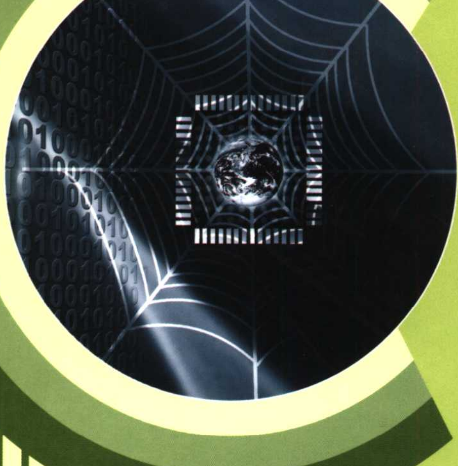
中国地质大学（武汉）研究生系列教材

中国地质大学（武汉）研究生教材建设基金资助

JUZHENLILUN JIQI YINGYONG

矩阵理论及其应用

韩世勤 彭 放 罗文强 编著



中国地质大学出版社

中国地质大学(武汉)研究生教材建设基金资助
高等学校研究生系列教材

矩阵理论及其应用

韩世勤　彭　放　罗文强　编著

中国地质大学出版社

内容提要

本书是为工科研究生编写的《矩阵理论》课程所使用的教材，较系统地介绍了矩阵理论的主要概念和方法。内容包括线性空间、内积空间、线性变换、矩阵分解、向量和矩阵的范数、矩阵函数与函数矩阵、矩阵分析、广义逆矩阵。各章配有一定量的习题。

本书结构紧凑，内容简练，深入浅出，便于阅读。除供研究生使用外，也可供广大科技工作者、高校教师及高年级学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵理论及其应用/韩世勤，彭放，罗文强编著.—武汉：中国地质大学出版社，2005.12

ISBN 7-5625-2072-0

Ⅰ.矩…
Ⅱ.①韩…②彭…③罗…
Ⅲ.矩阵-理论-应用
Ⅳ.O15

矩阵理论及其应用 韩世勤 彭 放 罗文强 编著

责任编辑：王凤林 责任校对：张咏梅

出版发行：中国地质大学出版社（武汉市洪山区鲁磨路388号） 邮政编码：430074
电话：(027)87482760 传真：87481537 E-mail:cbb@cug.edu.cn
经 销：全国新华书店 http://www.cugp.cn

开本：787毫米×1 092毫米 1/16 字数：220千字 印张：8.625
版次：2005年12月第1版 印次：2005年12月第1次印刷
印刷：湖北地矿印业有限公司 印数：1—2 000册

ISBN 7-5625-2072-0/O·74 定价：20.00元

“研究生系列教材”总序

在中国地质大学研究生院建院二十周年来临之际，第一批反映我校研究生教学与科学研究成果的“研究生系列教材”出版了，这是我校研究生教育发展过程中的一件大事，可喜可贺！

随着我校研究生招生规模的不断扩大，如何保证研究生的培养质量是我们必须积极思考并努力着手解决的问题。这套研究生系列教材的及时出版，正是一个很有力的举措。研究生教材建设是保证和提高研究生培养质量的重要手段，是反映一个学校教师队伍的学术水平和教学水平的宏观尺度，更是具有战略性意义的基本建设。各门课程必须有高质量的教材，才能使研究生通过学习，掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识，为从事科学研究工作打下良好的基础。因此，我校研究生院筹集资金设立了“研究生教材建设基金”，资助出版“研究生系列教材”以满足本校各学科研究生教学的需要，促进我校研究生教材建设工作，提高研究生培养质量。

由于研究生具有人才的高层次性、培养的超前性和学习的研究性等特点，这就要求研究生教材并不是本科生教材的简单深化和延续，而应该结合学校的学科专业结构和特色来编写系统性、新颖性、适用性融为一体的研究生教材。这套“研究生系列教材”以具有我校特色的研究生课程教材为主，既有基础理论教材，又有研究生专业课教材，准备在今后数年内分批次出版。“研究生系列教材”总的特色是从我校研究生的教学实际需要出发，根据各门课程在各专业研究生培养中的地位和作用，在内容上求新、求深、求精。专业课程教材还要力求高起点，反映科学规律，追踪该学科专业的发展前沿，反映国内外的最新研究成果。

