◎北京金星创新教育研究中心成果◎

中国学生随堂工具书系列

怎样解题

新教材

初中平面几何添加辅助线的方法与技巧

CHUZHONGPINGMIANJIHETIANJIA
FUZHUXIANDEFANGFAYUJIQIAO

薛金星 总主编

第一次修订版

北京教育出版社

◎北京金星创新教育研究中心成果◎

怎样解题

初中平面几何添加辅助线的方法与技巧

总 主 编 薛金星

本册主编 李连军

北京教育出版社

怎样解题丛书
初中平面几何添加辅助线的方法与技巧
CHUZHONGPINGMIANJIHETIANJIAFUZHUXIANDEFANGFAYUJIQIAO
薛金星 总主编
*
北京教育出版社出版
（北京北三环中路6号）
邮政编码：100011
网　址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新　华　书　店　经　销
北京市昌平兴华印刷厂印刷
*
890×1240毫米　32开本　7.125印张　194千字
2003年12月第1版　2003年12月第1次印刷
ISBN 7—5303—0976—5/G·952
定价：9.80元

出版说明

“问题才是数学的心脏”，于是解数学问题便成为数学学习的核心内容。解题首先要解决方法的问题，方法是手段、是工具，问题解决是目的、是归宿。解决任一数学问题都是在运用方法，方法正确、恰当、巧妙，则易使问题得到圆满有效地解决；方法错误、失当或笨拙，将影响解题效果，甚至裹足不前。

解题之所以如此重要，最根本的原因就是解题所采用的方法及其内蕴的思想是学习的灵魂，是数学知识转化为认识客体、变革客体能力的中介。解题方法是人类在解题实践中积累起来的宝贵精神财富，借助于它，人们发现了一个又一个新结果，解决了一个又一个新问题。因此，学生在加强数学基础知识学习和基本技能训练的同时，读一点解题方法技巧之类的参考读物，学一点方法论，是十分必要的。

在现实的数学学习中，随着教育改革的深入、新课标的问世，将使我们遇到各种各样的数学问题。例如近几年出现的探索题、开放题、研究题、建模题、设计题、存在型问题、游戏趣味问题等等，这些问题内容丰富多彩，形式千变万化，而且立意新颖，思路灵活，处置方法也各不相同，独具特色，具有参考性、探索性和创造性。其考查目的已不只是停留在知识与技能方面，而且提出了思维能力的要求，应把解题看做一个研究过程，并从中总结发现规律性的东西，再运用你的发现继续探索解决新的问题。

那么，解题方法是怎样形成的？怎样被发现的？影响获得解题方法的因素是什么？如何提高自己的解题素养？怎样处理数学学习中的困难问题？如此等等，本书将对以上读者热切关注的问题，做深入细致地探索。

但限于知识水平，书中可能出现这样或那样的不足，望读者指正，笔者将非常感谢！

《怎样解题》编委会

来自《怎样解题》编委会的报告

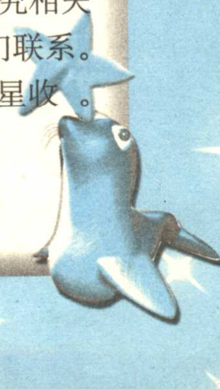
《怎样解题》系列丛书由薛金星先生策划并领衔撰写，为北京金星创新教育研究中心的研究成果。这套丛书在整体策划上全面体现创新教育思想，从最初的创意、教学中的试验、教学成果的整理编写，到最后出版，一直秉承“教学研究来自于教学、服务于读者”的优良品质。作者值此出版之际向全国千百万读者深表谢意！

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。《怎样解题》丛书，正是本着真正教给学生学会“怎样解题”的目的，以实用性、针对性和可操作性为原则，内容丰富，难易适度。

本书读者如有批评意见和建议以及疑难问题，可来信与我们联系。本着为读者服务和负责的精神，我们会及时为您排忧解难，与您共同切磋，共同研究。

编委会声明：保护正版是每个真正尊重知识的读者的义务，如发现盗版，请您及时告诉我们。我们将依法对盗版者和非法买卖盗版本书的个人和单位追究相关责任。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市天通苑邮局6503号信箱薛金星收。
邮编：102218　联系电话：(010)61743009



绪 言

几何题的证明,除少数极简易者外,一般都需要添加辅助线.辅助线的作法千变万化,是几何证明题中的难点.在几何证明题中,能否正确地添加辅助线,是证题的关键,也是分析问题和解决问题能力的表现.

