高等学校教材

数学建模方法与竞赛

SHUXUEJIANMOFANGFAYUJINGSAI

李俊林　等编著

兵器工业出版社

高等学校教材

数学建模方法与竞赛

李俊林　李忠卫
何小娟　米　芳　编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

全书共分 10 章。第 1 ~ 8 章通过对各类典型建模实例的研究，系统地介绍了基本数学模型，包括初等模型、微分法模型、微分方程模型、动态优化模型、规划模型、图论模型、随机模型。所选实例按照由浅入深，由简到繁的原则进行了合理安排。第 9 章、第 10 章，分别介绍了大学生数学建模竞赛的相关知识以及部分建模竞赛实例。

全书叙述清晰，文字流畅，可读性强，既可作为高等院校各专业本科生数学模型课程、数学建模竞赛辅导的教材，又可供对数学建模有兴趣的读者阅读使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模方法与竞赛/李俊林等编著．—北京：兵器工业出版社，2006.5

ISBN 7 - 80172 - 659 - 6

Ⅰ．数…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数学模型—高等学校—教材　Ⅳ．022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 039173 号

出版发行：兵器工业出版社

发行电话：010 - 68962596，68962591

邮　　编：100089

社　　址：北京市海淀区车道沟 10 号

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京市艺辉印刷有限公司

版　　次：2006 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

印　　数：1 - 1000

责任编辑：常小虹

封面设计：李　晖

责任校对：郭　芳

责任印制：赵春云

开　　本：787 × 1092　1/16

印　　张：14.25

字　　数：420 千字

定　　价：26.00 元

前　　言

随着科学技术的发展，数学在科学研究与工程技术中的作用不断增强，其应用范围几乎覆盖了所有的学科分支。数学这种强大作用的发挥，是通过对所研究问题建立数学模型来实现的。因此各高校都开设了数学建模课程。大学生数学建模竞赛也引起了广大青年学生与各界人士的注意，正如火如荼地在全国开展着。为了让广大学生了解数学建模与建模竞赛的特点，编写一本适合他们知识结构的教材显得尤为重要。在以往数学建模课程的教学实践中，编者深切体会到许多学生不仅有学习经典数学模型的愿望，更迫切希望了解建模竞赛的相关知识、参加建模竞赛来提高对数学建模的感性认识，感受数学建模的魅力。基于此，编者希望通过编写一本不仅包括经典数学模型，而且还包括建模竞赛内容的数学模型教材，达到使学生既能学习建模基础知识又能了解建模竞赛的目的。

本书是为数学模型课程和大学生数学建模竞赛而编写的一本实用教材。

全书共分 10 章，由李俊林（太原科技大学）主持编写。各章的撰写人分别是李忠卫（第 1、6、8 章），何小娟（第 2、3、7 章），太原师范学院米芳（第 4、5、9 章），第 10 章由 3 人共同编写。本书在出版过程中，得到学校、分院及出版社多位同志的大力帮助，在此深表谢意。

数学建模与其他课程不同，它没有固定的教学内容，涉及的领域及所用的数学方法也不限定，编著教材有较大的难度，加上作者水平有限，书中必有很多不足之处，恳请广大读者批评指正。

编著者

2006 年 4 月

目　录

1 数学建模概论

1.1 数学模型

伴随着科学技术的日新月异及计算机技术的迅速发展，数学模型这个词汇在人们的生产、工作和社会活动中经常遇到。如城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为领导层对城市发展规划的决策提供科学依据。气象工作者为了得到准确的天气预报，一刻也离不开根据气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型。医学专家一旦有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，就可以分析药物的疗效，有效地指导临床用药。电气工程师往往需建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置做出相应的设计、计算和调整，才能实现有效的过程控制。CEO 们如果能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息，筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，一定可以获得更大的经济效益。在日常活动如旅游、购物当中，人们也会谈论优化出行的路线的问题，其实就是找一个数学模型。对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说，建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁，那么什么是数学模型呢?

