◇ 上海东方激光教育文化有限公司 组编

2006年

浙江高考数学 文科

零距离突破

专项训练篇

● 第二轮复习用 ●

中国三峡出版社

● 上海东方激光教育文化有限公司 组编

2006年

浙江高考数学 文科 零距离突破

—— 专项训练篇（第二轮复习用）

主 编 李刚豪 符海龙

编 者 凌渭忠 范水龙 密恩慧 陈 燕
吕 克 符海龙 李刚豪

中国三峡出版社

图书在版编目（CIP）数据

浙江高考数学零距离突破.3，专项训练篇：文科
/上海东方激光教育文化有限公司 组编.
—北京：中国三峡出版社，2005.7
ISBN 7-80099-942-4

Ⅰ.浙… Ⅱ.上… Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 075347 号

中国三峡出版社出版发行
（北京市海淀区太平路 23 号院 12 号楼 100036）
电话：（010）68218553 51933037
http://www.e-zgsx.com
E-mail: sanxiaz@sina.com

上海交大印务有限公司印制 新华书店经销
2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷
开本：787×1092 毫米 1/16 印张：75.5 字数：1812 千字
ISBN 7-80099-942-4 定价：105.00 元（全五册）

前　言

第一轮复习终结，第二轮复习开始。基础又夯了一遍，高中阶段的所有内容又梳理了一遍，心里有点踏实了，信心也逾步地树立起来。

相信大部分考生已经完成了数学第一轮复习。通过第一轮的复习，考生已经基本系统掌握了高中数学知识，并初步形成知识体系。一般在一轮复习的过程中，学生也做了大量的练习题，积累了丰富的解题经验。在第二轮的复习中，为了取得更好的复习效果，我们凭多年的高三数学教学经验，给考生以下几方面建议：

回顾并系统地整理高中数学的基础知识和基本方法，在头脑中形成明晰的知识体系和网络化的知识结构。

现在的高考试题更注重运用所学知识解决实际问题的考查，注重创新能力的考查。命题力本立意新、情境新、思维价值高，因此不管做了多少题目，翻阅了多少复习资料，若不能理解题目的精要之处，不能学会分新问题、解决问题的方法，在高考中很难拿高分。数学能力的提高在于解题的质重而非解题的数量。在解题过程中要善于从题目的条件和来解过程中提取有用的信息，作用于自身的数学认知结构，提取相关的知识，推动题目信息的延伸，归结到某个确定的数学关系，从而形成一个解题的行动序列。题目信息与不同数学知识的结合，可能会形成多个解题方向，逾取其中简捷的路径，就会得到题目的最优解法。同学们在解题过程中应不断地进行这样的思考和操作，才能使自身的数学能力得到有效提高。第二轮复习阶段是提高自身综合能力的最佳阶段。在第二轮的专题复习过程中应充分领会其中的数学思想和方法。

后期的复习过程中，要立足于基础，要回归教材。

教材能为创设数学问题、有效考评考生提供丰富的素材。纵观进几年的高考试卷，相当数重的题目源于教材，是教材基础知识、例题、习题的加工、综合、类比、延伸和相展。成们要充会重视教材的基础作用和示范作用，对教材的知识点、知识脉络给予重新审视和细教的梳理，把提各部分知识在各自发展中的纵向联系和各部分知识之间的横向联系，注重知识的形成过程，特别是数学定理、公式的推导过程和例题的来解过程，这样能有效地巩固基础知识，发展数学能力，

充分发挥教材的扩张效应。在回归教材中，进行自我查缺补漏，发现问题，及时补救和完善。有针对性地动手做题，加强自我解题训练。

考生掌握的数学知识、数学能力要通过高考试卷体现出来，要体现在高考分数上，因此后期的解题训练是必不可少的重要环节，在解题训练中不要盲目多做题，搞题海战术，要提醒考生注意以下几点：

