上海交通大學 学术文库

①

动力系统的混沌化
——理论、方法与应用

陈关荣 汪小帆 著

2

上海交通大学出版社

内 容 简 介

动力系统的混沌化是一个全新的控制论问题，它在数学理论上和工程技术上都极富挑战性。它不但有助于我们加深对混沌理论的认识，而且在高新技术的应用上具有十分广阔和诱人的前景。本书系统地总结了作者近10年来在混沌化方面所做的工作，介绍其中的主导分析思想和主要理论成果，以及基本技术和有效方法。

本书适合理工科大学研究生、博士后和教师阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

动力系统的混沌化：理论、方法与应用／陈关荣，汪小帆著．一上海：上海交通大学出版社，2006
ISBN 7-313-04358-9

Ⅰ．动…　Ⅱ．①陈…②汪…　Ⅲ．动力系统（数学）－混沌学　Ⅳ．O415.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第021035号

动力系统的混沌化
——理论、方法与应用
陈关荣　汪小帆　著
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路877号　邮政编码200030）
电话：64071208　出版人：张天蔚
昆山市亭林印刷有限责任公司印刷　全国新华书店经销
开本：787mm×960mm　1/16　印张：12.75　字数：234千字
2006年4月第1版　2006年4月第1次印刷
印数：1－3 050
ISBN7-313-04358-9/O·194　定价：24.00元

前　言

“混沌”(chaos)是一个颇为古老的名字，大家对它并不感到陌生。然而，混沌作为一个科学或者数学的概念，对许多人来说还是比较新鲜的。从数学和现代科学技术的含义来说，混沌和非线性总是连在一起的。自然界的万事万物在本质上是非线性的。例如，没有人见过自然界中有形状完全笔直而又不是人造的东西。在世界上，非线性无处不在，因而混沌也可以说是无处不在的。

从字面上看，混沌是一种缥渺不定、紊乱无序的东西，似乎不会有什么值得研究、特别是有什么可以应用的价值。这种感觉对一般人来说，或许不无道理。可是，对于一个科学工作者来说，许多表面上看来非常简单的事情往往都很不简单，许多直观上看来完全无用的概念常常都很有用处。从这种哲理看，数学家会想起“虚数”、“模糊数”和“无理数”等名词，物理学家则会想起“负能量”和“反物质”等术语。自从洛伦兹(E. N. Lorenz)于上世纪60年代中期在数值实验中意外地发现了奇怪吸引子，以及李天岩(T. Y. Li)和约克(J. A. Yorke)于70年代末在数学分析中正式引入“混沌”(chaos)这一术语以来，混沌这个名字在学术界中已逐渐家喻户晓。正如过去的“无理数”其实并不无理一样，今天的“混沌”实在并不混沌，它已经得到了数学家、科学家、工程技术人员和社会及文史研究人员的认可和青睐。

然而，至今科学家们对混沌这一概念尚未有统一的理解，因而几乎所有关于混沌的书都没有可能甚至没有打算为读者写下一个简单明确而又完整严格的混沌定义——特别是连续系统的情形。离散系统相对比较简单，有Devaney和Li-Yorke的两个定义，其涵义本书会详细介绍。这件事情本身也说明了混沌是十分奇妙的。混沌那神秘的足迹和漂亮的面纱已经吸引了成千上万科学工作者近40年的刻意研究和热忱追求，然而，至今仍未为它写下一个最后定论——至少不是一两页文字就能把它深奥的本质和复杂的特征刻画清楚。当然，对于从事非线性科学、特别是非线性动力系统研究的科学工作者来说，混沌的基本概念还是相当明确的。这是近40年来学术界好几代人共同努力的结果。

过去的40年是人们对混沌逐步认识和深化了解的过程。其中，在前面20多年步履艰难的探索过程中，混沌能否被控制，特别是能否被利用以促进生产力的发展和改善人类的生活，是一个几乎未曾被考虑过的问题。在这一漫长的过程中，不能说从来没有过这种思想的闪烁，但是，可以说一直没有过系统成形的科学设想和提案——直到20世纪80年代末90年代初为止。