数学模型应该说是每个人都十分熟悉的。早在学习初等代数的时候我们就已经用建立数学模型的方法来解决实际问题了。当然其中许多问题是老师为了教会学生知识而人为设置的。譬如你一定解过这样的所谓“航行问题”：

甲乙两地相距 750 n mile，船从甲到乙顺水航行需 30 h，从乙到甲逆水航行需 50 h，问船速、水速各若干?

用 x、y 分别代表船速和水速，可以列出方程

$$(x+y)\times 30=750$$

$$(x-y)\times 50=750$$

实际上，这组方程就是上述航行问题的数学模型。列出方程，原问题已转化为纯粹的数学问题。方程的解 $x=20$（n mile/h），$y=5$（n mile/h），最终给出了航行问题的答案。

当然，真正实际问题的数学模型通常要复杂得多，但是数学模型的基本内容已经包含在解这个代数应用题的过程中了。那就是：根据建立数学模型的目的和问题的背景做出必要的简化假设（航行中设船速和水速为常数）；用字母表示待求的未知量（x、y 代表船速和水速）；利用相应的物理或其他规律（匀速运动的距离等于速度乘以时间），列出数学式子（二元一次方程）；求出数学上的解答（$x=20$，$y=5$）；用这个答案解释原问题（船速和水速分别为 20 n mile/h 和 5 n mile/h）；最后还要用实际现象来验证上述结果。

一般来说，数学模型是对于现实世界的一个特定对象，一个特定目的，根据特有的内在

规律，做出一些必要的假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构。简单地说，就是系统的某种特征的本质的数学表达式（或是用数学术语对部分现实世界的描述），即用数学式子（如函数、图形、代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等）来描述（表述、模拟）所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律。

数学模型具有下列特征：数学模型的一个重要特征是高度的**抽象性**。在实践中，能够直接运用数学方法解决实际问题的情形是很少见的，也就是说，实际问题很少直接以数学的语言出现在我们面前，而且对于如何使用数学语言来描述所面临的实际问题也往往不是轻而易举的，应用数学知识解决实际问题的第一步必须要面对实际问题中看起来杂乱无章的现象并从中抽象出恰当的数学关系，也就是组建这个问题的数学模型。通过数学模型能够将形象思维转化为抽象思维，从而可以突破实际系统的约束，运用已有的数学研究成果对研究对象进行深入的研究。数学模型的另一个特征是**经济性**。用数学模型研究不需要过多的专用设备和工具，可以节省大量的设备运行和维护费用，用数学模型可以大大加快研究工作的进度，缩短研究周期，特别是在电子计算机得到广泛应用的今天，这个优越性就更为突出。但是，数学模型具有局限性，在简化和抽象过程中必然造成某些失真，所谓“**模型就是模型**”（而不是原型），即是指该性质。因此数学模型要接受实践的检验，因为建模的目的是要用以研究和解决原型的实际问题，而数学模型是经过简化和抽象得到的，尽管这个数学模型的组建过程中的逻辑推导准确无误，也并不意味着模型是成功的，它必须要接受实践的检验，经检验被认为是可以接受的模型才能付诸分析、使用。

一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学。作为一个成功的模型应该有较强的实际背景，最好是直接针对某个实际问题的；模型应该是经过实际检验表明是可以接受的，模型应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解；而且也应该尽可能简单，以利于使用者理解接受。

1.2 数学建模

数学建模近来受到越来越多的重视。随着计算机技术的迅速发展，信息时代的到来，特别是最近媒体中常常提到的以知识创新为核心的知识经济时代的出现，对于数学的应用提出了越来越多的需求，使其不仅在它得心应手的传统的物理领域有用武之地，而且还更多地渗入了过去数学涉足不多的非物理领域，尤其是社会科学领域。这种需求激发了人们对于作为数学和应用的桥梁——数学建模的广泛兴趣和更深入的研究。那么什么是数学建模呢?