1. 要了解自己，了解自己的知识薄弱环节，寻找相关题目，进行有选择性、有针对性的训练。

2. 在做题过程中，要掌握解决问题的基本方法，注重通性通法，做题要有主动意识、做题要及时总结和反思，力争通过做一题，得到一类问题的解决方法。

3. 在做题过程中，注重解题的思考过程，注重研究解题的方向和策略，逐步提高自身的解题能力。

4. 在做题过程中，要有一个阶段对选择题、填空题进行专门训练，要加强准确度的训练，提高解题选度，只有这样才能在高考中取得好我绩。

5. 每周坚持在规定的时间内做 1～2 套综合题，做好试卷的自批、自评工作，始终保持良好的竞技状态。

6. 加强自身解题规范性的训练，了解试卷批改中的给分点，严格按评分标准书写解答题，熟练、准确地用文字语言、符号语言、逻样语言表达解题过程，字迹工整，力争会做的题目不丢步骤分，不完全会做的题目也能拿到部分分数。

高考和高考复习的经历将是我们每位考生不可多得的终生受用的宝贵财富，多年以后我们会非常怀念这段目标明确、向前冲的奋斗时光。祝你在 2006 年高考中获得成功，考入自己的理想大学！

编　者

E-mail: 0571donghang@sina.com

2005 年 11 月

目　录

专题一　集合与简易逻辑

【高考导航】

考试内容：

本章知识主要分为集合、简单不等式的解法(集合化简)、简易逻辑三部分.

考试要求：

集合知识作为整个数学知识的基础，在高考中重点考查的是集合的化简以及利用集合与简易逻辑的知识来指导我们思维，寻求解决其他问题的方法.

学法要求：本章的基本概念较多，要力求在理解的基础上进行记忆.

【高考复习建议】

1. 解决集合问题时一要注意吃透概念，准确表示，善于推理判断，并留心元素互异性特征的利用、所给集合能否为空集的讨论、所求特定系数的取舍；二要注意集合与函数、方程、不等式、三角、解析几何、立体几何等知识的密切联系与综合应用；三要注意灵活运用等价转化、分类讨论、数形结合、补集法等思想方法解题.

2. 在面临与命题相关的具体问题中，应结合语境仔细阅读、推敲，反复咀嚼有关逻辑联结词. 为了加深对于逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义的理解，可联系集合运算中的“交”、“并”、“补”对应地理解. 尤其应注意，对逻辑联结词“或”的理解是难点.

3. 在研究四种命题及其相互关系时，应注意逆命题、否命题、逆否命题都是相对于原命题而言的. 另应注意区分“否命题”与“命题的否定”的不同含义：前者是同时否定条件和结论，而后者只否定结论.

4. 判断条件的充要关系时，究竟是充分非必要条件，还是必要非充分条件？还是既充分又必要条件？还是非充分又非必要条件？应当判断到位. 在寻求充要条件或证明充要性命题时，应准确运用相关概念，防止误把“充分”当“必要”，或把“必要”当“充分”.

【高考命题展望】

1. 集合解题规律：(1) 对所给的集合进行尽可能的化简；(2) 有意识应用维恩图来寻找各集合之间的关系；(3) 有意识运用数轴或其他方法来直观显示各集合的元素；(4) 力求寻找构成此集合命题的简单命题；(5) 利用子集与推出关系的联系将问题转化为集合问题.

2. 充分条件与必要条件是四种命题关系的深化. 应当深刻领会充分条件、必要条件、充要条件的内涵，防止概念混淆. 尤其是“必要条件”这一概念较难理解，可借助“逆否命题”的概念来帮助理解. 一个结论成立的充分条件可以不止一个，必要条件也可以不止一个.

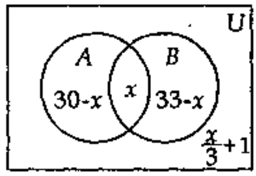
3. 当直接判定命题条件的充要性较困难时，可等价地转化为对该命题的逆否命题进行判断.