虽然，我们的主观愿望是尽可能组织编写出一套特色鲜明、适用性强的高质量“研究生系列教材”，但由于我校研究生教材建设工作起步不久，经验不足，已出版的教材质量尚待在使用中检验，敬请校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

姚书振

中国地质大学（武汉）研究生院　院长

2005 年 5 月 20 日

前　言

《矩阵理论及其应用》是工科硕士研究生比较喜欢的一门重要数学基础课，我们编写本书的目的是为工科研究生提供一本合适的教材，为便于学习，我们力求将抽象的理论叙述变得通俗易懂，在内容的安排顺序上也尽量体现由浅入深，循序渐进的原则。既坚持数学理论的严谨性，又注重理论与方法的实用性。通过学习本书，使学生能够对矩阵的理论和方法具有较系统的把握和了解，并紧密结合现代数学发展，进一步拓展学生的数学理论与方法，为进一步开展学习和科学研究打下良好的理论基础。

本书以高等数学、线性代数为先导课程，因此，一般工科硕士研究生阅读本书不会有太大的困难。在编写本书的过程中，我们特意添加了一定量的例题，通过这些精选例题的解答与分析，使读者可以更好地理解矩阵相关的结论与方法。另外，每章都安排有适量的习题供读者作练习，可根据教学的具体情况进行选择。假如你是一位工程技术人员，本书将是你的好帮手，当你为解决某一问题而伤透脑筋的时候，本书可以为你答疑解惑，甚至为你提供答案。

本书是作者在给研究生讲授《矩阵理论及其应用》课程的讲义基础上进一步修改完善，加工充实后形成的。在内容取材上涵盖了《矩阵理论及其应用》课程的主要内容。

全书内容的具体安排是：

第一章　线性空间与内积空间。本章主要讨论了线性空间和内积空间的基本理论，介绍了向量组的线性相关性，线性空间的基底，内积及正交性，子空间的直和与正交性，线性变换及其所对应的矩阵等内容。本章有关向量组的线性相关性、基底等概念可作为自学内容。教师讲课时可根据学生情况灵活处理。

第二章　矩阵的分解。本章给出了在工程技术中常用的几种矩阵分解形式，其中包括矩阵的三角分解、LU 分解、最大秩分解、奇异值分解等分解形式。

第三章　向量与矩阵的范数。本章深入分析了关于向量范数的基本理论，介绍了矩阵范数的概念及其性质，讨论了矩阵范数与向量范数的相容性，给出了几种常用矩阵范数的计算公式，这些内容是学习矩阵分析的必备知识。

第四章　矩阵分析。本章给出了矩阵序列与矩阵级数的概念，分析了它们的收敛性条件。讨论了矩阵函数与函数矩阵的概念及其性质，并对其引进了导数与积分等分析学概念，介绍了相应的计算方法。本章是矩阵理论的重要内容，教学上要特别加以重视。

第五章　广义逆矩阵。矩阵的广义逆矩阵是普通意义上逆矩阵概念的推广，它突破了普通意义上逆矩阵的许多限制，使它的适用范围更广。本章给出了许多具有重要实际应用意义的结果。

本书由韩世勤主持编写，其中第一、三、四章由韩世勤编写，第二章由彭放编写，第五章由罗文强编写。

本书的编写和出版工作得到了研究生院、数学与物理学院以及出版社领导的大力支持和帮助，唐仲华教授对本书进行了认真细致地审阅，提出了许多宝贵的意见，责任编辑王凤林同志为本书的公开出版做了大量的工作，在此向他们表示衷心地感谢。

由于时间仓促，加之作者水平所限，书中定会存在错漏之处，敬请读者提出批评指正。

作　者

2005 年 10 月 1 日于武汉

目　　录

第一章　线性空间与内积空间

我们知道，在讨论数学问题时通常是与一定的空间形式相联系的．比较直观的空间有一维直线空间、二维平面空间、三维立体空间．为了应用的需要，我们有必要建立抽象的线性空间与内积空间的概念．它是矩阵理论中经常涉及的两个重要的理论空间．

§1　线性空间的基本概念与性质

通过观察我们会发现，有一些量所构成的集合对于加法和数乘具有封闭性，也就是说，该集合中的任意两个量的和仍在这个集合中；其中的任意一个量与数的乘积也总是在这个集合中．当一个集合具有这种性质时，我们就称它构成了一个线性空间．