数学建模是利用数学方法解决实际问题的一种实践。即通过抽象、简化、假设、引进变量等处理过程后，将实际问题用数学方式表达，建立起数学模型，然后运用先进的数学方法及计算机技术进行求解。简而言之，建立数学模型的这个过程就称为数学建模。

我们也可以这样直观地理解这个概念：**数学建模是一个让纯粹数学家（指只懂数学不懂数学在实际中的应用的数学家）变成物理学家、生物学家、经济学家甚至心理学家等等的过程。**

数学模型是一种模拟，是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻画，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。数学模型一般并非现实问题的直接翻

版，它的建立常常既需要人们对现实问题深入细微的观察和分析，又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模。实际问题中有许多因素，在建立数学模型时你不可能、也没有必要把它们毫无遗漏地全部加以考虑，只能考虑其中的最主要的因素，舍弃其中的次要因素。数学模型建立起来了，实际问题化成了数学问题，就可以用数学工具、数学方法去解答这个实际问题。如果有现成的数学工具当然好。如果没有现成的数学工具，就促使数学家们寻找和发展出新的数学工具去解决它，这又推动了数学本身的发展。例如，开普勒由行星运行的观测数据总结出开普勒三定律，牛顿试图用自己发现的力学定律去解释它，但当时已有的数学工具是不够用的，这促使了微积分的发明。求解数学模型，除了用到数学推理以外，通常还要处理大量数据，进行大量计算，这在电子计算机发明之前是很难实现的。因此，很多数学模型，尽管从数学理论上解决了，但由于计算量太大而没法得到有用的结果，还是只有束之高阁。而电子计算机的出现和迅速发展，给用数学模型解决实际问题打开了广阔的道路。而在现在，要真正解决一个实际问题，离了计算机几乎是不行的。数学模型建立起来了，也用数学方法或数值方法求出了解答，是不是就万事大吉了呢？不是。既然数学模型只能近似地反映实际问题中的关系和规律，到底反映得好不好，还需要接受检验，如果数学模型建立得不好，没有正确地描述所给的实际问题，数学解答再正确也是没有用的。因此，在得出数学解答之后还要让所得的结论接受实际的检验，看它是否合理，是否可行，等等。如果不符合实际，还应设法找出原因，修改原来的模型，重新求解和检验，直到比较合理可行，才能算是得到了一个解答，可以先付诸实施。但是，十全十美的答案是没有的，已得到的解答仍有改进的余地，可以根据实际情况，或者继续研究和改进；或者暂时告一段落，待将来有新的情况和要求后再作改进。

应用数学知识去研究和解决实际问题，遇到的第一项工作就是建立恰当的数学模型。从这一意义上讲，可以说数学建模是一切科学研究的基础。没有一个较好的数学模型就不可能得到较好的研究结果，所以，建立一个较好的数学模型乃是解决实际问题的关键之一。数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高同学们应用所学知识分析问题、解决问题的能力的必备手段之一。

数学建模是一种创造性的思维活动，没有统一模式和固定的方法。建立数学模型需要较好的抽象概括能力、数学语言的翻译能力、善于抓住本质的洞察能力、联想及综合分析能力、掌握和使用当代科技成果的能力等。

1.3 数学建模的方法和步骤

1.3.1 数学建模的方法

建立数学模型的方法并没有一定的模式，但一个理想的模型应能反映系统的全部重要特征：模型的可靠性和模型的使用性。一般来说建立数学模型的方法大体上可分为两大类，一类是机理分析方法，一类是测试分析方法。机理分析是根据对现实问题特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，建立的模型常有明确的物理或现实意义。测试分析将研究对象视为一个“黑箱”系统，内部机理无法直接寻求，可以测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合

得最好的模型，这种方法称为系统辨识。将这两种方法结合起来也是常用的建模方法，即用机理分析建立模型的结构，用系统辨识确定模型的参数。

可以看出，用哪一类方法建模主要是根据我们对研究对象的了解程度和建模目的决定的。如果掌握了机理方面的一定知识，模型也要求具有反映内部特性的物理意义，那么应该以机理分析方法为主。当然，若需要模型参数的具体数值，还可以用系统辨识或其他统计方法得到。如果对象的内部机理基本上不掌握，模型也不用于分析内部特性，譬如仅用来作输出预报，则可以系统辨识方法为主。系统辨识是一门专门学科，需要一定的控制理论和随机过程方面的知识。考虑到使用本教材学生的知识结构，本书所讲的建模方法以机理分析为主，主要有初等数学方法、微分法、微分方程、变分法、最优化方法、图论方法、概率统计法等。