添加辅助线的目的是使隐蔽的条件显现出来,通过搭桥引线,沟通已知和未知的联系.

从宏观上看,引辅助线可以从以下几个方面去考虑:

(1)发掘题设的隐含条件.

(2)移动图形的位置,使已知条件与求证部分相对集中.

(3)移动图形的位置,使过分集中的已知条件与求证部分相对分散.

(4)根据证题的设想,构造某种需要的图形.

(5)综合运用代数、三角方法寻求辅助线.

这些就不细谈了.

下面我们通过例题来具体讲一些引辅助线的方法.

目 录

第一章

与角平分线有关的辅助线

第一节　角边等、造全等

在角两边上取相等的线段，构造三角形全等证题.

如图 1－1－1，$\angle 1=\angle 2$，如取 $OE=OF$，并连结 DE、DF，则有 $\triangle OED \cong \triangle OFD$，从而为我们证题创造了线段、角相等的条件.

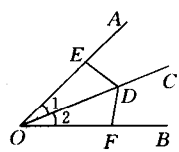


图 1－1－1

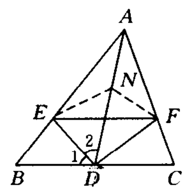


图 1－1－2

例 1　已知：如图 1－1－2，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，DE、DF 分别平分 $\angle ADB$、$\angle ADC$，连结 EF. 求证：$EF<BE+CF$.

分析

要证线段不等，可利用三角形三边关系定理求证，也就是把 EF、BE、CF 放到同一个三角形中去，而 DE、DF 是角平分线，如在 AD 上取点 N，使 $DN=BD=CD$，并连结 NE、NF，从而有 $\triangle BDE \cong \triangle NDE$，$\triangle DCF \cong \triangle DNF$，有 $BE=NE$，$CF=NF$，把 BE、CF、EF 移到同一个三角形中，问题得证.

证明　在直线 AD 上取 $DN=DB=DC$，连结 EN、NF.

$\because$ DE 平分 $\angle ADB$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

$\because$ $BD=ND$，$DE=DE$，

$\therefore$ $\triangle BDE \cong \triangle NDE$，

$\therefore$ $BE=EN$.

同理可证 $CF=NF$，

而 $NE+NF>EF$，

∴ $EF<BE+CF$.

例 2 已知：如图 1—1—3，$AB=2AC$，$\angle 1=\angle 2$，$DA=DB$.
求证：$DC\perp AC$.

分析

如在 AB 上截取 $AE=AC$，连结 DE，则 $\triangle AED\cong\triangle ACD$，则 $\angle ACD=\angle AED$，而由已知 $AB=2AC$，有 $AB=2AE$，又 $AD=BD$，从而有 $DE\perp AB$，问题得证.

证明 在 AB 上截 $AE=AC$，连结 DE.

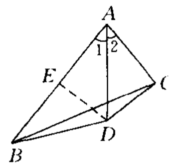


图 1—1—3

又∵ $\angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，
∴ $\triangle AED\cong\triangle ACD$，
∴ $\angle ACD=\angle AED$.
∵ $AB=2AC$，$AE=AC$，
∴ $AB=2AE$.
∵ $AD=BD$，
∴ $DE\perp AB$，
∴ $\angle ACD=\angle AED=90^\circ$，
∴ $DC\perp AC$.

例 3 已知：如图 1—1—4，四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.
求证：$BC=AB+CD$.

分析

如在 BC 上截 $BF=AB$，然后只需证 $CF=CD$ 即可，连结 EF，则 $\triangle ABE\cong\triangle FBE$，有 $\angle A=\angle 5$，再根据等角的补角相等有 $\angle 6=\angle D$，从而 $\triangle FCE\cong\triangle DCE$，有 $CF=CD$，问题得证.