定义 1.1　设 Ω 是一个数域，V 是一个集合，并在 V 中已经定义了加法和数乘．如果对于 V 中任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 和 Ω 中任意的数 λ,μ，加法和数乘满足如下 8 条要求：

(1)$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；

(2)$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$；

(3)$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$；

(4)$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$；

(5)$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$；

(6)$(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x})$；

(7)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$；

(8)$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$，

则称集合 V 为数域 Ω 上的线性空间，也称为向量空间．V 中的元素称为向量，通常用字符 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 等表示向量．

根据上述定义，容易理解下列例子给出的结果．

例 1.1　三维空间中的全体矢量所构成的集合 V_3，按照矢量的加法和数乘运算构成实数域 R 上的一个线性空间．

例 1.2　由 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 形成的有序数组记为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，令集合

$$R^n=\{\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\mid a_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$$

并定义加法和数乘：

(1)对任意的 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in R^n$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in R^n$，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$$

(2)对任意的 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in R^n$ 以及任意的 $\lambda\in R$，有

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T$$

则容易验证，R^n 是实数域 R 上的线性空间．

例 1.3　由所有次数不超过 n 的实系数多项式 $P_n(x)$ 组成的集合 V，按照多项式的加法和数乘运算构成实数域 R 上的一个线性空间，记为 $P_n[x]$，这时多项式 $P_n(x)$ 也称为向量．

例 1.4　由区间$[a,b]$上的全体连续函数组成的集合$C[a,b]$，按照连续函数的加法和数乘运算构成实数域R上的一个线性空间，这时集合$C[a,b]$中的每个连续函数$f(x)$也称为向量．

例 1.5　由所有$m\times n$型的实矩阵组成的集合$V_{m\times n}$，按照矩阵的加法和数乘运算构成实数域R上的一个线性空间，这时集合$V_{m\times n}$中的每个矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$也称为向量．

例 1.6　由所有n阶实对称矩阵组成的集合，按照矩阵的加法和数乘运算构成实数域R上的一个线性空间．

例 1.7　由所有n阶可逆矩阵组成的集合，按照矩阵的加法和数乘运算不能构成实数域R上的线性空间．

例 1.8　由所有n阶正交矩阵组成的集合，按照矩阵的加法和数乘运算不能构成实数域R上的线性空间．

例 1.9　由所有次数为n的实系数多项式组成的集合，按照多项式的加法和数乘运算不能构成实数域R上的线性空间．

由这些例子可以看出，向量空间的定义具有高度抽象性，其中的向量可以代表具有各种不同属性的量．

定义 1.2　设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$是一个向量组，$k_1,k_2,\cdots,k_m$为$m$个常数，则称

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$$

为向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$的线性组合；若存在向量$\boldsymbol{\beta}$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$$

则称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性表示，其中$k_1,k_2,\cdots,k_m$称为线性表示系数．

定义 1.3　如果向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$中的每一个向量都可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性表示，则称向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$都可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性表示；若两个向量组互相可以线性表示，则称这两个向量组是等价的．

例 1.10　任何一个二阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$，均可由下列四个矩阵

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

线性表示，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\boldsymbol{B}_{11}+a_{12}\boldsymbol{B}_{12}+a_{21}\boldsymbol{B}_{21}+a_{22}\boldsymbol{B}_{22}$$

例 1.11　由所有次数不超过n的实系数多项式构成线性空间中，向量组$1,x,x^2,\cdots,x^n$与向量组$1,x-x_0,(x-x_0)^2,\cdots,(x-x_0)^n$是相互等价的．

解：由二项式展开公式可知，向量组$1,x-x_0,(x-x_0)^2,\cdots,(x-x_0)^n$中的每个向量均可由向量组$1,x,x^2,\cdots,x^n$线性表示；反之，利用泰勒公式，向量组$1,x,x^2,\cdots,x^n$中的每个向量也都可以由向量组$1,x-x_0,(x-x_0)^2,\cdots,(x-x_0)^n$线性表示．由定义可知，上述两个向量组是等价的．

§2　向量组的线性相关性

线性相关与线性无关是线性空间中向量之间存在的重要关系，也是一类很基本的概念．

定义 1.4 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是一个向量组，若存在 m 个不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0} \tag{1.1}$$