1.3.2 数学建模的一般步骤

建模的步骤一般分为下列几步：

模型准备 首先要了解问题的实际背景，明确题目的要求，搜集各种必要的信息。

模型假设 在明确建模目的，掌握必要资料的基础上，通过对资料的分析计算，找出其主要作用的因素，经必要的精炼、简化，提出若干符合客观实际的假设，使问题的主要特征凸现出来，忽略问题的次要方面。一般地说，一个实际问题不经过简化假设就很难翻译成数学问题，即使可能，也很难求解。不同的简化假设会得到不同的模型。假设作得不合理或过分简单，会导致模型失败或部分失败，于是应该修改和补充假设；假设作得过分详细，试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去，可能使你很难甚至无法继续下一步的工作。通常，作假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是二者的综合。作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，果断地抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量将问题线性化、均匀化。经验在这里也常起重要作用。写出假设时，语言要精确，就像做习题时写出已知条件那样。

模型构成 根据所作的假设以及事物之间的联系，利用适当的数学工具去刻画各变量之间的关系，建立相应的数学结构——即建立数学模型。把问题化为数学问题。要注意尽量采取简单的数学工具，因为简单的数学模型往往更能反映事物的本质，而且也容易使更多的人掌握和使用。

模型求解 利用已知的数学方法来求解上一步所得到的数学问题，这时往往还要做出进一步的简化或假设。在难以得出解析解时，也应当借助计算机求出数值解。

模型分析 对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时是根据所得结果给出数学上的预报，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制，不论哪种情况还常常需要进行误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等。

模型检验 分析所得结果的实际意义，与实际情况进行比较，看是否符合实际，如果结果不够理想，应该修改、补充假设或重新建模，有些模型需要经过几次反复，不断完善。

模型应用 所建立的模型必须在实际中应用才能产生效益，在应用中不断改进和完善。应用的方式自然取决于问题的性质和建模的目的。

应当指出，并不是所有问题的建模都要经过这些步骤，有时各步骤之间的界限也不那么

分明，建模时不要拘泥于形式上的按部就班。有人认为，目前数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术。与一种技术大致上有章可循不同。艺术在某种意义下无法归纳出若干条普遍适用的准则。一名出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教，更需要亲身的实践。类似地，要想掌握建模这门艺术，培养想象力和洞察力，一要学习、分析、评价、改进别人做过的模型；二要亲自动手，认真做几个实际题目。

1.4 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类。

按研究方法和对象的数学特征分：初等模型、优化（静态、动态）模型、微分方程模型、稳定性模型、图论模型、概率统计模型等。

按研究对象的实际领域（或所属学科）分：人口模型、环境模型、生态模型、生理模型、污染模型、经济模型、社会模型等。

按照建模目的分：描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等。

按照模型的表现特性分：确定性模型和随机性模型；静态模型和动态模型；线性模型和非线性模型；离散模型和连续模型。虽然从本质上讲大多数实际问题是随机性的、动态的、非线性的，但是由于确定性、静态、线性模型容易处理，并且往往可以作为初步的近似来解决问题，所以建模时常先考虑确定性、静态、线性模型。连续模型便于利用微积分方法求解，作理论分析，而离散模型便于在计算机上作数值计算，所以用哪种模型要看具体问题而定。在具体的建模过程中将连续模型离散化，或将离散变量视作连续，也是常采用的方法。

按照对模型结构的了解程度分：有所谓白箱模型、灰箱模型、黑箱模型。白箱主要包括用力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题，这方面的模型大多已经基本确定，还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题了。灰箱主要指生态、气象、经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象，在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做。至于黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理（数量关系方面）很不清楚的现象。有些工程技术问题虽然主要基于物理、化学原理，但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱模型处理。当然，白、灰、黑之间并没有明显的界限，而且随着科学技术的发展，箱子的“颜色”必然是逐渐由暗变亮的。

1.5 数学建模示例

1.5.1 汽车刹车距离问题

问题的提出

汽车司机在行驶过程中发现前方出现突发事件，会紧急刹车，人们把从司机决定刹车到车完全停止这段时间内汽车行驶的距离，称为刹车距离。常识告诉我们，车速越快，刹车距离越长。那么，刹车距离与车速之间是线性关系，还是更复杂的关系。为了得到二者之间的数量规律，首先做了一组实验：用固定牌子的汽车，由同一司机驾驶，在不变的道路、气候