证明 在 BC 上截取 $BF=BA$，连结 EF.

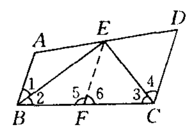


图 1—1—4

又∵ $\angle 1=\angle 2$，$BE=BE$，
∴ $\triangle ABE\cong\triangle FBE$，
∴ $\angle A=\angle 5$.
∵ $AB/\!/CD$，
∴ $\angle A+\angle D=180^\circ$.
∵ $\angle 5+\angle 6=180$，∴ $\angle 6=\angle D$.
∵ $\angle 3=\angle 4$，$CE=CE$，
∴ $\triangle EFC\cong\triangle EDC$，
∴ $CF=CD$，
∴ $BC=BF+CF=AB+CD$.

综上所述，当有角平分线时，可在角两边截取相等的线段，为证题创造必要的条件.

练　习

1. 已知：如图 1—1—5，$AB>AD$，$\angle 1=\angle 2$，$BC=CD$.
   求证：$\angle B+\angle D=180°$.

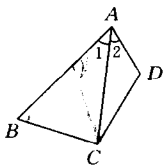
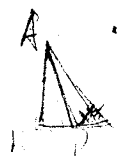


图 1—1—5



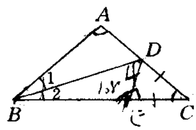
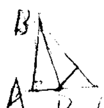
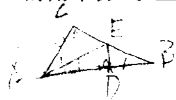


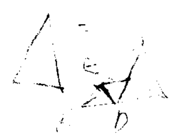
图 1—1—6

2. 已知：如图 1—1—6，$AB=AC$，$\angle A=108°$，$\angle 1=\angle 2$.
   求证：$BC=AB+CD$.



3. 已知：在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，$\angle B=2\angle C$.
   求证：$AB+BD=AC$.
4. 已知：在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，BD是$\angle ABC$的平分线.
   求证：$BC=AB+AD$.
5. 已知：在$\triangle ABC$中$\angle CAB=2\angle B$，AE平分$\angle CAB$交BC于E，$AB=2AC$.
   求证：(1)$\angle C=90°$；(2)$AE=2CE$.
6. 已知：在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，AD为$\angle BAC$的平分线，M为AD上任一点.
   求证：$BM-CM<AB-AC$.
7. 已知：D是$\triangle ABC$的$\angle BAC$的外角的平分线AD上的任一点，连结DB、DC.
   求证：$BD+CD>AB+AC$.
8. 已知：CE、AD是$\triangle ABC$的角平分线，$\angle B=60°$.
   求证：$AC=AE+CD$.





答案和提示

1. 证明：在AB上截取$AE=AD$，连CE，则$\triangle AEC\cong\triangle ADC$，有$CE=CD=BC$，$\angle D=\angle AEC$，所以$\angle B=\angle CEB$，而$\angle AEC+\angle BEC=180°$，问题得证.
2. 证明：在BC上截$BE=BA$，连结DE，则$\triangle ABD\cong\triangle EBD$，有$\angle A=\angle BED=108°$，则$\angle DEC=180°-\angle BED=72°$，而由已知知$\angle C=\angle ABC=36°$，$2\angle C+\angle DEC=180°$，所以$\angle EDC=\angle DEC=72°$，这样有$CD=CE$，问题得证.
3. 证明：如图 1—1—7，在AC上截$AE=AB$，连结DE(或在AB延长线上截$AF=AC$连结FD)，则$\triangle ABD\cong\triangle AED$，则$DE=DB$，$\angle 3=\angle B$.

$\because \angle 3=\angle C+\angle 4, \angle B=2\angle C$,

$\therefore \angle C=\angle 4$，$\therefore CE=DE=BD$,

$\therefore AC=AB+BD$.

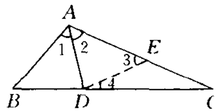


图 1－1－7

4. 证明：如图 1－1－8，在 AC 上截 $BE=AB$，连结 DE，则 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$，有 $\angle BED=\angle A=90°$，$AD=DE$，而由 $AB=AC$，有 $\angle ABC=\angle C=45°$，则 $\angle C=\angle EDC=45°$，有 $CE=DE$. 从而问题得证.

