要求	(36)
二、重点难点	(36)
三、内容综述	(36)
四、疑难解析	(39)
五、典型例题	(42)
第 3 单元检测题	(44)
第 1 章检测题	(46)
第 2 章 一元函数微分学	(48)
第 1 单元 导数	(48)
一、基本要求	(48)

二、重点难点	(48)
三、内容综述	(48)
四、疑难解析	(52)
五、典型例题	(55)
第1单元检测题	(59)
第2单元 微分及其应用	(61)
一、基本要求	(61)
二、重点难点	(61)
三、内容综述	(61)
四、疑难解析	(63)
五、典型例题	(64)
第2单元检测题	(67)
第3单元 导数的应用	(68)
一、基本要求	(68)
二、重点难点	(69)
三、内容综述	(69)
四、疑难解析	(71)
五、典型例题	(74)
第3单元检测题	(79)
第2章检测题	(81)
第3章 一元函数积分学	(84)
第1单元 定积分与不定积分的概念	(84)
一、基本要求	(84)
二、重点难点	(84)
三、内容综述	(84)
四、疑难解析	(88)
五、典型例题	(91)
第1单元检测题	(94)
第2单元 基本积分法	(96)
一、基本要求	(96)
二、重点难点	(96)
三、内容综述	(96)
四、疑难解析	(98)
五、典型例题	(102)
第2单元检测题	(109)

第3单元 定积分的应用与广义积分	(111)
一、基本要求	(111)
二、重点难点	(111)
三、内容综述	(111)
四、疑难解析	(114)
五、典型例题	(115)
第3单元检测题	(122)
第3章检测题	(123)
第4章 空间解析几何	(126)
第1单元 向量及其运算	(126)
一、基本要求	(126)
二、重点难点	(126)
三、内容综述	(126)
四、疑难解析	(129)
五、典型例题	(130)
第1单元检测题	(134)
第2单元 空间解析几何	(136)
一、基本要求	(136)
二、重点难点	(136)
三、内容综述	(136)
四、疑难解析	(139)
五、典型例题	(142)
第2单元检测题	(151)
第4章检测题	(153)
第5章 多元函数微分学	(155)
一、基本要求	(155)
二、重点难点	(155)
三、内容综述	(155)
四、疑难解析	(161)
五、典型例题	(166)
第5章检测题	(173)
第6章 多元函数积分学	(175)
一、基本要求	(175)
二、重点难点	(175)
三、内容综述	(175)

四、疑难解析	(178)
五、典型例题	(180)
第6章检测题	(185)
第7章 常微分方程	(187)
第1单元 一阶微分方程	(187)
一、基本要求	(187)
二、重点难点	(187)
三、内容综述	(187)
四、疑难解析	(189)
五、典型例题	(192)
第1单元检测题	(195)
第2单元 二阶微分方程	(197)
一、基本要求	(197)
二、重点难点	(197)
三、内容综述	(197)
四、疑难解析	(199)
五、典型例题	(202)
第2单元检测题	(205)
第7章检测题	(207)
第8章 级数	(209)
第1单元 数项级数	(209)
一、基本要求	(209)
二、重点难点	(209)
三、内容综述	(209)
四、疑难解析	(212)
五、典型例题	(215)
第1单元检测题	(220)
第2单元 幂级数	(222)
一、基本要求	(222)
二、重点难点	(222)
三、内容综述	(223)
四、疑难解析	(226)
五、典型例题	(228)
第2单元检测题	(231)
第8章检测题	(232)
附录 检测题答案	(235)

第0章 绪 论

对于高职高专来说,高等数学是绝大多数专业必修的专业基础课程.作为初等数学的发展,高等数学穿插于各学科及其应用之中,在各工程学科中的作用非常巨大,甚至在一些纯粹的文科如经济学和管理学等方面的应用也是十分重要的.其核心内容是微积分,主要包括极限,一元函数微积分,多元函数微积分,空间解析几何,常微分方程,级数理论等重要部分.

为了使大家在学习之初,就对高等数学的思想方法和发展过程有一个初步的了解,对高等数学的内容有一个起码的轮廓,对高等数学的学习方法有一个基本的认识,对高等数学与初等数学的联系与区别有一个客观的比较,我们先将这些问题进行简单的介绍.