在科学研究中,当条件和时机趋于成熟时,新思想的产生是有必然性的,而且随时随地都可能发生。在1987年至1990年期间,相信看上去放荡不羁的混沌是可以被人驾驭的,从而可以有目的地控制它,这种信念先后在好几个不同的科学家小组(包括本书的第一作者在内)产生了。初期的想法是利用或改造一些工程上卓有成效的常规自动控制手法,以达到把复杂的混沌状态引导到稳定的平衡状态中去的目的。这一方向的研究通常称为混沌控制,或控制混沌。显然,这种尝试所基于的信念是:混沌是有害的因而需要通过控制手段把它弱化或者消除。因为混沌一旦被控制到稳定平衡状态上,它就消失了。由于在上世纪70～80年代期间人们对混沌本身的认识还远未清晰,其神秘的色彩使不少人相信"混沌是既不可以控制又不可以预测"的。因此,在大多数人试图通过控制方式去驾驭混沌的初期,常规的自动控制手法经常被使用到。其中一种企图就是消除"混沌不可控"的误解。人们很快就发现,如果对控制手段不加特别约束的话,比如说,不要求微小控制增益或者简化控制手段的话,那么,控制混沌的事情并不比稳定化一个一般的非线性动力系统困难多少。混沌确实是能控的。

到了20世纪90年代中期,另一种新颖的思想又滋长起来了:难道混沌控制的目的只是为了简单地把它消除掉吗?难道混沌这东西总是有害无益因而不值得保留、更没有理由把它人为地产生出来或者加以强化吗?答案是否定的。其实混沌在许多场合是很有用、甚至是必不可少的。例如,两种不同性质的流体或溶剂,如果它们是处于混沌状态的话,它们可以很容易地被充分地混合起来,而不需要长时间和大功率的机械搅拌。又如,混沌映射为多媒体信息加密和隐藏提供了一种快速有效而且简单经济的新途径。利用混沌性态为生物系统,如为大脑思维、学习、记忆、推理以及心脏病治疗等方面的研究开辟新途径的可行性,更是为医学及生物工程研究人员所关注。在这些情形下,混沌当然就不应该被削弱或消除,反而应该被强化,甚至被从无到有地产生出来。通过控制手段而有目的地强化或者产生混沌,这是混沌的反向控制,简称为混沌反控制。显然,称之为"混沌化"一个本来并非混沌的系统也是十分恰当的。

混沌化即混沌反控制是一个全新的控制问题,它在数学理论上和工程技术上都极富挑战性。它不但有助于我们加深对混沌理论的认识,而且在高新技术的应用中具有十分广阔和诱人的前景。本书的两位作者不但最早参加了奠定和开辟对非混沌系统实现混沌化的工程反馈控制技术的开创性工作,而且首先给出了并持续地发展着反馈混沌化的严格数学理论。撰写这本书的主要动机,是希望把作者过去近10年来在混沌化方面的工作做一个系统总结,将其中的主导分析思想和主要理论成果,以及基本技术和有效方法介绍给国内的广大读者、特别是青年学生和青年科学研究人员,以达到抛砖引玉、承前启后的目的。系统混沌化是一个极有吸

引力而又极富挑战性的现代动力系统和现代控制理论的新方向，需要更多的科研工作人员参加研究，共同努力，才能获得长足的进步。

本书两位作者在过去近10年间在系统混沌化的科研工作中，得到了不少国内外同行的协助和支持。其中特别要提到的是：赖德健教授参加了最早期离散系统反馈混沌化的开创性工作；陈巩教授提供了最早期连续偏微分系统反馈混沌化的开创性工作；史玉明教授开始了最早期无限维系统的混沌判定和反馈混沌化的开创性工作；上田哲史（Tetsushi Ueta）教授协助用计算机仿真，验证了由本书作者陈关荣第一次用反控制方法找到的新的混沌吸引子——陈氏吸引子。此外，作者衷心感谢丁明州、方锦清、关治洪、李常品、李翔、李忠、林伟、刘文波、刘曾荣、吕金虎、茅耀斌、文剑锋、邓杰生、王华、杨凌、余星火、张怀宙、赵怡、郑永爱、钟国群、周天寿，以及 Leon O. Chua, Marius-F. Danca, Edgar N. Sanchez, Ira Schwarz, Konstantin Starkov 等教授和博士，他们对本书的写作给予了热情的关注和协助，并以不同的形式和在不同程度上对本书的形成和出版作出了贡献。