等条件下，对不同的车速测量其刹车距离，得到的数据如表 1－1 所示。试从物理上的分析入手，参照这组数据，建立刹车距离与车速之间的数学模型。

表 1－1　车速与刹车距离的一组数据

车速/（km/h）	20	40	60	80	100	120	140
刹车距离/m	6.5	17.8	33.6	57.1	83.4	118.0	153.5

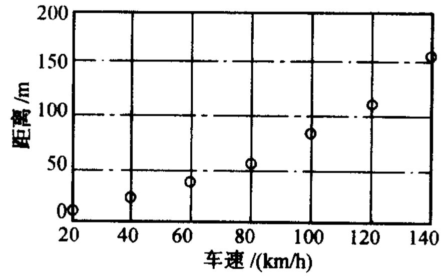

图 1－1　表 1－1 的数据图（实际刹车距离）

问题分析与模型假设

为了更直观起见，用 MATLAB 对表 1－1 的数据作图（图 1－1），可以看到，刹车距离与车速之间并非线性关系，我们需要对刹车距离从机理上作较仔细的研究。

刹车距离由反应距离和制动距离两部分组成，前者指从司机决定刹车到制动器开始起作用这段时间内汽车行驶的距离，后者指从制动器开始起作用到汽车完全停止所行驶的距离。

反应距离由反应时间和车速决定，反应时间取决于司机个人状况（灵巧、机警、视野等）和制动系统的灵敏性（从司机脚踏刹车板到制动器真正起作用的时间），对于固定牌子的汽车和同一类型的司机，反应时间可以视为常数，并且在这段时间内车速尚未改变。

制动距离与制动器作用力、车重、车速以及道路、气候等因素有关，制动器是一个能量耗散装置，制动力做的功被汽车动能的改变所抵消。设计制动器的一个合理原则是最大制动力大体上与车的质量成正比，使汽车大致做匀减速运动，司机和乘客少受剧烈的冲击。而道路、气候等因素对一般规则来说只能看作是固定的。

基于上述分析，做以下假设：

（1）刹车距离 d 等于反应距离 d_1 与制动距离 d_2 之和。

（2）反应距离 d_1 与车速 v 成正比，比例系数为反应时间。

（3）刹车时使用最大制动力 F，F 做的功等于汽车动能的改变，且 F 与车的质量 m 成正比。

模型构成

由假设（2）有

$$d_1 = k_1 v \tag{1-1}$$

k_1 为反应时间。由假设（3），在 F 作用下行驶距离 d_2 做的功 Fd_2 使车速 v 变为 0，动能的变化为 $mv^2/2$，从而有 $Fd_2 = mv^2/2$。又 F 与 m 成正比，按照牛顿第二定律可知，刹车时的加速度 a 为常数，于是

$$d_2 = k_2 v^2 \tag{1-2}$$

k_2 为比例系数，实际上 $k_2 = \frac{1}{2a}$，由假设（1），刹车距离为

$$d = k_1 v + k_2 v^2 \tag{1-3}$$

即刹车距离 d 与车速 v 之间是二次函数关系。

参数估计

虽然式（1－3）中的参数 k_1、k_2 有一定的物理意义，但是它们难以从机理上确定，常用的办法是根据表1－1的数据来拟合式（1－3）中的参数，称为数据拟合。把表1－1中车速的单位先化成 m/s，得到的估计结果为 $k_1=0.6522$，$k_2=0.0853$，将它们代入式（1－3）计算出的刹车距离列在表1－2并与实际刹车距离进行了比较。

表1－2　计算刹车距离与实际刹车距离的比较

车速/（km/h）	20	40	60	80	100	120	140
实际刹车距离/m	6.5	17.8	33.6	57.1	83.4	118.0	153.5
计算刹车距离/m	6.26	17.78	34.56	56.61	83.92	116.49	154.33