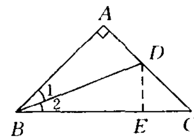


图 1－1－8

5. 证明：在 AB 上截取 $AD=AC$，连结 DE，则 $\triangle ACE \cong \triangle ADE$，有 $\angle C=\angle ADE$，又因为 $\angle CAE=\angle BAE$，$\angle CAB=2\angle B$，所以 $\angle B=\angle BAE$，有 $AE=BE$，而 $AB=2AC=2AD$，所以 $DE \perp AB$，则 $AC \perp BC$，有 $\angle B=30°$，$\angle CAB=2\angle CAE=60°$，所以 $AE=2CE$，从而问题得证.

6. 证明：在 AB 上截取 $AE=AC$，连结 ME(或在 AC 延长线上截取 $AF=AB$，连结 FD). 则 $\triangle AEM \cong \triangle ACM$，有 $CM=ME$，则在 $\triangle BEM$ 中，$BM-ME<BE$. 从而问题得证.

7. 证明：如图 1－1－9，在 BA 的延长线 AF 上取 $AE=AC$，连结 ED，则 $\triangle AED \cong \triangle ACD$，有 $CD=ED$，则在 $\triangle BDE$ 中，$BD+DE>BE$，$BD+CD>AB+AC$.

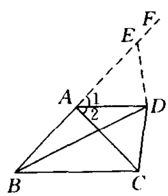


图 1－1－9

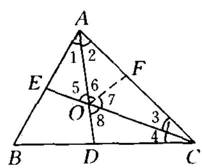


图 1－1－10

8. 证明：如图 1－1－10，在 AC 上截取 $AF=AE$，连结 OF，则 $\triangle AEO \cong \triangle AFO$，有 $\angle 5=\angle 6$，又 $\angle B=60°$，$2\angle 2+2\angle 3=180°-\angle B$，所以 $\angle 2+\angle 3=\angle 5=60°$，则 $\angle 7=\angle 8=60°$. 从而 $\triangle ODC \cong \triangle OFC$，有 $CF=CD$，所以问题得证.

第二节　点分线、垂两边

过角平分线上一点向角两边作垂线段，利用角平分线上的点到角两边距离相等去证题.

例 1　已知：如图 1－2－1，$AB>AD$，$\angle 1=\angle 2$，$CD=BC$.

求证：$\angle ADC+\angle B=180^\circ$.

分析

要证两角和为 180°，可证其和为平角，如过 C 向 $\angle BAD$ 的两边作垂线，即 $CE\perp AB$ 于 E，$CF\perp AD$ 的延长线于 F，则 $CE=CF$，又 $BC=CD$，有 $\text{Rt}\triangle CBE\cong\text{Rt}\triangle CDF$，那么 $\angle 3=\angle B$，而 $\angle 3+\angle ADC=180^\circ$，所以 $\angle B+\angle ADC=180^\circ$.

证明　过 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，$CF\perp AD$ 的延长线于 F，

则 $CE=CF$.

$\because$ $BC=CD$,

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle CBE\cong\text{Rt}\triangle CDF$,

$\therefore$ $\angle 3=\angle B$.

$\because$ $\angle 3+\angle ADC=180^\circ$,

$\therefore$ $\angle B+\angle ADC=180^\circ$.

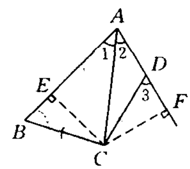


图 1-2-1

例 2　已知：如图 1-2-2，在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A=90^\circ$，$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$BC=AB+AD$.

分析

如过 D 作 $DE\perp BC$ 于 E，则 $AD=DE=CE$ 和 $\triangle ABD\cong\triangle EBD$，有 $AB=BE$，从而问题得证.

证明　过 D 作 $DE\perp BC$ 于 E，则 $AD=DE$.

$\because$ $BD=BD$,

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle ABD\cong\text{Rt}\triangle EBD$,

$\therefore$ $AB=BE$.