两位作者十分感谢他们的家人对他们长期连续和忙碌的科研工作的充分理解和大力支持。

作者陈关荣感谢香港研究资助局[RGC CERG Grants CityU1018/01E, 1004/02E, 1115/03E]的资助。作者汪小帆感谢国家杰出青年科学基金[No. 60225013]、国家自然科学基金[No. 60174005 和 70271072]、教育部优秀青年教师资助计划、教育部高等学校博士点基金和教育部留学回国人员科研启动基金等的资助。作者还要感谢上海交通大学出版社韩正之总编审读了本书和对本书出版的大力支持，感谢上海交通大学学术出版基金的资助，并感谢 IEEE、Springer-Verlag 和 World Scientific 等出版社允许书中使用作者在他们那里发表的少量图稿。

最后，作为从事复杂系统反馈控制的研究人员，作者深知反馈对改进系统性能的重要性。因此，热忱欢迎读者把对本书的任何意见及时反馈给我们。

陈关荣，香港城市大学混沌控制与同步学术研究中心

汪小帆，上海交通大学复杂网络与控制研究室

2004年　初夏

目　录

第1章

引　论

1.1　混沌:控制与反控制

由于混沌系统对初始条件的极端敏感性,在相当长一段时间内,混沌曾经被认为是既不可预测也无法控制、因而是一种有害的运动形式。20 世纪 90 年代以来,人们在混沌控制与反控制领域的大量研究表明,混沌不仅是(长期)可控制的和(短期)可预测的,而且可以在许多领域中得到有益的应用。

混沌控制是指用控制的方法消除或者削弱系统的混沌行为。确实,在许多实际问题中,混沌是一种有害的运动形式。例如,等离子体混沌会导致等离子体失控;半导体激光阵列中混沌运动会减弱输出光的相干性,从而大大减弱输出强度,等等。自从 1990 年美国马里兰大学的三位数学和物理学家提出了通过对系统参数的微小扰动以控制(消除或抑制)混沌的 OGY 方法以来[Ott, Grebogi & Yorke, 1990],人们在控制混沌方面作了大量的研究工作[Chen & Dong, 1998; Chen, 1999; Chen & Yu, 2003],国内也相继出版了一些有关书籍[胡岗等,2000;王光瑞等,2001;方锦清,2002;陈关荣、吕金虎,2003;张化光等,2003]。

但是,混沌行为并不总是有害的。近年来的研究表明,混沌在许多场合具有良好的应用前景。一些典型的例子包括:

1. 多媒体信息安全与保密

近年来,随着 Internet 的发展,网络信息安全与保密问题显得愈发重要和突出,它直接威胁到国防及许多重要的经济领域,已引起各国政府的高度重视。传统的加密方法并不能完全有效地用于数据量大的实时传输多媒体信息的加密。多媒体信息的隐藏和加密成为一个重要的挑战性课题。近几年来,混沌同步及其在保密通信中的应用已成为一个引起广泛兴趣的研究课题。在数据保密通信中,通常需要将原始数据与某种伪随机数据相调制。因而采用什么样的伪随机数据是十分

关键的。混沌信号由于具有快速衰减的关联函数和宽带功率谱，无疑是这种伪随机数据的极佳候选者。基于混沌理论的数据保密通信在抗干扰性、截获率、信号隐蔽和保密性等方面都具有潜在的优势，但目前这方面的研究尚不能有效地用于多媒体信息的加密。事实上，混沌系统与加密系统之间有着密切的联系，只是这种联系尚未得到充分的认识和实际应用；

2. 柔性系统设计

混沌吸引子中蕴含稠密的不稳定周期轨道（极限环），对于须在多种工作状态间灵活切换的柔性系统（如柔性智能信息处理系统和柔性制造系统），可以用混沌吸引子中的一个极限环对应于一种期望的状态。其好处是，根据混沌控制原理，可利用微小的控制扰动，使得系统在不同极限环之间灵活切换，从而使系统具有满意的灵活性；

3. 流体及超细粉末混合

从动力学的观点来看，流体混合需要物质线和面的充分拉伸和折叠，因而在两种液体需要充分混合而所需的能量要尽可能小的情况下，混沌是很有用的。如果两种液体的微粒运动的动态足够混沌，就很容易实现充分混合。这种流体混合称为“混沌对流”，它可用于加热，比如将热波注入核聚变反应器来充分加热等离子体。同样的原理亦有可能用于超细粉末均匀混合；