【典型例题】

【例 1】　向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是全体的五分之三，其余的不赞成，赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成；另外，对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人. 问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

【分析】　在集合问题中，有一些常用的方法如数轴法取交并集、韦恩图法等，需要考生

切实掌握.解答本题的闪光点是考生能由题目中的条件,想到用韦恩图直观地表示出来.



【解】 赞成 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$,赞成 B 的人数为 $30+3=33$,如上图,记 50 名学生组成的集合为 U,赞成事件 A 的学生全体为集合 A;赞成事件 B 的学生全体为集合 B.

设对事件 A、B 都赞成的学生人数为 x,则对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$,赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$,赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.

依题意 $(30-x)+(33-x)+x+(\frac{x}{3}+1)=50$,解得 $x=21$.

所以对 A、B 都赞成的同学有 21 人,都不赞成的有 8 人.

【例 2】 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,且 $A\cap B=B$,求实数 m 范围.

【分析】 化简条件得 $A=\{1,2\}$,$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$,根据集合中元素个数来对集合 B 分类讨论,$B=\varnothing$,$B=\{1\}$ 或 $\{2\}$,$B=\{1,2\}$.

【解】 当 $B=\varnothing$ 时,$\Delta=m^2-8<0$

$\therefore -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

当 $B=\{1\}$ 成 $\{2\}$ 时,$\begin{cases}\Delta=0\\1-m+2=0\text{ 或 }4-2m+2=0\end{cases}$,$m$ 无解

当 $B=\{1,2\}$ 时,$\begin{cases}1+2=m\\1\times2=2\end{cases}$

$\therefore m=3$.

综上所述,$m=3$ 成 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

【点评】 分类讨论是中学数学的重要思想,全面地挖掘题中隐藏条件是解题素质的一个重要方面,如本题当 $B=\{1\}$ 或 $\{2\}$ 时,不能遗掘 $\Delta=0$.

【例 3】 设全集 $U=\mathbf{R}$.

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$;

(2) 记 A 为(1)中不等式的解集,集合 $B=\{x\mid\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=0\}$,若 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素,求 a 的取值范围.

【解】 (1) 由 $|x-1|+a-1>0$,得 $|x-1|>1-a$.

当 $a>1$ 时,解集是 $\mathbf{R}$;

当 $a\leqslant1$ 时,解集是 $\{x\mid x<a\text{ 或 }x>2-a\}$.

(2) 当 $a>1$ 时,$\complement_U A=\varnothing$;当 $a\leqslant1$ 时,$\complement_U A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant2-a\}$.

因 $\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=2[\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}+\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}]$

$=2\sin\pi x$.

由 $\sin\pi x=0$，得 $\pi x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\in\mathbf{Z}$，所以 $B=\mathbf{Z}$.

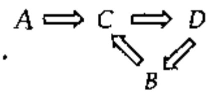
当 $(\complement_U A)\cap B$ 恬有 3 个元素时，a 就满足 $\begin{cases}a<1\\2\leqslant(2-a)-a<4\end{cases}$ 解得 $-1<a\leqslant 0$.

【点评】 当 $(2-a)-a=2$ 时，要注意检验 $a\in\mathbf{Z}$，$2-a\in\mathbf{Z}$.

【例 4】 (1) 设 $p:A\cap B=A$；$q:A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的__________条件；q 是 p 的__________条件.

(2) 设 A 是 C 的充分条件，B 是 C 的充分条件，D 是 C 的必要条件，D 是 B 的充分条件，那么 D 是 C 的__________条件，A 是 B 的__________条件.

【分析】 弄清概念、理清关系后再加以判断.



【答案】 (1) 必要非充分；充分非必要

(2) 充要；充分

【点评】 对于相关因素较复杂的充要性判断问题，有时画出并利用“关系图”，可以更为形象、直观、简便地加以判断.