恒成立，则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的；否则，称它是线性无关的．

换句话说，若要使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 不可．那么就称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性无关．

例 1.12 在二阶方阵构成的向量空间中，四个矩阵

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

组成的向量组是线性无关的，这是因为，若要使

$$a_{11}\boldsymbol{B}_{11}+a_{12}\boldsymbol{B}_{12}+a_{21}\boldsymbol{B}_{21}+a_{22}\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

成立，则必有 $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$ 不可．

例 1.13 向量组 $\boldsymbol{a}_1=(0,1,0)^T,\boldsymbol{a}_2=(0,0,1)^T,\boldsymbol{a}_3=(0,2,3)^T$ 是线性相关的．这是因为存在 $k_1=2,k_2=3,k_3=-1$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3=(0,0,0)^T$

例 1.14 由所有次数不超过 n 的实系数多项式构成线性空间中，向量组 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是线性无关的．这是因为，若要使

$$k_0 1+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_nx^n=0$$

对任意的 x 恒成立，则必有 $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 不可．

定理 1.1 在一个向量组中，如果存在部分向量是线性相关的，则整个向量组是线性相关的．

证明：不妨设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 中的部分向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_p(p<m)$ 是线性相关的，由定义可知，必存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_p$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{a}_p=\boldsymbol{0}$$

于是存在 m 个不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_p,k_{p+1}=k_{p+2}=\cdots=k_m=0$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{a}_p+k_{p+1}\boldsymbol{a}_{p+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

所以，向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的．(证毕)

定理 1.2 线性无关向量组的任何(非空)部分向量组总是线性无关的．

证明：利用定理 1.1 的结果使用反证法容易得证，从略．

定理 1.3 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充分必要条件是其中至少存在一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示．

证明：①必要性，设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，即存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

不妨设 $k_m\neq0$，于是有

$$\boldsymbol{a}_m=(-\frac{k_1}{k_m})\boldsymbol{a}_1+(-\frac{k_2}{k_m})\boldsymbol{a}_2+\cdots+(-\frac{k_{m-1}}{k_m})\boldsymbol{a}_{m-1}$$

②充分性，设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 中至少存在一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示．不妨设 $\boldsymbol{a}_m$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{m-1}$ 线性表示，即存在 $m-1$ 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}$，使得

$$\boldsymbol{a}_m=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}$$

即
$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}+(-1)\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

也就是说，存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1},-1$，使得(1.1)式成立，因此向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的．(证毕)

定理 1.4 如果向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示．

证明：设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，由定义可知，存在 $m+1$ 个不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$，使得(1.1)式成立，即

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m+k_{m+1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0} \tag{1.2}$$

我们可以说明必有 $k_{m+1}\neq 0$. 若不然，假设 $k_{m+1}=0$，则(1.2)式即为

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

由于向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，所以其中的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必全为零不可．这样 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$ 就全为零了，因此与上述假设常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$ 不全为零相矛盾．

由于 $k_{m+1}\neq 0$，从(1.2)式中可以解出 $\boldsymbol{\beta}$ 为

$$\boldsymbol{\beta}=(-\frac{k_1}{k_{m+1}})\boldsymbol{a}_1+(-\frac{k_2}{k_{m+1}})\boldsymbol{a}_2+\cdots+(-\frac{k_m}{k_{m+1}})\boldsymbol{a}_m$$

即，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示．(证毕)

定理 1.5 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的 n 个列向量线性相关的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<n$.

证明：①必要性，设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的 n 个列向量

$$\boldsymbol{a}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})^T$$
$$\boldsymbol{a}_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{m2})^T$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{a}_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})^T$$

线性相关，由上述定理 1.3 可知，至少有一个列向量是其他列向量的线性组合．不妨设

$$\boldsymbol{a}_n=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}$$

如果 $n\leqslant m$，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的所有 n 阶子式的第 n 列也是其余 $n-1$ 列的线性组合，由行列式的性质可知 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的所有 n 阶子式都等于零，所以有 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<n$.

当 $n>m$ 时，$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 没有 n 阶子式，所以也有 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<n$.