$\because$ $AB=AC$, $\angle A=90^\circ$,

$\therefore$ $\angle ABC=\angle C=45^\circ$,

$\therefore$ $\angle C=\angle EDC=45^\circ$,

$\therefore$ $CE=DE$,

$\therefore$ $BC=BE+EC=AB+AD$.

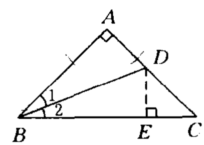


图 1-2-2

例 3　已知：如图 1-2-3，$\triangle ABC$ 的角平分线 BM、CN 相交于点 P.

求证：$\angle BAC$ 的平分线也经过点 P.

分析

连 AP. 证 AP 平分 $\angle BAC$ 即可，也就是证 P 到 AB、AC 的距离相等.

证明　过 P 作 $PD\perp AB$，$PE\perp BC$，$PF\perp AC$，垂足分别是 D、E、F，连结 AP.

∵ BM、CN 是△ABC 的角平分线，

∴ $PE=PD$，$PE=PF$，

∴ $PD=PF$.

∵ P 在∠BAC 的平分线上，

∴ ∠BAC 的平分线也经过点 P.

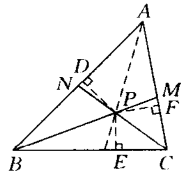


图 1—2—3

练　习

1. 已知：在△ABC 中，∠$C=90°$，AD 平分∠CAB，$CD=1.5$，$DB=2.5$. 求 AC.
2. 已知：如图 1—2—4，∠1=∠2=∠3，$AC\perp BE$ 于 C，$BD=DE$. 求证：∠$BAE=90°$.

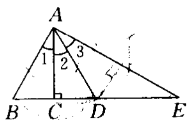


图 1—2—4

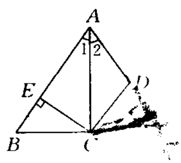


图 1—2—5

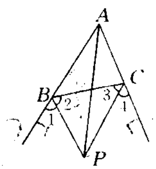


图 1—2—6

3. 已知：如图 1—2—5，∠1=∠2，$AB>AD$，$CE\perp AB$，$AE=\frac{1}{2}(AB+AD)$. 求证：∠D+∠$B=180°$.
4. 已知：如图 1—2—6，∠1=∠2，∠3=∠4. 求证：AP 平分∠BAC.
5. 已知：如图 1—2—7，Rt△ABC 中，∠$ACB=90°$，$CD\perp AB$ 垂足为 D，AE 平分∠CAB 交 CD 于 F，过 F 作 $FH\,/\!/\,AB$，交 BC 于 H. 求证：$CF=BH$.

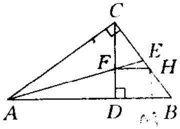


图 1—2—7

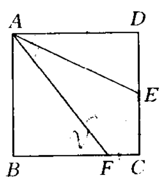


图 1—2—8

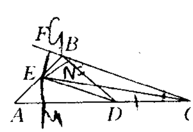


图 1—2—9

6. 已知：如图 1—2—8，正方形 $ABCD$，E 为 CD 中点，F 为 BC 上的点，∠FAE=∠DAE. 求证：$AF=AD+CF$.
7. 已知：如图 1—2—9，△ABC 中，∠$ABC=100°$，∠$ACB=20°$，CE 是∠BCD 的平分线，D 是 AC 上一点，若∠$CBD=20°$. 求∠CED 的度数.

答案和提示

1. 解：过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，则 $DE=DC=1.5$，根据勾股定理 $BD^2=DE^2+BE^2$，得 $BE=2$，设 $AC=x$，则 $AE=x$，根据勾股定理有 $x^2+4^2=(x+2)^2$. 解

得$x=3$.

