AOSAI

奥赛 王牌精解

WANGPAIJINGJIE

六年级数学

主编：郭金玲

作者：杨新荣 董立宏

团结出版社

前言

在当今这个“知本时代”，没有一个家长不重视对孩子的“心智潜能”的开发，家长们希望通过家庭教育、学校教育、课外教育、特长教育等多种途径，使自己的孩子在获得知识、能力的同时，更要获得“创新”的本领。因为所有人都深知“创新”是“知本时代”的核心能力。

在这种情况下，很多家长选择了让孩子学习“奥林匹克”数学，这决不是偶然的。“奥林匹克”数学在我国开展了近二十年，实践证明，学习“奥数”可以很好地开发孩子思维的广度、深度，开拓他们的创新能力。一批又一批的优秀少年，通过学习“奥数”走上成材之路。

“奥林匹克”数学之所以有这样的神奇功效，是因为它能对孩子进行数学应用、数学智能、数学思想、数学策略、数学兴趣等多方面的培养和训练，从而启迪孩子的智慧，激发孩子的潜能。

正如我国国家“奥林匹克”数学集训队资深教练——周沛耕先生所说，一个孩子要想学好“奥林匹克”数学，要有三个必要条件：

1. 家长对孩子培养的战略意义明确，积极支持配合。
2. 孩子对数学有兴趣，学有余力。
3. 选择好的教材与好的教师。

前两个条件对大多数家庭和孩子来说都具备，第三个条件成了关键的制约因素，而好的教材既便于学生掌握、利用，又利于有志于此的教师提高自己。

为此，我们组织了北京市一批常年工作在“奥林匹克”数学教练岗位上的优秀教师，来编写这套教材。他们经过多年的教学实践，积累了丰富的教学经验，综合了多套教材的长处，融会了自己的聪明才智，对于很多教学内容形成了有个人特色的专用讲义，这些讲义有三个共同特点：

1. 例题选择非常有代表性，坡度安排合理。
2. 例题讲解方法巧妙，深入浅出，便于孩子理解，启发孩子智慧。
3. 习题选编新颖、灵活，有挑战性、创新性。

现在这些老师把他们多年的劳动成果集结成册，奉献给您。我们相信这套凝聚了许多优秀教练员创新劳动的教材，一定会给您的孩子和您带来许多益处。在编写、审校过程中尽管我们本着近乎苛求的态度题题推敲、层层把关，书中亦难免有纰漏之处，还望广大读者指正。

《奥赛王牌精解》编委会

2004 年 8 月

奥赛

目录

CONTENTS

上　册

第一讲 分数计算(一)

数学趣题

同学们都听说过“高斯”这个名字吧,我们不难想起高斯求和公式.高斯在很小的时候就展现出过人的才华,三岁时他就能指出父亲帐册上的错误.

其实高斯是个穷人家的孩子,父亲坚决反对他读书,还不如做个泥水匠好.所以,他只能在晚上和老师讨论数学.但不久之后,老师便说:“我没有什么东西可以教你了.”后来,高斯不顾父亲的反对,进了高等学校.数学老师看了他的作业后就说:“你不必再上数学课了.”

高斯的成功,天赋是一方面,但更多的是靠他的勤奋和努力,他说:“假如别人和我一样深刻和持续的思考数学真理,他们会作出同样的发现.”

让我们记住高斯的这句话,开始我们的深刻和持续的思考吧!

小朋友们好,在宫城良田考试的试卷里有这样一道题,里面的运算都是除法.

$1\div(2\div3)\div(3\div4)\div(4\div5)\div(5\div6)\div(6\div7)\div(7\div8)\div(8\div9)=$

这么多的除法运算,有几项除下来还不是有限小数,太麻烦了.别着急,转化成分数试一试.

$$\begin{aligned}原式&=1\div\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\div\frac{4}{5}\div\frac{5}{6}\div\frac{6}{7}\div\frac{7}{8}\div\frac{8}{9}\\&=1\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{6}\times\frac{8}{7}\times\frac{9}{8}\\&=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

转化成分数乘法以后,再约分,运算就简单多了.分数乘、除法很有趣吧,这一讲我们一起研究有关分数计算问题.