②充分性，设 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r<n$，不妨设位于 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的左上角 r 阶子式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0$$

下面我们来说明，$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的第 $r+1,r+2,\cdots,n$ 列均可表示为前 r 列的线性组合．为此，我们特别构造如下行列式

$$D_p=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{ri} \\ a_{p1} & \cdots & a_{pr} & a_{pi} \end{vmatrix} \qquad (r<i\leqslant n,1\leqslant p\leqslant m)$$

当 $1\leqslant p\leqslant r$ 时，D_p 中有两行相同，从而 $D_p=0$；当 $p>r$ 时，D_p 是矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的一个 $r+1$ 阶

子式，由于 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$，所以也应该有 $D_p=0$. 这就是说，对任何 $p=1,2,\cdots,m$，均有 $D_p=0$.

现将 D_p 按最后一行展开，得

$$D_p=a_{p1}A_{p1}+a_{p2}A_{p2}+\cdots+a_{pr}A_{pr}+a_{pi}D=0$$

由于 $D\neq0$，因此有

$$a_{pi}=-\frac{A_{p1}}{D}a_{p1}-\frac{A_{p2}}{D}a_{p2}+\cdots+(-\frac{A_{pr}}{D})a_{pr}\quad(r<i\leqslant n,1\leqslant p\leqslant m)$$

注意到 D_p 中 a_{pk} 的代数余子式 A_{pk} 实际上是与 p 没有关系的($k=1,2,\cdots,r$)，这样以来，我们重新记 $\lambda_k=-\frac{A_{pk}}{D}(k=1,2,\cdots,r)$，则有

$$a_{pi}=\lambda_1a_{1p}+\lambda_2a_{2p}+\cdots+\lambda_ra_{rp}\quad(r<i\leqslant m,1\leqslant p\leqslant n)$$

此式表明，矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的第 $i(r<i\leqslant m)$ 个列向量中的每个分量均为前 r 个列向量中对应分量的线性组合，因此矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的第 $r+1,r+2,\cdots,n$ 个列向量均为前 r 个列向量的线性组合，从而 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的 n 个列向量是线性相关的.（证毕）

同理可证

定理 1.6 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为 $m\times n$ 型矩阵，$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的 m 个行向量线性相关的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})<m$.

推论 1 任意 $m(m>n)$ 个 n 维向量必线性相关.

推论 2 任意 $n(n<m)$ 个 m 维向量

$\boldsymbol{a}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})^T,\boldsymbol{a}_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{m2})^T,\cdots,\boldsymbol{a}_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})^T$

线性无关的充分必要条件是矩阵

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\tag{1.3}$$

的秩等于 n.

推论 3 n 个 n 维向量

$\boldsymbol{a}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})^T,\boldsymbol{a}_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2})^T,\cdots,\boldsymbol{a}_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{nn})^T$

线性无关的充分必要条件是行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0\tag{1.4}$$

推论 4 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中有 r 个行(或列)向量是线性无关的，任何 $r+1$ 个行(或列)向量都是线性相关的.

推论 5 如果向量组

$\boldsymbol{a}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})^T$

$\boldsymbol{a}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})^T$

………………………

$\boldsymbol{a}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})^T$

是线性无关的，则向量组

$$b_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},b_{11},\cdots,b_{1p})^T$$
$$b_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},b_{21},\cdots,b_{2p})^T$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn},b_{m1},\cdots,b_{mp})^T$$

仍是线性无关的．

定理 1.7 如果向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关，并且可由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性表出，则必有 $r\leqslant s$.

证明：我们对 r 采用数学归纳法．

（Ⅰ）当 $r=1$ 时显然结论成立；

（Ⅱ）假设当 $r=k-1$ 时定理的结论成立；

（Ⅲ）考察 $r=k$ 时的情况．由定理条件可设

$$\boldsymbol{b}_i=b_{i1}\boldsymbol{a}_1+b_{i2}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{is}\boldsymbol{a}_s\qquad(i=1,2,\cdots,k)\tag{1.5}$$

由于向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k$ 线性无关，因此向量 $\boldsymbol{b}_k\neq\boldsymbol{0}$，于是 $b_{k1},b_{k2},\cdots,b_{ks}$ 不全为零．不妨设 $b_{ks}\neq0$，这样可以在(1.5)式中令 $i=k$，即

$$\boldsymbol{b}_k=b_{k1}\boldsymbol{a}_1+b_{k2}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{ks}\boldsymbol{a}_s$$