2. 证明：过 D 作 $DF\perp AE$ 于 F，则 $DF=DC$，而由$\angle 1=\angle 2$，$AC=AC$，$AC\perp BD$ 得$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，$CD=CB=\frac{1}{2}BD$. 所以 $CD=\frac{1}{2}DE$，也就是 $DF=\frac{1}{2}DE$，所以$\angle E=30°$，则$\angle 2+\angle 3=60°$，所以$\angle 1=\angle 2=\angle 3=30°$，即$\angle BAE=90°$.
3. 证明：过 C 作 $CF\perp AD$ 延长线于 F，则 $CE=CF$，所以$\triangle AEC\cong\triangle AFC$，有 $AE=AF=AD+DF$①，又因为 $AE=\frac{1}{2}(AB+AD)$，即 $2AE=AE+BE+AD$，所以 $AE=BE+AD$②，由①②得 $BE=DF$，所以$\triangle BCE\cong\triangle DCF$. 有$\angle B=\angle CDF$，而$\angle CDF+\angle ADC=180°$，所以$\angle B+\angle ADC=180°$.
4. 证明：过 P 作 $PD\perp AB$，$PE\perp BC$，$PF\perp AC$，垂足分别为 D、E、F，则 $PD=PE$，$PE=PF$，有 $PD=PF$，那么点 P 在$\angle BAC$ 的平分线上，即 AP 平分$\angle BAC$.
5. 证明：过点 F 作 $FN\perp AC$ 于 N，则 $FN=FD$，过 H 作 $HM\perp AB$ 于 M，则得矩形 $FHMD$，所以 $HM=FD=FN$，则$\triangle FNC\cong\triangle HMB$，所以 $HB=CF$.
6. 证明：过 E 作 $EG\perp AF$ 于 G，则 $EG=ED=EC$，则 Rt$\triangle AEG\cong$Rt$\triangle AED$，有 $AD=AG$，连结 EF，则 Rt$\triangle EGF\cong$Rt$\triangle ECF$ 有 $CF=GF$，所以 $AF=AG+GF=AD+CF$.
7. 解：过 E 作 $EG\perp CF$，$EN\perp BD$，$EM\perp AC$ 垂足分别为 G、N、M，则 $EG=EM$，由$\angle ABC=100°$，$\angle DBC=\angle 20°$，有$\angle FBA=\angle DBA$，所以 $EG=EN$，从而有 $EM=EN$，所以$\angle BDE=\angle ADE=20°$而$\angle ADE=\angle DEC+\angle ACE$，所以$\angle DEC=10°$.

第三节　角分垂、等腰归

有和角平分线垂直的线段时，经常把垂线段延长得等腰三角形，从而为证题创造条件.

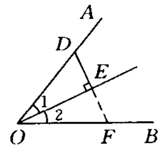


图 1—3—1

如图 1—3—1，$\angle 1=\angle 2$，$DE\perp OE$ 于 E，如延长 DE 交 OB 于 F，则$\triangle OED\cong\triangle OEF$，有 $DE=EF=\frac{1}{2}DF$，$OD=OF$，$\angle ODF=\angle OFD$ 等相等条件.

例 1　已知：如图 1—3—2，$\angle 1=\angle 2$，$AB>AC$，$CD\perp AD$ 于 D，H 是 BC 中点. 求证：$DH=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

分析

有中点 H，并证一条线段等于另一条线段的一半，想到可利用中位线去证. 如

延长 CD 交 AB 于点 E，则 $\triangle AED \cong \triangle ACD$，有 $CD=ED$、$AC=AE$，从而 $DH=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

证明 延长 CD 交 AB 于 E.

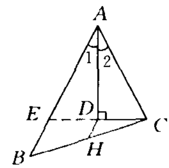


图 1—3—2

$\because AD \perp CE$，$\therefore \angle ADC=\angle ADE=90°$.

$\because \angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADC$，$\therefore AC=AE$，$CD=ED$.

$\because BH=CH$，

$\therefore DH=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}(AB-AE)$，

$\therefore DH=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

例 2 已知：如图 1—3—3，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$\angle 1=\angle 2$，$CE \perp BE$.

求证：$BD=2CE$.

分析

要证 $BD=2CE$，只需构造 $2CE$ 这条线段，然后证它们所在的三角形全等，如延长 CE 交 BA 的延长线于 F，则 $\triangle BEF \cong \triangle BEC$，有 $CE=EF=\frac{1}{2}CF$，下面只需证 $\triangle ABD \cong \triangle ACF$，而由条件显然成立.