单元点睛

(在分数四则混合运算中，按照四则运算的顺序进行计算的同时，如果能够根据数据特点灵活运用运算定律，可以使计算简便、迅速.这一点在一定程度上反映一个人智商的高低和知识掌握的灵活程度.)

典型题解

例1 计算 $11\frac{201}{209}\div\frac{119}{19}\times\frac{34}{195}\times3.003$.

这样思考：

我们在五年级学过数的整除，看到209,119,195这样的数，不难想起7,11,13,19等质数，3.003好象与1001有关系，它可是有7,11,13这三个质因数，好象能约分，可以试一试.

解答 原式

$$=\frac{2\,500}{209}\times\frac{19}{119}\times\frac{34}{195}\times\frac{3\,003}{1\,000}$$

$$=\frac{2\,500}{11\times19}\times\frac{19}{7\times17}\times\frac{2\times17}{3\times5\times13}\times\frac{3\times7\times11\times13}{1\,000}$$

$$=1.$$

(1994年全国奥赛题)

太好了，约完分正好等于1.看到一个数字，你能想起那些数学知识，这也可以说是数感吧！

例2 计算 $2\,004\div2\,004\frac{2\,004}{2\,005}+\frac{1}{2\,006}$.

这样思考：

数太大了，我的数感也没了，不妨用常规方法计算一下，先把带分数化成假分数.分母为 $2\,004\times2\,005+2\,004$，数感来了，此算式可以运用乘法分配律等于 $2\,004\times2\,006$ 嘛，又可以约分了.

解答 原式 $=2\,004\div\frac{2\,004\times2\,006}{2\,005}+\frac{1}{2\,006}$

$$=2\,004\times\frac{2\,005}{2\,004\times2\,006}+\frac{1}{2\,006}$$

$$=\frac{2\,005}{2\,006}+\frac{1}{2\,006}$$

$$=1.$$

真好，又是等于1.聪明的同学们，如果你的数感很强的话，不难看出 $2\,004\div2\,004\frac{2\,004}{2\,005}$ 的被除数与除数都含有2 004，把它们同时除以2 004得到 $1\div1\frac{1}{2\,005}$ 也是很好算的，这一方法就留给你们吧！

例3 计算 $31.8\times7.9+19\times9\frac{1}{4}+44.3\times2.1$.

这样思考：

算式是乘加乘的形式，有可能运用乘法分配律，第一个乘法算式与第三个乘法算式中分别有两个因数7.9和2.1，但另一个因数不相同，可以把44.3拆成31.8与12.5的和后反复运用乘法分配律.

解答 原式 $=31.8\times7.9+19\times9\frac{1}{4}+(31.8+12.5)\times2.1$

$$=31.8\times7.9+19\times9\frac{1}{4}+31.8\times2.1+12.5\times2.1$$

$$=31.8\times(7.9+2.1)+19\times9\frac{1}{4}+12.5\times2.1$$

$$=318+19\times(8+1.25)+1.25\times21$$

$$=318+19\times8+19\times1.25+1.25\times21$$

$$=318+152+1.25\times(19+21)$$

$$=318+152+50$$

$$=520.$$

怎么样，合理运用和、差、积、商的变化规律进行拆分、转化创造条件，运用运算定律，可以使计算变得简单吧！

例4 计算 $\frac{1\times2\times3\times4+2\times4\times6\times8+4\times8\times12\times16}{1\times3\times5\times7+2\times6\times10\times14+4\times12\times20\times28}$.

看起来数很大、很复杂，但排列很有规律性. $1\times2\times3\times4$ 自不用说，$2\times4\times6\times8=1\times2\times2\times2\times3\times2\times4\times2=2^4\times1\times2\times3\times4$；$4\times8\times12\times16=4^4\times1\times2\times3\times4$. 哇！分母也有这一规律，用乘法分配律后又可以约分了.