并从中求得

$$\boldsymbol{a}_s=\frac{1}{b_{ks}}(\boldsymbol{b}_k-b_{k1}\boldsymbol{a}_1-b_{k2}\boldsymbol{a}_2-\cdots-b_{ks-1}\boldsymbol{a}_{s-1})\tag{1.6}$$

将(1.6)式代入(1.5)式得

$$\boldsymbol{b}_i=b_{i1}\boldsymbol{a}_1+b_{i2}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{is-1}\boldsymbol{a}_{s-1}$$
$$+\frac{b_{is}}{b_{ks}}(\boldsymbol{b}_k-b_{k1}\boldsymbol{a}_1-b_{k2}\boldsymbol{a}_2-\cdots-b_{ks-1}\boldsymbol{a}_{s-1})\qquad(i=1,2,\cdots,k-1)$$

整理后得，对 $i=1,2,\cdots,k-1$

$$\boldsymbol{b}_i-\frac{b_{is}}{b_{ks}}\boldsymbol{b}_k=(b_{i1}-\frac{b_{is}}{b_{ks}}b_{k1})\boldsymbol{a}_1+(b_{i2}-\frac{b_{is}}{b_{ks}}b_{k2})\boldsymbol{a}_2+\cdots+(b_{is-1}-\frac{b_{is}}{b_{ks}}b_{ks-1})\boldsymbol{a}_{s-1}\tag{1.7}$$

若令 $\boldsymbol{b}_i-\frac{b_{is}}{b_{ks}}\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{c}_i(i=1,2,\cdots,k-1)$，则容易说明这 $k-1$ 个向量是线性无关的．事实上，若不然，则存在 $k-1$ 个不全为零的常数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,k-1)$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{c}_1+\lambda_2\boldsymbol{c}_2+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{c}_{k-1}=\boldsymbol{0}$$

即

$$\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\lambda_{k-1}\boldsymbol{b}_{k-1}-\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_{is}}{b_{ks}}\lambda_i\right)\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{0}\tag{1.8}$$

由于 $\lambda_i\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$ 不全为零，从而(1.8)式表明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性相关，因此与假设矛盾．

这样，(1.7)式即为 $k-1$ 个线性无关的向量由 $s-1$ 个向量线性表出，由假设（Ⅱ）便有 $k-1\leqslant s-1$，即 $k\leqslant s$. 由数学归纳法可知，定理结论正确．（证毕）

定义 1.5 如果一个向量组中有 r 个向量是线性无关的，而且其余向量可以由这 r 个向量线性表示，则称这 r 个向量为该向量组的最大线性无关组，r 称为该向量组的秩．

根据上述定义，矩阵的行向量组的秩称为矩阵的行秩，矩阵的列向量组的秩称为矩阵的列秩，而且二者相等，都等于矩阵的秩．正是由于这个原因，我们经常借助于求矩阵秩的方法求向量组的秩．

在一个给定的向量组中，最大线性无关组一般不是惟一的，但它们是相互等价的向量组．它们所含的向量的个数是相同的，也就是说，任何给定的向量组具有惟一的秩 r.

特别地，线性无关向量组的最大线性无关组就是它本身．

§3　线性空间的基底与维数

由于线性空间中存在加法和数乘两种运算，因此只要线性空间中存在一个非零向量，它就一定存在无穷多个向量．这么多的向量它们之间具有怎样的联系？线性空间具有怎样的结构？本节将针对这些问题进一步展开分析与讨论．

定义 1.6　给定向量空间 V 中的一个向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果该向量组满足：

（Ⅰ）向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，线性无关；而 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可；

（Ⅱ）向量空间 V 中任何一个向量均可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示，

则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是向量空间 V 的一个基底．基底中所含向量的个数称为向量空间 V 的维数．记为 $dimV$.