【变题】 设甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丁是丙的必要不充分条件，那么甲是丁的__________条件.

【提示】 由已知得甲 $\Rightarrow$ 乙 $\Leftrightarrow$ 丙 $\Rightarrow$ 丁，且乙 $\Leftarrow$ 甲，丁 $\Rightarrow$ 丙，易知答案为：充分不必要.

【例 5】 已知 $c>0$，设：

P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

【解】 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\geqslant 2c,\\2c, & x<2c,\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

$\therefore$ 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\dfrac{1}{2}$.

如果 P 正确，且 Q 不正确，则 $0<c\leqslant\dfrac{1}{2}$.

如果 P 不正确，且 Q 正确，则 $c\geqslant 1$. 所以 c 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

【点评】 不等式 $x+|x-2c|>1$ 还可以通过数形结合求解.

【能力训练】

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2-3x+2=0, a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中元素至多有 1 个，则 a 的取值范围是__________.

2. 集合 $A=\{x\mid\dfrac{x-1}{x+1}<0\}$，$B=\{x\mid |x-b|<a\}$，若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分条件，则 b 的取值范围可以是__________.

3. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid m+1<x<2m-1\}$ 且 $B\neq\varnothing$，若

$A \cup B = A$,则 (　　)

A. $-3 \leqslant m \leqslant 4$　　B. $-3 < m < 4$

C. $2 < m < 4$　　D. $2 < m \leqslant 4$

4. 命题甲:$x \neq 2$ 或 $y \neq 3$;命题乙:$x + y \neq 5$,则 (　　)

A. 甲是乙的充分非必要条件

B. 甲是乙的必要非充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

5. 设非空集合 $A = \{x \mid x^2 + px + q = 0\}$,$M = \{1,3,5,7,9\}$,$N = \{1,4,7,10\}$,若 $A \cap M = \varnothing$,$A \cap N = A$,求 p、q 的值.

6. 设 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant a\} \neq \varnothing$,$B = \{y \mid y = 2x + 3, x \in A\}$,$C = \{z \mid z = x^2, x \in A\}$,且 $C \subseteq B$. 求实数 a 的取值范围.

7. (1) 设集合 $M = \{x \mid x > 2\}$,$P = \{x \mid x < 3\}$,则"$x \in M$ 或 $x \in P$"是"$x \in (M \cap P)$"的什么条件?

(2) 求使不等式 $4mx^2 - 2mx - 1 < 0$ 恒成立的充要条件.

8. 设 α,β 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个实根,试分析"$a > 2$ 且 $b > 1$"是"两根 α、β 均大于 1"的什么条件?

【思维拓展】

9. 设 $f(x) = x^2 + px + q$,$A = \{x \mid x = f(x)\}$,$B = \{x \mid f[f(x)] = x\}$.

(1) 求证:$A \subseteq B$;

(2) 如果 $A = \{-1,3\}$,求 B.

10. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足:$b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1+2+3+\cdots+n}$,求证:数列 $\{a_n\}$ 成等差数列的充要条件是数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列.

专题二　函　数

【高考导航】

考试内容：

$|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式；一元二次不等式；映射、函数、函数的单调性、函数的奇偶性；反函数、互为反函数的函数图像间的关系；指数概念的扩充、有理指数幂的运算性质、指数函数；对数、对数的运算性质、对数函数、换底公式；简单的指数方程和对数方程；函数的应用举例.

考试要求：

1. 理解 $|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的概念，并掌握它们的解法. 了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系，掌握一元二次不等式的解法.

2. 了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图像间的关系.

3. 理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性. 能利用函数的奇偶性来描绘函数的图像.

4. 了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系，会求一些简单函数的反函数.

5. 理解分数指数的概念，掌握有理指数幂的运算性质，掌握指数函数的概念、图像和性质.

6. 理解对数的概念，掌握对数的运算性质，掌握对数函数的概念、图像和性质.