1.5.2　人口预报问题

问题的提出

人口问题是当前世界上人们最关心的问题之一。如何利用历史数据，认识人口数量的变化规律，对人口增长做出较准确的预报，这对于有效控制人口增长有着重要的意义。

下面介绍两个最基本的人口模型，并利用表1－3给出的近200年的美国人口统计数据，对模型做出检验，最后用它预报2000年、2010年美国人口。

表1－3　美国人口统计数据

年（公元）	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
人口/（百万）	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2
年（公元）	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
人口/（百万）	31.4	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5
年（公元）	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口/（百万）	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

1. 指数增长模型（马尔萨斯人口模型）

此模型由英国人口学家马尔萨斯（Malthus　1766～1834年）于1798年提出。

模型假设

人口增长率 r 是常数（或单位时间内人口的增长量与当时的人口成正比）。

模型构成

记时刻 $t=0$ 时人口数为 x_0，时刻 t 的人口数为 $x(t)$，由于人口数量大，$x(t)$ 可视为连续、可微函数，t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量显然有

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=rx(t) \tag{1-4}$$

于是 $x(t)$ 满足微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=rx\\&x(0)=x_0\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

模型求解

解上述微分方程，得

$$x(t)=x_0e^{rt} \tag{1-6}$$

式（1-6）表明：$t\to\infty$ 时，$x(t)\to\infty$（$r>0$）。

模型的参数估计

要用上述模型的结果来预报人口，必须对其中的参数 r 进行估计，这可以用表 1-3 的数据 $r=0.307$。

模型检验

将 $x_0=3.9$，$r=0.307$ 代入式（1-6），求出用指数增长模型预测的 1810～1920 年的人口数，见表 1-4。

表 1-4 美国实际人口与按指数增长模型计算的人口比较

年	实际人口/（百万）	指数增长模型	
		预测人口/（百万）	误差（%）
1790	3.9		
1800	5.3		
1810	7.2	7.3	1.4
1820	9.6	10.0	4.2
1830	12.9	13.7	6.2
1840	17.1	18.7	9.4
1850	23.2	25.6	10.3
1860	31.4	35.0	10.8
1870	38.6	47.8	23.8
1880	50.2	65.5	30.5
1890	62.9	89.6	42.4
1900	76.0	122.5	61.2
1910	92.0	167.6	82.1
1920	106.5	229.3	115.3

从表 1-4 可看出，1810～1870 年间的预测人口数与实际人口数吻合较好，但 1880 年以后的误差越来越大。

分析原因，该模型的结果说明人口将以指数规律无限增长。而事实上，随着人口的增加，自然资源、环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著。如果当人口较少时人口的自然增长率可以看作常数的话，那么当人口增加到一定数量以后，这个增长率就要随着人口增加而减少。于是应该对指数增长模型关于人口净增长率是常数的假设进行修改。下面的模型是在修改的模型中著名的一个。

2. 阻滞增长模型（Logistic 模型）

模型假设

（1）人口增长率 r 为人口数量 $x(t)$ 的函数 $r(x)$（减函数），最简单假定 $r(x)=r-sx$，r，$s>0$（线性函数），r 叫做固有增长率。

（2）自然资源和环境条件所能容纳的最大人口容量 x_m。

模型构成

当 $x=x_m$ 时，增长率应为0，即 $r(x_m)=0$，于是 $s=\frac{r}{x_m}$，代入 $r(x)=r-sx$,得:

$$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right) \tag{1-7}$$

于是可得微分方程模型为:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)x\\&x(0)=x_0\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

模型求解

解上述微分方程得

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}} \tag{1-9}$$

根据微分方程，作出$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sim x$ 曲线图，见图1-2，由该图可看出人口增长率随人口数的变化规律。根据结果作出 $x\sim t$ 曲线，见图1-3，由该图可看出人口数随时间的变化规律。