4. 在控制系统中的应用

近期的研究表明，反馈混沌化理论可用于具有输入约束的非线性系统的全局稳定化，即先用反馈混沌化方法使受控系统产生混沌行为，当系统状态因混沌的遍历特性而接近期望状态时，再用局部稳定化方法使系统稳定在该期望状态上。

近代科学技术中的一些令人惊讶的发现表明：混沌在许多情况下是有益的，甚至是非常有用的。加利福尼亚州立大学 Berkeley 分校从事了多年大脑神经科学研究（特别是大脑神经活动的混沌现象）的 Freeman 教授指出[Freeman，1995]：“大脑中被控制的混沌现象其实不仅仅是大脑复杂性的一种副产品”，控制混沌现象的这种能力“可能是大脑区别于任何一种人工智能机器的主要特性”。在医学方面，人们已经开始尝试控制心脏跳动韵律：从混沌状态到规则的周期脉动，甚至控制人类大脑活动的行为。此外，控制混沌的技术还被应用到神经网络、激光、化学反应过程、流体力学、非线性机械系统和非线性电路，以及具有分布参数的物理系统的研究工作中去[陈关荣，1997]。

1994 年，美国科学家 Schiff 等人在 *Nature* 上发表文章认为，混沌有可能在大

脑活动中起重要作用,并提出了“混沌反控制(anticontrol of chaos)”的概念[Schiff *et al.*, 1994]。稍后,Vanecek 和 Celikovsky[1996]初步探讨了“混沌的综合(synthesis of chaos)”的概念和方法。一些学者还研究了当参数变化时使一个混沌系统保持混沌行为的扰动方法[Yang & Ding, 1995; In, Spano & Ding, 1998; Chacon, 2001]。

美国工业和应用数学协会(SIAM)在 1988 年发表的一份题为《控制理论未来的发展方向》的指导性文献中,特别提出了“混沌的控制”作为一个新的研究方向[SIAM, 1988]。文献中指出:“一个生气勃勃的研究分支最近在非线性动力系统领域中发展起来了,它正开始在控制理论科学中形成巨大的影响。……在其中,两个特别引人注意的方向是:在分支点邻域中的控制,它提供了使用微小控制量而获得巨大效果的唯一可能性,以及把动力系统诱导到混沌状态中去,其目的是用复合起来的、不相协调然而又对系统危害较小的振荡频率去取代令人讨厌的噪声(例如在某些机械系统的处理上)。”文献接着指出:“混沌动力系统已被证明在描述和量化大批的复杂现象中非常有用,其中包括化学反应和电路的动力形态等。有时人们需要控制和强化混沌现象而不是试图去消除它。……因而,①不同的控制思想(如反馈控制)应该被使用到混沌系统中,从而动力系统的某些特征(如功率谱、Lyapunov 指数等)可能会获得控制;②控制科学中的一般理论应当像确定性和随机性系统那样发展到混沌系统中去。”

1996 年,陈关荣和赖德健率先研究了用反馈控制产生离散混沌的方法,并对该方法作了严格的理论分析[Chen & Lai, 1996, 1997, 1998; Lai & Chen, 2000, 2003, 2004]。其后,本书作者明确提出了反馈混沌化(chaotification)的概念,并研究了用小幅值反馈控制实现离散时间系统混沌化的理论、方法及其潜在的应用前景[Wang & Chen, 1999, 2000a, 2000b, 2000c, 2000d, 2001; Wang, Chen & Man, 2000, 2001a]。接着,作者又研究了连续时间系统的反馈混沌化方法[Wang & Chen, 2003; Wang, Chen & Man, 2001b; Wang, Chen & Yu, 2000; Wang *et al.*, 2001]。与此同时,陈关荣还与其他学者合作对反馈混沌化作了广泛的研究[Chen & Yang, 2003; Chen, Yang & Liu 2002; Li, Chen, Yuan & Chen, 2001; Li, Chen, Chen & Yuan, 2002; Lü, Yu & Chen, 2003; Lü, Zhou, Chen & Yang, 2002; Yang, Liu & Chen, 2002; Zheng, Chen & Liu, 2003]。作者还分别就离散时间和连续时间系统反馈混沌化的进展作了综述[Chen, 2003; Wang, 2003]。