解答 原式 $=\dfrac{1^4\times1\times2\times3\times4+2^4\times1\times2\times3\times4+4^4\times1\times2\times3\times4}{1^4\times1\times3\times5\times7+2^4\times1\times3\times5\times7+4^4\times1\times3\times5\times7}$

$$=\frac{1\times2\times3\times4\times(1^4+2^4+4^4)}{1\times3\times5\times7\times(1^4+2^4+4^4)}$$

$$=\frac{8}{35}.$$

例5 计算 $\dfrac{2\ 004}{2\ 004^2-2\ 003\times2\ 005}+4$.

$2\ 004^2$ 即 $2\ 004\times2\ 004$，表示 2 004 个 2 004，$2\ 003\times2\ 005$ 表示 2 005 个 2 003，也可以看成 2 004 个 2 003 再加上一个 2 003，这样分母就转变为 $2\ 004\times2\ 004-2\ 003\times2\ 004-2\ 003=2\ 004\times(2\ 004-2\ 003)-2\ 003=2\ 004-2\ 003=1$.

解答 原式 $=\dfrac{2\ 004}{2\ 004\times2\ 004-2\ 003\times2\ 004-2\ 003}+4$

$$=\frac{2\ 004}{2\ 004\times(2\ 004-2\ 003)-2\ 003}+4$$

$$=\frac{2\ 004}{2\ 004-2\ 003}+4$$

$$=2\ 004+4$$

$$=2\ 008.$$

说明 其实此题运用的就是例 3 中的拆数的方法，正反运用乘法分配律.

分数计算千变万化，但万变不离其宗，除了要掌握分数运算的计算法则、定律、性质外，还要有以下两种意识：

1. 约分. 约简分子、分母中的公因数及公因式.

2. 灵活运用定律、性质. 这里说的主要是运用乘法分配律. 对于形如乘加(减)乘的算式及乘法算式,有一个因数可以凑整时,分析另一个因数的特点,必要是进行拆分,从而使用乘法分配律进行简便计算.

同学们,通过以上讲解,不知对你是否有些启发,试一下怎么样?

挑战自我

1 计算 $5.61\times 9.9\times 0.38\div\left(0.19\times 3\frac{3}{10}\times 1.1\right)$.

2 计算 $3\frac{3}{4}\times 2.84\div 3\frac{3}{5}\div\left(1\frac{1}{2}\times 1.42\right)\times 1\frac{4}{5}$.

3 计算 $1\,998\div 1\,998\frac{1\,998}{1\,999}+\frac{1}{2\,000}$.

4 计算 $\frac{1}{9}\times\left(3.47\div\frac{5}{18}-3.6+7.53\times 3\frac{3}{5}\right)$.

5 计算 $1\frac{4}{19}\times\left(18\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+20\frac{1}{12}\div\frac{19}{23}$.

6 计算 $\dfrac{1.3\times 3.9\times 11.7+3\times 9\times 27+\frac{1}{17}\times\frac{3}{17}\times\frac{9}{17}}{1.3\times 2.6\times 3.9+3\times 6\times 9+\frac{1}{17}\times\frac{2}{17}\times\frac{3}{17}}$.

7 计算 $1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{4}\times 1\frac{1}{5}\times\cdots\times 1\frac{1}{997}\times 1\frac{1}{998}\times 1\frac{1}{999}$.

8 计算 $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9\div 8+7+6+5+4+3+2+1}{999\,999\,999^2}$.

9 计算 $\dfrac{2\times 3\times 4\times 5+5\times 6\times 7\times 8}{2\times 3\times 4\times 5}$.

10 计算 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$.

第二讲　分数计算(二)

数学故事

聪明的一休托人给师父捎去 100 元钱和一幅画,画中画的是 8 只八哥和 4 只斑鸠鸟.那人见有机可乘,便藏起 50 元钱,只给了一休的师父 50 元钱.师父看了画后说:“不对吧,应该是 100 元.”你知道师父为什么这样说吗?