一、为什么要学习高等数学

(一) 数学是工具: 数学为各学科的研究提供知识上的储备

在各工程学科中,每一门课程的知识,从其主题结构到具体的问题,几乎都离不开高等数学的知识,其中包括高等数学基本理论和基本方法.正是由于工程学科的各专业课程都涉及到较多的高等数学内容,因此,只有首先学好高等数学,才有可能学好工程学科各课程的专业知识.如果高等数学课程学得不好,那么工程学科的专业课程就很难学好,甚至在最基本的专业问题的解决过程中,也会受到阻碍.

(二) 数学是能力: 数学为我们拓宽思维方式, 培养思维能力

在许多工程学科的问题中,如果抛开其实际的工程意义,其实就是一个数学问题.也就是说,我们只要根据问题的实际意义,建立起适当的数学模型,那么剩下的就是求解数学模型的问题了.这当然需要有较好的数学基础.甚至于建立数学模型的过程,也是一个数学性质比较强的问题.这是因为,倘若没有较强的数学功底,实际问题的数学模型也是很难建立起来的.因此,这就需要比较好的宽泛的思维方式 and 相应的逻辑思维能力作为支撑.否则,就会捉襟见肘,难以真正完全彻底地解决问题.

(三) 数学是灵魂：数学渗透到了其它学科，成为科学的灵魂

目前，高等学校各专业开设高等数学课程已经是一种普遍现象，就象各专业都开设大学英语和计算机应用基础这两门课程一样。不仅是理工农医类全部都开设高等数学的课程，甚至纯文科类的经济学和管理学等类型的各种专业也都开设高等数学的课程。在高等学校的各科类各专业普及高等数学课程已经成为一个趋势甚至已经成为事实。作为一门最基础的学科，数学已经渗透到了其它学科的心脏，如在医学科学中有一个学科称为数理医学的，在经济学中有称为数量经济学和数理金融学的学科，这些都是数学与相关学科交叉形成的边缘学科，是比较前沿的课题，都是一些在本学科类中比较权威和突出的人员在进行这方面的研究。又如，诺贝尔经济学奖的获得者大多数是数学家出身，也是一个典型的例子。甚至有人认为，两次海湾战争打的就是数学战（如美国军队里有数字化师一说），应该说是有一定道理的。

(四) 数学是财富：数学与生产过程结合可以提高生产效率

数学是财务人员和经济管理人员必须掌握的工具，这本身就说明了数学和财富的密切关系。事实上，经济活动分析是离开不了数学的，甚至生产活动过程也离不开数学。比如，数控机床的使用，使得机械加工的效率大大地提高，而劳动强度却大大地减小。又如，在工农业生产中运用优选法就是一个成功的范例。上个世纪的五六十年代，我国著名数学家华罗庚先生在广大的工厂和农村不遗余力地推广优选法，使得优选法的应用在我国掀起了一个高潮，不仅较大程度地发展了优选法，甚至推动了整个数学在生产中的应用，而且一定程度上推动了工农业生产，从而直接促进了社会物资财富积累的快速增加，推动了社会的进步。因此数学大众化，大众数学化，让广大人民群众了解数学和运用数学是十分必要的。

二、高等数学的主要特点

这里归纳了高等数学的八大特点，其中前四个带有整体性，而后四个是针对具体内容的。

(一) 变化的观点

高等数学研究的主要对象是函数，因此它常常需要用变化的观点去考虑问题，从变化之中去认识问题和解决问题。

(二) 函数的角度

高等数学中的许多问题都要引入变量，建立函数关系，从变量之间的联系去考查问题，寻求解决问题的方法。

(三) 突变的思想

高等数学中经常遇到许多过程的突变,如“以直代曲”,“以有限代无限”,“以均匀代不匀”等等,最后归结为使得“近似变为精确”.

(四) 极限的方法

高等数学是以极限理论为基础建立起来的,它决定了极限在高等数学中的重要地位和作用,从方法上体现了高等数学的特殊性.

(五) 复杂的概念

高等数学中的概念往往都比较复杂,不是那种三五句话就能说清楚的东西.有时前提条件一大堆,“如果”好几个,十几行字才下了一个定义.甚至一页纸的内容就只是一个概念,也不是什么罕见的情形.