7. 能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

【高考复习建议】

1. 重视对函数图像和性质的再现. 要引导学生回归基础，多问问自己：函数的性质主要有哪些？具体的函数（二次函数、指数函数、对数函数、三角函数等）又有哪些性质呢？这些基本初等函数的图像清楚吗？图像的变换（平移、对称等）方法都掌握了吗？等等.

2. 重视函数定义域在解决函数性质时的作用. 在讨论函数的奇偶性、单调性时，在求函数的值域或最值时，在求函数的解析式或变形时，都不能丢掉函数的灵魂"定义域". 有些问题中定义域比较隐蔽，要引导学生学会认真审题，把隐含条件挖掘出来，在解有关函数应用题时还要结合实际意义去考虑.

3. 解答函数类客观型试题时，要重视数形结合思想方法的应用. 应用数形结合思想，就是充分考察问题的条件和结论之间的内在联系，既分析其代数意义又揭示其几何意义，借助于函数的图像，就可以直观地、快速地寻找解题思路，使问题得到解决. 这就要求学生能熟练地掌握基本初等函数的图像特征.

4. 重视函数与导数的结合. 利用导数判定一些函数的单调性、求函数的极值和最值，这是研究函数性质的强有力的工具，并且具有普遍的适用性，也是新课程高考卷的一个热点内容. 这就要求我们在复习中高度重视，尤其要加强对三次函数性质的探讨，因为三次函数求导后又与传统的重点内容二次函数相互联系.

【高考命题展望】

由于函数在高中数学中具有举足轻重的地位，它仍将是 2006 年高考的一个热点. 对函数试题的设计依然会围绕几个基本初等函数和函数的性质、图像、应用考查函数知识；与方

程、不等式、解几等内容相结合，考查函数知识的综合应用；在函数知识考查的同时，加强对函数方程、分类讨论、数形结合、等价转化等数学思想方法的考查.

1. 函数的奇偶性　因为函数的奇偶性蕴涵着对称、变换、化归等丰富的数学知识和方法，今年考纲中新增加了“掌握判断一些简单函数的奇偶性的方法”这一考试要求，故而与函数的奇偶性有关的函数性质综合题应予以足够的关注.

2. 复合函数　函数试题的设计始终围绕着几个基本初等函数，并通过这几个函数之间的串联、组合成为复合函数，达到对函数知识、方法和思想的深刻考查. 因而对复合函数类问题，要掌握换元、分解、整体代入等方法，找到其母函数，从而化归为基本初等函数问题加以解决.

3. 抽象函数　抽象函数问题是近几年高考中函数类问题的一个新的热点，由于具体函数与抽象函数之间是特殊化与一般化的关系，因而抽象函数问题的解决方法更加灵活多样，既可以采用特殊化方法，又可以回归函数的各种性质，有利于考查学生的抽象思维能力，故而应引起我们的高度重视.

4. 数学思想　数学思想能从整体上深层次认识数学的实质，对数学知识、数学方法的运用起到导向作用. 对数学思想的教学在新授课和第一轮复习中通常处在“隐含、渗透”阶段，在第二轮复习中就应提升到“介绍、运用”阶段，应更加明确，更加系统，这是一个从模糊到清晰的质的飞跃。函数一章包含了考纲中明确考查的四种数学思想方法，即函数方程思想、分类讨论思想、数形结合思想和等价转化思想等，我们应努力使其成为学生解决函数问题的自觉的行动指南.

【典型例题】

【例 1】　已知 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$，函数 $y=g(x)$ 图像与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，求 $g(11)$ 的值.

【分析】　利用数形对应的关系，可知 $y=g(x)$ 是 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数，从而化 $g(x)$ 问题为已知的 $f(x)$ 的问题.