师父对那人说:“你看,8 只 8 哥,八八六十四,4 只斑 9 鸟,四九三十六,64 与 36 加起来正好是 100 元.”那人哑口无言,只好将钱如数交出.一休真是聪明!

好了,开始我们今天的学习吧!

单元点睛

在五年级的课本中,我们就学习过这样的题目:$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$,如果直接通分计算,是对的,但是显然很麻烦.我们可以把每一个分数拆分为两个单位分数的差来计算.原式 $=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.通过拆分,使得一部分分数相互抵消,从而能简便计算.两千多年前,古埃及人总喜欢把分数转化为分子是 1 的分数来计算,所以后人常把分子是 1 的分数叫做埃及分数.埃及分数在分数计算中有着重要的规律.

如(1) $\frac{1}{a\times(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$;

(2) $\frac{1}{a\times b}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\times\frac{1}{b-a}$($a,b$ 为两个连续自然数,且 $a<b$);

(3) $\frac{1}{a\times b\times c}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a\times b}-\frac{1}{b\times c}\right)$($a,b,c$ 为三个连续自然数,且 $a<b<c$);

(4) $\frac{1}{a\times b\times c\times d}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{a\times b\times c}-\frac{1}{b\times c\times d}\right)$($a,b,c,d$ 为四个连续自然数,且 $a<b<c<d$).

这一讲,我们就来研究通过分数的拆分,简便计算较复杂的分数计算题.

典型题解

例1 计算$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99}+\frac{1}{99\times100}$.

这样思考：

每项分子都是1，分母都是两个连续自然数的乘积，所以每项都可以拆成两个单位分数的差，一部分分数相互抵消，从而使计算简便.

解答 原式$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$=1-\frac{1}{100}$

$=\frac{99}{100}$.

怎么样，够简单吧！

例2 计算$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\frac{1}{11\times14}+\frac{1}{14\times17}+\frac{1}{17\times20}$.

这样思考：

每项分子都是1，分母排列很有规律，但不是连续的自然数，差均为3，拆分时不要忘了每一项都要乘$\frac{1}{3}$.

解答 原式$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+$

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{14}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{20}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\right)$

$=\frac{3}{20}$.

例3 计算$\frac{2\ 004}{5}+\frac{2\ 004}{45}+\frac{2\ 004}{117}+\frac{2\ 004}{221}+\frac{2\ 004}{357}$.

哇！数太大了吧．别急！仔细看看，分子可都是 2 004，不就可以看成 2 004 乘分子都是 1 的分数了吗．那分母呢？一五得五、五九四十五、九乘十三得一百一十七……发现了：$5=1\times5$，$45=5\times9$，$117=9\times13$，$221=13\times17$，$357=17\times21$．分母是两个差是 4 的自然数的乘积形式，可以拆分分数了．不过，可别忘了 2 004与乘$\frac{1}{4}$．

解答 原式$=2\,004\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{45}+\frac{1}{117}+\frac{1}{221}+\frac{1}{357}\right)$

$$=2\,004\times\left(\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{9\times13}+\frac{1}{13\times17}+\frac{1}{17\times21}\right)$$

$$=2\,004\times\left(1-\frac{1}{21}\right)\times\frac{1}{4}$$

$$=2\,004\times\frac{20}{21}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3\,340}{7}.$$

题目的形式变了，可逃不脱同学们敏锐的观察力，总可以转化成我们学习过的形式．艺高人胆大，胆大可还要心细哟！

例 4 计算$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{18\times19\times20}$．

这道题的每一项的分子都是 1，分母均为 3 个连续自然数相乘的形式，可以用拆分分数的方法．怎么拆？比如第一项，$\frac{1}{1\times2\times3}=\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)\times\frac{1}{2}$，依此类推，噢，对了，别忘了三个连续自然数是乘$\frac{1}{2}$．

解答 原式 $=\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)\times\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{18\times19}-\frac{1}{19\times20}\right)\times\frac{1}{2}$

$$=\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{18\times19}-\frac{1}{19\times20}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{380}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{189}{380}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{189}{760}.$$

例5 计算 $\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)}+\dfrac{\frac{1}{4}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)}+\cdots+\dfrac{\frac{1}{99}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right)}.$

没见过这么复杂的题，太难了！没关系，找不到思路的话可以一项一项的试算一下，看有没有什么规律.