(六) 纯粹的理论

高等数学中的很多内容是纯理论的,或者在我们的现实生活与工作中找不到相应的具体例子.这就容易给我们造成一种高深莫测的感觉.剪不断,理还乱.很容易消磨大家学习积极性.

(七) 抽象的表达

高等数学中的表达大多比较抽象,这是一个不争的事实.很多定理的证明和公式的推导都是通过抽象思维和逻辑推理的方式进行的,而与具体的直接的计算有一定的差别.

(八) 严谨的推理

数学理论都非常注重逻辑推理的严密性,高等数学尤其如此.数学上的许多东西,表面上看起来是虚无缥缈的,好象一点也不可能,但是它们是确实确实的经过严格的逻辑推理所得到的结果,其正确性是不言而喻,其作用也是巨大的.

三、高等数学与初等数学之区别

(一) 教材:多元与统一相区别

初等数学的学习过程中,不仅有统一的教学大纲,而且还有统一的教材.无论哪所学校,也无论哪个老师,同样的课程都使用统一的教材,甚至使用统一的教学参考书.但是,高等数学就不一样,教学大纲可以有多个,教材更没有统一的蓝本,可以在众多的教材中进行选择,也可以自己编写教材,更没有什么统一的教学参考书.

（二）内容：抽象与具体相区别

初等数学的研究对象一般都比较具体，相对而言，比较容易作一些专门的研究；即使有一些抽象的东西，也被不同程度的具体化了。而在高等数学中所研究的对象，是抽象的多具体的很少；即使有个别具体一些的内容，往往还是作为例子而给出的。

（三）容量：大量与小量相区别

初等数学的内容，就其容量而言是比较少的。如平面解析几何与立体几何都是薄薄的一小本书，而学习时间却是一年。代数教材稍微厚一些，但也远远比不上高等数学教材的内容这样丰富。比较而言，显然初等数学内容少一些，学时又多一些，我们就可以多用一些工夫，反复地学习和思考。但是，学习高等数学却不能这样。很厚的一本书，总学时又不多，不仅要学完，而且还要学好，如果没有好的学习方法，几乎是不可能的事情。

（四）叙述：简略与详细相区别

初等数学对于每一个概念，定理都叙述得比较详细，对于他们的方方面面都介绍的清清楚楚，彻彻底底，举一反三；例子也很多，面面俱到，不厌其烦。而高等数学在叙述方面就比较呆板，除了定义，就是定理；不是概念，就是原理。只有个别特别重要的情形才举出例子，而许多情形甚至有些不是非常重要的定理还是用练习题的形式给出，使得我们即使是在做习题，也经常遇到新概念和新原理。

（五）讲授：重点与全面相区别

前文已经讲过，初等数学教材对其中的每一个问题几乎都作了很全面的说明，然而老师还惟恐教材写得不够仔细，同学看得不够认真，在课堂上是一而再，再而三地就方方面面和角角落落讲解内容和例子，然后要大家一而再，再而三地练习和复习，一个问题不知要经过多少个回合才肯罢休。但是学习高等数学时，老师只是对重点问题进行讲解，适当地给出个别的例子；对于不是特别重要的内容，往往是一带而过，甚至略去不讲。

四、高等数学的发展过程

高等数学是在初等数学的基础上发展起来的，因此它也可以分成许多学科，或者说它有许多分支。对于我们非数学专业的学习者而言，只须掌握其中的基础知识和基本原理即可。我们仍然称其为高等数学。它的核心内容是微积分，基础内容是极限，基本方法是数形结合。

15 世纪以来,一大批数学家如费马(Fermat),开普勒(Kepler),帕斯卡(Pascal),沃利斯(Wallis)等在求切线与求面积或体积这两类微积分的基本问题上进行了深入的研究,得到了利用无穷小来计算面积和体积的方法.但是,由于时代的限制,这些研究都是针对个别问题的,而没有形成统一的方法.其间,法国数学家笛卡尔(Descartes)引入直角坐标系并建立解析几何学,可以视为高等数学之开端.