【解】　$\because y=f^{-1}(x+1)$，　$\therefore x+1=f(y)$

$\therefore x=f(y)-1$，　$\therefore y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数为 $y=f(x)-1$

即 $g(x)=f(x)-1$，　$\therefore g(11)=f(11)-1=\dfrac{3}{2}$.

【点评】　函数与反函数的关系是互为逆运算的关系，当 $f(x)$ 存在反函数时，若 $b=f(a)$，则 $a=f^{-1}(b)$.

【例 2】　如图，$OBCD$ 是平行四边形，$|OB|=1$，$|OD|=2$，$\angle BOD=60^\circ$，动直线 l：$x=t$ 由 y 轴起向右平行移动，分别交平行四边形的边于不同的两点 M、N.

(1) 求点 D 和 C 的坐标，并写出用 t 表示 $\triangle OMN$ 的面积 S 的函数解析式 $S(t)$；

(2) 当 t 为何值时，$S(t)$ 有最大值?并求出此最大值.

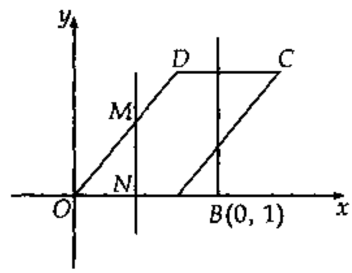
【解】　(1)$x_D=|OD|\cdot\cos60^\circ=1$，$y_D=|OD|\cdot\sin60^\circ=\sqrt{3}$，即点 D 的坐标为$(1,\sqrt{3})$，点 C 的坐标为$(2,\sqrt{3})$，当 $0<t\leqslant1$ 时，

$$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}x_N\cdot|MN|=\frac{1}{2}t\cdot\sqrt{3}t=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2;$$

当 $1<t<2$ 时，直线 BC 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，

$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}x_N \cdot |MN| = \frac{1}{2}x_N(y_M - y_N)$

$= \frac{1}{2}t[\sqrt{3} - \sqrt{3}(t-1)] = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + \sqrt{3}t$



$$\therefore S(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}t^2, & (0 < t \leqslant 1) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + \sqrt{3}t, & (1 < t < 2) \end{cases}.$$

(2) 若 $t \in (0,1]$，则当 $t = 1$ 时，$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$ 有最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

若 $t \in (1,2)$，则 $S(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$；

$\therefore \triangle OMN$ 的面积在 $t = 1$ 时，有最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】 注意分段函数的规范表达.

【例 3】 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y = \log_8 x$ 的图像交于 A、B 两点，分别过点 A、B 作 y 轴的平行线与函数 $y = \log_2 x$ 的图像交于 C、D 两点.

(1) 证明：点 C、D 和原点 O 在同一条直线上；

(2) 当 BC 平行于 x 轴时，求点 A 的坐标.

(1)**【证明】** 设点 A、B 的横坐标分别为 x_1、x_2，由题意知 $x_1 > 1, x_2 > 1$，

则 A、B 纵坐标分别为 $\log_8 x_1$、$\log_8 x_2$.

因为 A、B 在过点 O 的直线上，所以$\frac{\log_8 x_1}{x_1} = \frac{\log_8 x_2}{x_2}$，

点 C、D 坐标分别为$(x_1, \log_2 x_1)$，$(x_2, \log_2 x_2)$，

由于 $\log_2 x_1 = \frac{\log_8 x_1}{\log_8 2} = 3\log_8 x_1$，$\log_2 x_2 = \frac{\log_8 x_2}{\log_8 2} = 3\log_8 x_2$，

所以 OC 的斜率：$k_1 = \frac{\log_2 x_1}{x_2} = \frac{3\log_8 x_1}{x_1}$，

OD 的斜率：$k_2 = \frac{\log_2 x_2}{x_2} = \frac{3\log_8 x_2}{x_2}$，由此可知：$k_1 = k_2$，即 O、C、D 在同一条直线上.