证明 延长 CE 与 BA 的延长线交于 F.

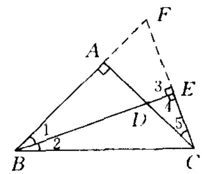


图 1—3—3

$\because BE \perp CF$，$\therefore \angle 3=\angle 4=90°$.

$\because BE=BE$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEC$，$\therefore CF=2CE=2EF$.

$\because \angle BAC=\angle CAF=90°$，$BE \perp CF$，

$\therefore \angle F+\angle 1=\angle 5+\angle F=90°$，

$\therefore \angle 1=\angle 5$. 又 $\because AB=AC$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF$，

$\therefore DB=FC$，$\therefore DB=2CE$.

例 3 已知：如图 1—3—4，在 $\triangle ABC$ 中，AD、AE 分别是 $\angle BAC$ 的内、外角平分线，过顶点 B 作 $BF \perp AF$，交 AD 的延长线于 F，连结 FC 并延长交 AE 于 M.

求证：$AM=ME$.

分析

由 AD、AE 是 $\angle BAC$ 内外角平分线可得 $EA \perp AF$，从而有 $BF \parallel AE$，所以想到利用比例证线段相等.

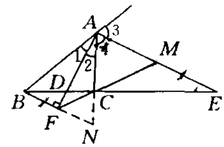


图 1－3－4

证明 延长 BF 交 AC 的延长线于 N.

∵ $AF\perp BN$，∴ $\angle AFB=\angle AFN=90°$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，$AF=AF$，

∴ $\triangle ABF\cong\triangle ANF$，∴ $BF=FN$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$，

∴ $\angle 2+\angle 4=90°$，

∴ $AE/\!/BN$，

∴ $\dfrac{BF}{ME}=\dfrac{FC}{CM}$，$\dfrac{FN}{AM}=\dfrac{FC}{CM}$，∴ $\dfrac{BF}{ME}=\dfrac{FN}{AM}$.

∵ $BF=FN$，∴ $ME=AM$.

综上所述，有和角平分线垂直的线段时，把它延长可得到中点和线段相等，从而与三角形中位线或三角形全等建立起联系.

练　　习

1. 已知：在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，D 是 BC 中点，AE 是$\angle BAC$ 的平分线，且 $CE\perp AE$ 于 E，连结 DE. 求 DE.
2. 已知：在$\triangle ABC$中，BD、CE 是$\triangle ABC$的角平分线，$AF\perp CE$ 于 F，$AG\perp BD$ 于 G，连结 FG. 求证：$FG/\!/BC$.
3. 已知：如图 1－3－5，$\angle 1=\angle 2$，$CF\perp AE$ 于 F，$BE\perp AE$ 于 E，G 为 BC 中点，连结 GE、GF. 求证：$GF=GE$.
4. 已知：BE、BF 分别是$\triangle ABC$的$\angle ABC$的内角与外角的平分线，$AF\perp BF$ 于 F，$AE\perp BE$ 于 E，连结 EF 分别交 AB、AC 于 M、N. 求证：$MN=\dfrac{1}{2}BC$.

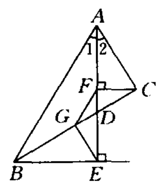


图 1－3－5

5. 已知：在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$3\angle ABC=\angle ACB$，AD 为$\angle BAC$ 的平分线，$CM\perp AD$ 于 M. 求证：$CM=\dfrac{1}{2}(AB-AC)$.
6. 已知：如图 1－3－6，梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，$AD=20$，$BC=34$，$AB=15$，$CD=13$. 求 PQ.

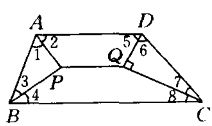


图 1－3－6

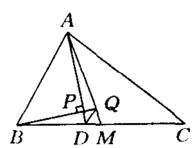


图 1－3－7

7. 已知：如图 1－3－7，在$\triangle ABC$中，$BM=CM$，$\angle BAD=\angle CAD$，$BQ\perp AD$ 于 P.