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\div\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{2\times3}.$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{2}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{3\times4}.$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{4\times5}.$$

发现了！发现了！都可以转化为分子都是2，而分母是两个连续自然数乘积的形式，那么最后一项就是 $\frac{2}{99\times100}$，就如同例3，可以拆分分数了！

解答　原式$=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}+\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}}+\cdots+\dfrac{\frac{1}{99}}{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{1}{99}}$

$$=\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\cdots+\frac{2}{99\times100}$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{99\times100}\right)$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=2\times\frac{49}{100}$$

$$=\frac{49}{50}.$$

怎么样,还不算很难吧！灵活利用埃及分数的拆分规律,可以简化诸如一些看起来很复杂的分数数列计算.但要特别注意以下几点：

1. 认真审题.找准规律,灵活运用简算方法.

2. 对于比较陌生的题目,可采用试算找规律的方法,转化为学习过的题目.

3. 掌握基本方法的同时,勇于创新,寻求新的解题方法.

好了,开始我们的练习,在练习中巩固你学会的方法,并开始你新的探索吧！

挑战自我

1 计算$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{2\,003\times2\,004}$.

2 计算$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$.

3 计算$1\frac{1}{2}+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{12}+\cdots+20\frac{1}{420}$.

4 计算$\frac{5}{14}+\frac{5}{84}+\frac{5}{204}+\frac{5}{374}+\frac{5}{594}+\frac{5}{864}$.

（首届“六一”杯六年级决赛试题）

5 计算$\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{2}{28\times29\times30}$.

6 计算$\frac{2}{1\times(1+2)}+\frac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}+\frac{4}{(1+2+3)\times(1+2+3+4)}+\cdots+\frac{100}{(1+2+3+\cdots+99)\times(1+2+3+4+\cdots+100)}$.

7 计算$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+19}$.

8 计算$\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\frac{1}{3\times4\times5\times6}+\cdots+\frac{1}{11\times12\times13\times14}$.

9 计算$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{99}{100}$.

10 计算$\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\frac{3^2+4^2}{3\times4}+\frac{4^2+5^2}{4\times5}+\frac{5^2+6^2}{5\times6}+\cdots+\frac{2\ 002^2+2\ 003^2}{2\ 002\times2\ 003}+\frac{2\ 003^2+2\ 004^2}{2\ 003\times2\ 004}$.

第三讲　估　算

数学趣题

一月份，2 只大老鼠生了 12 只小老鼠，这两代共有 14 只. 到了二月份，这些老鼠相互成亲，每对又都生了 12 只小老鼠，连大老鼠共计 98 只. 三月里这些老鼠每对又各生下 12 只小老鼠. 就这样如此下去，猜一猜，满一年时将变成多少只老鼠?

你猜的是多少？一千还是一万？有的同学猜测最多是五万只，你呢？我们一起来算一算. 一月份是 7 对，二月份里每对又生下 6 对，共 $7\times7=49$ 对，三月份里每对又生下 6 对，共有 $7\times7\times7=343$ 对，依此类推，满一年是将变成 $7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times2=27\ 682\ 574\ 402$（只），哇！二百七十多亿只，老鼠的繁殖能力够强吧，你猜对了吗?

单元点睛

估算就是对问题的结果进行粗略的估计，而不是精确的结果. 但也不是胡乱猜测，而要遵循一定的原则和运用一定的技巧进行预测，以使结果尽可能与准确结果接近. 常用的方法是省略尾数或取近似值，即用放大或缩小的方法来估计计算结果的大致范围. 这是一种十分重要的计算方法，在生产和生活实践中，有着广泛的应用.

典型题解

例 1　有一道求 14 个自然数的平均数的题目，小芳计算的结果是 12.53(结果保留两位小数). 老师说:“这个结果的最后一位数字错了，其他数字都对.”那么正确的结果应该是多少?