(2)**【解】** 由 BC 平行于 x 轴知 $\log_2 x_1 = \log_8 x_2$，即 $\log_2 x_1 = \frac{1}{3}\log_2 x_2$，

代入 $x_2 \log_8 x_1 = x_1 \log_8 x_2$，得 $x_1{}^3 \log_8 x_1 = 3x_1 \log_8 x_1$，

由于 $x_1 > 1$ 知 $\log_8 x_1 \neq 0$，$\therefore x_1{}^3 = 3x_1$. 又 $x_1 > 1$，$\therefore x_1 = \sqrt{3}$.

则点 A 的坐标为$(\sqrt{3}, \log_8 \sqrt{3})$.

【例 4】 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像关于原点对称，且 $f(x) = x^2 + 2x$.

(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式；

(2) 解不等式 $g(x) \geqslant f(x) - |x - 1|$；

(3) 若 $h(x) = g(x) - \lambda f(x) + 1$ 在$[-1,1]$上是增函数，求实数 λ 的取值范围.

【分析】 这是 2005 年浙江省高考题(文科) 的最后一题，问题(1) 考查“转移代入法”，问题(2)，(3) 考查分类讨论的思想.

【解】 (1) 设函数 $y=f(x)$ 的图像上任一点 $Q(x_0,y_0)$ 关于原点的对称点为 $P(x,y)$，

则$\begin{cases}\dfrac{x_0+x}{2}=0\\ \dfrac{y_0+y}{2}=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_0=-x\\ y_0=-y\end{cases}$.

∵ 点 $Q(x_0,y_0)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图像上.

$\therefore -y=x^2-2x$，即 $y=-x^2+2x$，故 $g(x)=-x^2+2x$.

(2) 由 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$，可得 $2x^2-|x-1|\leqslant 0$

当 $x\geqslant 1$ 时，$2x^2-x+1\leqslant 0$，此时不等式无解；

当 $x<1$ 时，$2x^2-x+1\leqslant 0$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}$.

因此，原不等式的解集为$[-1,\dfrac{1}{2}]$.

(3)$h(x)=-(1-\lambda)x^2+2(1-\lambda)x+1$

① 当 $\lambda=-1$ 时，$h(x)=4x+1$ 在$[-1,1]$上是增函数，

$\therefore\lambda=-1$

② 当 $\lambda\neq-1$ 时，对称轴的方程为 $x=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$

(i) 当 $\lambda<-1$ 时，$\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\leqslant-1$，解得 $\lambda<-1$.

(ii) 当 $\lambda>-1$ 时，$\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\geqslant 1$ 时，解得 $-1<\lambda\leqslant 0$

综上，$\lambda\leqslant 0$.

【点评】 第(3) 小题还可以用导数的方法，即 $x\in[-1,1]$，$h'(x)\geqslant 0$，

而 $h'(x)=-2(1+\lambda)x+2(1-\lambda)$，得$\begin{cases}f'(1)\geqslant 0,\\ f'(-1)\geqslant 0,\end{cases}$解得 $\lambda\leqslant 0$.

【例 5】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $f(3)=\log_2 3$ 且对任意 x、$y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(1) 求证：$f(x)$ 为奇函数；

(2) 若 $f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

【分析】 欲证 $f(x)$ 为奇函数即要证对任意 x 都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立. 在式子 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中，令 $y=-x$ 可得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，于是又提出新的问题，求 $f(0)$ 的值. 令 $x=y=0$ 可得 $f(0)=f(0)+f(0)$，即 $f(0)=0$，$f(x)$ 是奇函数得到证明.

(1)【证明】 $f(x+y)=f(x)+f(y)(x、y\in\mathbf{R})$， ①

令 $x=y=0$，代入 ① 式得 $f(0+0)=f(0)+f(0)$，即 $f(0)=0$.