例如，向量组

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^T \tag{1.9}$$

是 n 元数组构成的向量空间 V_n 中的一个基底．(1.9)式给出的向量组线性无关性是显然的；任何一个 n 元数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 均可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

由定义可知，(1.9)是向量空间 V_n 中的一个基底．由于基底中含有 n 个向量，所以它的维数是 n，因此我们常称它为 n 维向量空间．n 元数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 也称为 n 维向量．

值得指出的是，在同一个向量空间中，基底并不是惟一的．实际上一个向量空间的基底有无穷多．但我们有如下结果：

定理 1.8　同一向量空间中的任意两个基底都是等价的，并且所含向量的个数是相同的．

证明：设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 是向量空间 V 的任意两个不同的基底．由基底的定义可知，它们都是线性无关组，而且可以互相线性表示，所以它们是等价的．

由于 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关，并且可由 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 线性表示，由定理 1.7 可知，$n\leqslant m$；同理可以说明有 $m\leqslant n$，所以必有 $n=m$.（证毕）

推论 1　向量空间的维数是惟一的．

推论 2　n 维向量空间中任意 n 个线性无关的向量均构成一个基底．

推论 3　n 维向量空间中任意 $k(k<n)$ 个线性无关的向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，总存在 $n-k$ 个向量 $\boldsymbol{a}_{k+1},\boldsymbol{a}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{a}_n$，使得 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 成为 n 维向量空间的基底．

例 1.15　在由所有次数不超过 n 的多项式构成的向量空间 $P_n[x]$ 中，向量组 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是一个基底．其线性无关性在例 1.14 中已经证明了；任意一个次数不超过 n 的多项式均有

$$P(x)=a_0 1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

由于基底中有 $n+1$ 个向量，因此向量空间 $P_n[x]$ 是 $n+1$ 维的．

例 1.16　向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,\cdots,0)^T,\cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n=(1,1,\cdots,1)^T$ 是 n 维向量空间 V_n 中另一个基底．

例 1.17　在所有 $m\times n$ 型的实矩阵构成的线性空间 $V_{m\times n}$ 中，取矩阵 E_{ij} 为 (i,j) 处的元素为 1，其余位置的元素均为 0 的矩阵，即

$$E_{ij}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix} & \cdots i_{\text{行}} \\ \begin{array}{c}\vdots\\ j\\ \text{列}\end{array} & \end{array}\qquad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\tag{1.10}$$

则(1.10)式是线性空间 $V_{m\times n}$ 中的一个基底．由于基底中含有 $m\times n$ 个向量，因此该线性空间是 $m\times n$ 维的．

定义 1.7　设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是线性空间 V_n 的一个基底，对于线性空间 V_n 中的任何一个向量 $\boldsymbol{c}$，必存在 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n\tag{1.11}$$

我们称 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为向量 $\boldsymbol{c}$ 在基底 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 下的坐标．

很显然，在不同的基底之下，同一个向量具有不同的坐标．这样自然就会产生一个问题，同一个向量在不同的基底之下的坐标存在怎样的联系呢？与之相联系的更深刻的一个问题是同一个线性空间中不同的基底具有什么内在的关系呢？

首先我们来考察后一个问题．给定 n 维线性空间 V_n 的两个基底

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\qquad\text{(A)}$$

$$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\qquad\text{(B)}$$

将基底(B)利用基底(A)线性表出，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1&=c_{11}\boldsymbol{a}_1+c_{21}\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{b}_2&=c_{12}\boldsymbol{a}_1+c_{22}\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{a}_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{b}_n&=c_{1n}\boldsymbol{a}_1+c_{2n}\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{a}_n\end{aligned}$$

即

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\tag{1.12}$$

这就是基底(A)与基底(B)的关系．其中矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\tag{1.13}$$

称为从基底(A)到基底(B)的过渡矩阵．

显然，过渡矩阵是可逆矩阵，而且

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\tag{1.14}$$

就是从基底(B)到基底(A)的过渡矩阵．

现在我们就可以讨论前一个问题了，即同一个向量在两个不同的基底之下的坐标之间的关系．设 $\boldsymbol{x}$ 是线性空间 V_n 的一个向量，给定基底(A)、(B)，则有

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\tag{1.15}$$

以及

$$\boldsymbol{x}=x_1'\boldsymbol{b}_1+x_2'\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_n'\boldsymbol{b}_n=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}\tag{1.16}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ 分别是 $\boldsymbol{x}$ 在基底(A)和(B)下的坐标．

联立(1.15)和(1.16)两式，得

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

利用(1.12)式

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\tag{1.17}$$

或者

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}\tag{1.18}$$

这就是同一个向量在两个不同基底下的坐标之间的关系．

例 1.18　已知 n 维线性空间 V_n 中的两个基底

① $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^T$

② $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,\cdots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(1,1,\cdots,1)^T$

求任一向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 在基底②下的坐标．

解：因为　$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$

所以向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 在基底①下的坐标为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，而从基底①到基底②的

过渡矩阵

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

它的逆为

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & -1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由(1.17)式可得向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 在基底②下的坐标为

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & -1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_2\\ a_2-a_3\\ \vdots\\ a_{n-1}-a_n\\ a_n\end{pmatrix}$$

§4 线性子空间

在通常的三维几何空间中,我们考察一个通过原点的平面.不难看出,这个平面上的所有向量对于加法和数乘组成一个二维的线性空间.这就是说,它一方面是三维几何空间的一个部分,同时,它对于原来的运算也构成一个线性空间.