这样思考

我们不难估计，正确答案一定在 12.50 与 12.60 之间，那么这 14 个自然数之和一定在 12.50×14 与 12.60×14 之间，即 175 与 176.4 之间，因为 14 个自然数之和一定是整数，所以这 14 个自然数之和一定是 176，总和都知道了，求其平均数还难吗？

解答 $176\div14\approx12.57$.

说明 这 14 个自然数到底是几，是否是连续的自然数对于本题并不重要，他们的和最小为 12.50×14，是和的下限；最大为 12.60×14，是和的上限，通过缩放合理地确定上、下限，也就是确定了一个范围，这是估算的重要思想.

例2 $A=\dfrac{1}{\frac{1}{1\,991}+\frac{1}{1\,992}+\cdots+\frac{1}{2\,000}}$，$A$ 的整数部分是几？

这样思考

哇！数太大了，如果通分计算的话太复杂了，假如分母中这 10 个分数的分母都相同，比如说都是 1 991 就好了，$\dfrac{1}{\frac{1}{1\,991}+\frac{1}{1\,991}+\cdots+\frac{1}{1\,991}}=\dfrac{1}{\frac{10}{1\,991}}=\dfrac{1\,991}{10}\approx199.1$，但是这样的话，这 10 个分数的值相应变大了，$A$ 的值就相应变小了，这不正是 A 的下限吗！再把这 10 个分数的分母统一成 2 000，这 10 个分数的值相应变小了，A 的值就相应变大了，也就找到了 A 的一个上限，即 $\dfrac{1}{\frac{1}{2\,000}+\frac{1}{2\,000}+\cdots+\frac{1}{2\,000}}=\dfrac{1}{\frac{10}{2\,000}}=200$，$199.1<A<200$，$A$ 的整数部分一定是 199.

解答 A 的整数部分是 199.

例3 计算 $12\,345\,678\,910\,111\,213\,141\div40\,414\,243\,444\,546\,474\,849$，结果保留两位小数.

这样思考：

数太大了，可以截取被除数、除数的一部分来进行缩放.

被除数、除数各取前两位，原式$>12\div 41=0.292\cdots\cdots$，

原式$<13\div 40=0.325$.

在 0.292 与 0.325 之间无法确定小数的前三位字. 说明缩放的范围太大了.

被除数、除数各取前三位，原式$>123\div 405=0.303\cdots\cdots$，

原式$<124\div 404=0.306\cdots\cdots$.

在 0.303 与 0.306 之间只能确定小数点后的前两位数字，无法确定第三位数字，缩放的范围还要小.

被除数、除数各取前四位，原式$>1234\div 4042=0.305\cdots\cdots$，

原式$<1235\div 4041=0.305\cdots\cdots$.

说明原式的结果小数点后前三位数字分别为 3，0，5.

解答 $1\,234\div 4\,042=0.305\cdots\cdots$，$1\,235\div 4\,041=0.305\cdots\cdots$.

所以，商保留两位小数约为 0.31.

说明 这也太麻烦了吧！其实不然，这一过程只是想说明缩放的范围过大，不能确定结果的范围；缩放的范围过小，计算太麻烦. 实际计算过程中，直接截取略多于要精确的位数就可以了.

例 4 求算式$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{20}\right)\times 7$的整数部分是多少？

这样思考：

括号内每个分数的分子都是 1，把首尾两个分数相加得$\frac{1}{11}+\frac{1}{20}=\frac{31}{11\times 20}$，$\frac{1}{12}+\frac{1}{19}=\frac{31}{12\times 19}$，…，$\frac{1}{15}+\frac{1}{16}=\frac{31}{15\times 16}$，每个部分和的分子都是 31，分母中两个因数的和也是 31，因此有 $11\times 20<12\times 19<13\times 18<\cdots<15\times 16$. 于是有$\frac{31}{11\times 20}>\frac{31}{12\times 19}>\frac{31}{13\times 18}>\cdots>\frac{31}{15\times 16}$. 这样就可以进行缩放了.