令 $y=-x$，代入 ① 式，得 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$，又 $f(0)=0$，则有

$0=f(x)+f(-x)$. 即 $f(-x)=-f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)【解】 $f(3)=\log_2 3>0$，即 $f(3)>f(0)$，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调函数，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，又由(1) 知 $f(x)$ 是奇函数.

$f(k\cdot 3^x)<-f(3^x-9^x-2)=f(-3^x+9^x+2)$，$k\cdot 3^x<-3^x+9^x+2$，

$3^{2x}-(1+k)\cdot 3^x+2>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

令 $t = 3^x > 0$，问题等价于 $t^2 - (1+k)t + 2 > 0$ 对任意 $t > 0$ 恒成立.

令 $f(t) = t^2 - (1+k)t + 2$，其对称轴 $x = \frac{1+k}{2}$.

当 $\frac{1+k}{2} < 0$，即 $k < -1$ 时，$f(0) = 2 > 0$，符合题意；

当 $\frac{1+k}{2} \geqslant 0$ 时，对任意 $t > 0$，$f(t) > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+k}{2} \geqslant 0, \\ \Delta = (1+k)^2 - 4 \times 2 < 0 \end{cases}$

解得 $-1 \leqslant k < -1 + 2\sqrt{2}$.

综上所述，当 $k < -1 + 2\sqrt{2}$ 时，$f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x - 2) < 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

【点评】 问题(2)的上述解法是根据函数的性质来求解的. $f(x)$ 是奇函数且在 $x \in \mathbf{R}$ 上是增函数，把问题转化成二次函数 $f(t) = t^2 - (1+k)t + 2$ 对于任意 $t > 0$ 恒成立. 对二次函数 $f(t)$ 进行研究求解. 本题还有更简捷的解法：

分离系数由 $k \cdot 3^x < -3^x + 9^x + 2$，得 $k < 3^x + \frac{2}{3^x} - 1$.

$u = 3^x + \frac{2}{3^x} - 1 \geqslant 2\sqrt{2} - 1$，即 u 的最小值为 $2\sqrt{2} - 1$，要使对 $x \in \mathbf{R}$ 不等式 $k < 3^x + \frac{2}{3^x} - 1$ 恒成立，只要使 $k < 2\sqrt{2} - 1$.

上述解法是将 k 分离出来，然后用基本不等式求解，简捷、新颖.

【能力训练】

*1. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$，满足 $f(2+x) = f(2-x)$，在区间 $[-2,0]$ 上单调递减，设 $a = f(-1.5)$，$b = f(\sqrt{2})$，$c = f(5)$，则 a、b、c 的大小顺序为 ( )

A. $c < b < a$　　B. $b < c < a$　　C. $a < b < c$　　D. $b < a < c$

2. 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty, 4]$　　B. $(-4, 4]$

C. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$　　D. $(-4, 2]$

3. 关于 x 的方程 $5^x = \frac{a+3}{5-a}$ 有负根，则 a 的取值范围是________.

4. 函数 $f(x) = \lg(x^2 + ax - a - 1)(a \in \mathbf{R})$，给出下述命题：

①$f(x)$ 有最小值；

② 当 $a = 0$ 时，$f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；

③ 当 $a > 0$ 时，$f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上有反函数.

则其中正确的命题是________.

5. 已知函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$.

(1) 若定义域是实数集 $\mathbf{R}$，求实数 m 的范围；(2) 若值域是实数集 $\mathbf{R}$，求实数 m 的范围.

6. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为$(1,3)$.

(1) 若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数，求 a 的取值范围.

7. 已知 $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$. 求证：对任意 $x\in\mathbf{R}(x\neq 0)$ 总有 $f(x)>0$.

8. 已知函数 $f(x)=2^{x+1}$，将函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像向左平移2个单位，再向上平移1个单位就得到 $y=g(x)$ 的图像.

(1) 写出 $y=g(x)$ 的解析式；

(2) 求 $F(x)=g(x^2)-f^{-1}(x)$ 的最小值及取得最小值时 x 的值.