定义 1.8 设 W 是线性空间 V 的一个非空子集,如果 W 对于 V 中的加法和数乘运算也构成一个线性空间,则称 W 是线性空间 V 的一个线性子空间.

下面我们来讨论一个非空子集 W 构成一个线性子空间的条件.

设 W 是线性空间 V 的子集合,因为 V 是线性空间,所以对于 V 中原有的加法和数乘 W 中的向量自然满足线性空间定义中的规则(1)、(2)、(5)、(6)、(7)、(8),为了使 W 构成线性空间,主要的条件是要求 W 对于 V 中原有运算的封闭性以及规则(3)、(4)成立.但实际上,当 W 关于加法和数乘封闭时,规则(3)、(4)自然成立.因此,我们有如下判别子空间的重要方法.

定理 1.9 如果 W 对于加法和数乘满足封闭性,即

(1)如果 W 包含向量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$,那么 W 就必包含 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$.

(2)如果 W 包含向量 $\boldsymbol{x}$，那么 W 必包含 $k\boldsymbol{x}$，其中 k 为任意常数．
那么 W 就是 V 的一个线性子空间，简称为子空间．

推论 1 任何子空间中必含有负元．

推论 2 任何子空间中必含有零元．

例 1.19 在线性空间 V_n 中，由单个零向量构成的子集是一个线性子空间；V_n 自身也是自己的一个线性子空间．我们通常称这两个子空间为平凡子空间．

例 1.20 在线性空间 V_n 中，下列子集

(1)$W_1=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0\}$

(2)$W_2=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(0,a_2,\cdots,a_n)^T\}$

(3)$W_3=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T,\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1\}$

(4)$W_4=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(1,a_2,\cdots,a_n)^T\}$

哪些构成线性子空间？

解：(1)、(2)构成子空间．

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in W_1$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in W_1$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=0$

于是
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T+(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\\&=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=0$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in W_1$；而对于数乘运算，有
$$k\boldsymbol{a}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^T,$$

而且 $\sum\limits_{i=1}^{n}ka_i=k\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$，所以 $k\boldsymbol{a}\in W_1$．由定理 1.9 可知，W_1 构成 V_n 的线性子空间．

同理可以验证 W_2 也构成 V_n 的线性子空间；而(3)中的 W_3 不含有零元，(4)中的 W_4 不含负元和零元，所以它们都不能构成 V_n 的线性子空间．

例 1.21 给定 V_n 的子集 $W=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in V_n\}$，试证 W 是线性空间 V_n 的线性子空间．

证明：由于线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 总有零解，即 $\boldsymbol{0}\in W$，因此 W 是非空集合．

(1)任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$，即 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{A}_{m\times n}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$.

(2)任取 $\boldsymbol{x}\in W$，即 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{A}_{m\times n}(\lambda\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda\boldsymbol{x}\in W$.

综合可知，W 是线性空间 V_n 的线性子空间．我们通常称 W 为线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，并用 $N(\boldsymbol{A}_{m\times n})$ 表示．当系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 r 时，解空间 $N(\boldsymbol{A}_{m\times n})$ 的维数是 $n-r$.

与此不同的是，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 如果有解，则其解构成的集合显然是线性空间 V_n 的子集，但不是线性空间 V_n 的子空间．

例 1.22 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性空间 V_n 中向量组，它的所有线性组合形成的子集
$$L(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=\{k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m\}\tag{1.19}$$
是线性空间 V_n 的一个线性子空间，并称该子空间为由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 生成的子空间．

定义 1.9 设 W_1、W_2 是线性空间 V 的两个线性子空间，我们称集合
$$S=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in W_1,\boldsymbol{x}\in W_2\}\tag{1.20}$$