英国数学家巴罗(Barrow)首先给出了求曲线的切线的一般方法,引入了“微分三角形”的概念,发现了求切线与求面积之间的互逆关系.由于其结果是用几何语言来叙述的,较难理解和应用,使得这一发现没有能够产生应有的影响.

之后,有许多数学家进行了艰苦卓绝的探索.特别是英国数学家和物理学家牛顿(Newton),从沃利斯的无穷小算法中得到启发,发现了无穷级数的二项式定理,使得无穷小算法更富有活力,并使得他对函数关系中自变量的无穷小变化和函数值的变化之间的关系加以研究,从而形成了微分方法及其思想.在此基础上,牛顿又发现了积分法,可以由切线求出曲线,甚至轻松地求出曲线所围成的面积.这样,求曲线的切线和求面积之间的互逆关系从纯的几何形式转化到了代数形式,为微积分广泛应用打下了良好的基础.

几乎与此同时,德国数学家和哲学家莱布尼兹(Leibniz),在许多科学家的大量工作的基础上,独立地创立了微积分学.将微分方法和积分方法有机地统一起来,是微积分理论得以建立的一个重要标志,为数学的新发展奠定了基础.

19 世纪,德国数学家高斯(Gauss)对这些新理论的整理和规范,对无穷小算法进行了系统性的完善,对定积分做了开创性的工作,把前人许多成果的艰涩叙述转化为现代形式并给予严格的证明,在完整的意义上缔造了极限理论,又进一步夯实了高等数学的基础,从而使得数学的发展出现了一日千里的态势.经过一代又一代科学家的努力,最终形成了内容丰富的高等数学.

五、如何学习高等数学

(一) 弄清概念和理论

要透过复杂的概念,去理解它的本质和内涵,从抽象的理论中寻找其实质,并把握好概念与概念,概念与理论,理论与理论之间的联系.

(二) 注重思想和方法

在高等数学中,思想与方法往往是融为一体的,因此,我们运用什么样的数学思想去分析一个问题,也就可以用什么样的数学方法去解决这一问题.

(三) 读懂教材和教参

高等数学的教学参考书比较少，但是同类的教材却很多。这样，我们就可以把所使用的教材之外的高等数学书籍都当作教学参考书来使用。课后一定要阅读教材，而且一定要读懂教材。对其中的一些词如“显然”，“同理”，“经过计算表明”等处，应该作深入的探讨，搞清楚是否真正如其所说。

(四) 做好思考与练习

学习高等数学一定要勤于思考，所思必有所得，多思必然多得。特别是对于重要的概念和原理，一定要真正弄懂弄通。同时，还应该做一定数量的练习题，以便于理解和巩固所学内容。但是我们不能仅仅满足于做题，甚至认为会做题就是学好了高等数学。重要之处在于掌握高等数学的思想和方法，培养抽象思维的能力和逻辑思维的能力，最后形成用高等数学的思想和方法去分析问题与解决问题的能力。

第 1 章 极限与连续

第 1 单元 函 数

一、基本要求

(1) 进一步理解函数的概念, 能熟练地求函数的定义域、值域; 会建立简单实际问题的函数关系式.

(2) 了解函数的四种性质: 有界性、单调性、奇偶性和周期性, 掌握单调性和奇偶性的判别方法.

(3) 熟练掌握基本初等函数的表达式、定义域、性质及其图形.

(4) 了解分段函数、复合函数、反函数和初等函数的概念, 会把复合函数分解成较简单的函数, 会求函数的反函数.

二、重点难点

重点: 函数的定义、复合函数的概念、初等函数的概念.

难点: 分段函数的概念、复合函数的概念.

三、内容综述

(一) 函数

1. 邻域

定义 1 设 a, δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 则数集 $\{x \mid x - a < \delta\}$ (或者开区间 $(a - \delta, a + \delta)$) 称为点 a 的 δ 邻域, 记做 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid x - a < \delta\} \text{ 或 } U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta).$$

其中点 a 称为邻域 $U(a, \delta)$ 的中心, 数 δ 称为邻域 $U(a, \delta)$ 的半径.

$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\}$ 称为点 a 的去心邻域.

2. 函数及有关概念

(1) 函数的概念.