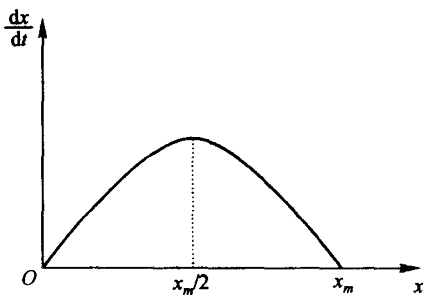

图1-2　dx/dt ~ t 曲线图

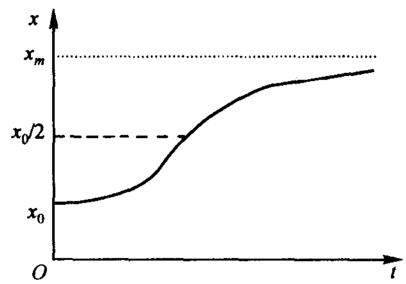

图1-3　x ~ t 曲线

模型的参数估计

利用表1-3中1790~1980年的数据对 r 和 x_m 拟合得：$r=0.207\,2$，$x_m=464$。

模型检验

将 $r=0.207\,2$，$x_m=464$ 代入式（1-9），求出用阻滞增长模型预测的1800~1990年的人口数，见表1-5第3、4列。

也可将微分方程离散化，得

$$x(t+1)=x(t)+\Delta x=x(t)+r\left(1-\frac{x(t)}{x_m}\right)x(t) \quad t=0,1,2,\cdots \tag{1-10}$$

用式（1-10）预测1800~1990年的人口数，结果见表1-5第5、6列。

模型应用

现应用该模型预测人口。用表1-3中1790~1990年的全部数据重新估计参数，可得 $r=0.208\,3$,$x_m=457.6$。用式（1-10）做预测得：x（2 000）=275；x（2 010）=297.9。

x（2 000）=275与实际数据的误差约为2.5%，可以认为该阻滞增长模型是比较满意的。

表 1-5 美国实际人口与按阻滞增长模型计算的人口比较

年	实际人口/（百万）	阻滞增长模型			
		式（1-9）		式（1-10）	
		预测人口/（百万）	误差（%）	预测人口/（百万）	误差（%）
1790	3.9				
1800	5.3	5.902 5	0.113 7	3.900 0	0.264 2
1810	7.2	7.261 4	0.008 5	6.507 4	0.096 2
1820	9.6	8.933 2	0.069 5	8.681 0	0.095 7
1830	12.9	10.989 9	0.148 1	11.415 3	0.115 1
1840	17.1	13.520 1	0.209 4	15.123 2	0.115 6
1850	23.2	16.632 8	0.283 1	19.819 7	0.145 7
1860	31.4	20.462 1	0.348 3	26.522 8	0.155 3
1870	38.6	25.173 1	0.347 8	35.452 8	0.081 5
1880	50.2	30.968 7	0.383 1	43.532 9	0.132 8
1890	62.9	38.098 6	0.394 3	56.188 4	0.106 7
1900	76.0	46.869 9	0.383 3	70.145 9	0.077 0
1910	92.0	57.660 7	0.373 3	84.730 5	0.079 0
1920	106.5	70.935 9	0.333 9	102.462 6	0.037 9
1930	123.2	87.267 4	0.291 7	118.950 9	0.034 5
1940	131.7	107.358 8	0.184 8	137.881 0	0.046 9
1950	150.7	132.075 9	0.123 6	148.797 8	0.012 6
1960	179.3	162.483 5	0.093 8	170.276 5	0.050 3
1970	204.0	199.891 9	0.020 1	201.177 2	0.013 8
1980	226.5	245.912 7	0.085 7	227.574 8	0.004 7
1990	251.4	302.528 8	0.203 4	250.448 8	0.003 8

思 考 题

1. 举出两三个实例说明建立数学模型的必要性，包括实际问题的背景、建模目的、需要大体上什么样的模型以及怎样运用这种模型等。

2. 怎样解决下面的实际问题，包括需要哪些数据资料、要做些什么观察试验以及建立什么样的数学模型等。

（1）估计一个人体内血液的总量。

（2）为保险公司制定人寿保险计划。

（3）为汽车租赁公司制定车辆维修、更新和出租计划。

（4）决定十字路口黄灯亮的时间长度。

3. 一垂钓俱乐部鼓励垂钓者将钓上的鱼放生，打算按照放生的鱼的质量给予奖励。俱乐部只准备了一把软尺用于测量，请你设计按照测量的长度估计鱼的质量的方法。假定鱼池