本书将系统性地介绍反馈混沌化的理论、方法与应用,其中,着重介绍作者在这一研究领域所做的工作。

1.2 混沌的刻画

刻画混沌的一个最重要的物理特征量是 Lyapunov 指数，它是用来刻画系统行为对初始条件敏感性的一个指标。一个 n 维系统具有 n 个 Lyapunov 指数。如果系统的最大 Lyapunov 指数为正，那么系统行为就具有对初始条件的极端敏感性。如果系统的解又是有界的，那么，一般来说该系统就是混沌的。如果系统具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数，那么就称该系统是超混沌的。

关于混沌的最早的数学定义是由李天岩和 James A. Yorke 于 1975 年在一篇题为《周期三意味着混沌》的论文中提出的[Li & Yorke, 1975]。

定义 1.1(Li-Yorke 混沌) 闭区间 $I\subseteq\mathscr{R}$ 上的连续映射 F 称为是混沌的，如果它满足如下条件：

(1) 对于任意自然数 k，映射 F 具有周期为 k 的周期点。

(2) 存在一个不包含映射 F 的周期点的不可数集合 $S\subset I$，满足对任意的 p，$q\in S$，$p\neq q$，有

$$\limsup_{n\to\infty} | F^n(p)-F^n(q) |>0, \liminf_{n\to\infty} | F^n(p)-F^n(q) |=0。$$

(3) 对于任意 $p\in S$ 和任意周期点 $q\in I$，有

$$\limsup_{n\to\infty} | F^n(p)-F^n(q) |=0。$$

注 1.1 这里采用

$$F^0(x)=x,\quad F^{n+1}(x)=F(F^n(x)),\quad n=0,1,\cdots。$$

如果存在 $p\in I$，使得

$$F^n(p)=p,\quad F^k(p)\neq p,\quad 1\leqslant k<n,$$

那么称 p 为映射 F 的 n **周期点**。特别地，当 $n=1$ 时，称 p 为映射 F 的**不动点**。

1978 年，Marotto 把 Li-Yorke 混沌的概念推广到了 m 维连续可微映射的情形，使得判断高维映射的混沌行为的存在性成为可能[Marotto, 1978]。以下记 $B_r(\boldsymbol{x}^*)$为以点 $\boldsymbol{x}^*$ 为中心、半径为 r 的闭球。

定义 1.2(回归排斥子) 如果 $\mathscr{R}^m$ 中的可微映射 F 的不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 满足以下条件：

(1) 存在实数 $r>0$，使得 $B_r(\boldsymbol{x}^*)$中的任意一点 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵 $DF(\boldsymbol{x})$的所有特征值的模(绝对值)大于 1。

(2) 存在 $B_r(\boldsymbol{x}^*)$中的一个点 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{x}^*$ 和自然数 $N>1$，使得 $F^N(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}^*$，并且点 $\boldsymbol{x}_0$ 是非退化的，即

$$\det\{DF^N(\boldsymbol{x}_0)\}\neq 0。$$

则称不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 是映射 F 的一个**回归排斥子**(snap-back-repeller)。

定理 1.1(Marotto 定理) 如果 $\mathcal{R}^n$ 中的可微映射 F 具有一个回归排斥子，那么，映射 F 具有 Li-Yorke 意义下的混沌行为，即有如下性质成立：

(1) 存在自然数 $N>1$，对于任意自然数 $p\leqslant N$，映射 F 具有周期为 p 的周期点。

(2) 存在一个不包含映射 F 周期点的不可数集合 S 满足：

(a) $F(S)\subset S$；

(b) $\limsup\limits_{k\to\infty}\|F^k(\boldsymbol{x})-F^k(\boldsymbol{y})\|>0, \forall \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}\in S$；

(c) $\limsup\limits_{k\to\infty}\|F^k(\boldsymbol{x})-F^k(\boldsymbol{y})\|>0, \forall \boldsymbol{x}\in S, \boldsymbol{y}$ 是 F 的周期点。

(3) 存在 S 的子集 S^0，对于任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S^0$，

$$\liminf_{k\to\infty}\|F^k(\boldsymbol{x})-F^k(\boldsymbol{y})\|=0。$$

近 30 年来，Marotto 定理被许多学者用来分析具体的高维系统的复杂动力学行为。人们也对 Marotto 定理的证明中存在的错误作了改正[Li & Chen, 2003; Shi & Chen, 2004]，详见第 9 章。

关于混沌的另一个常用定义是从拓扑学角度给出的[Devaney, 1987]。

定义 1.3(Devaney 混沌) 称一有界闭域 χ 上的映射 $F:\chi\to\chi$ 是混沌的，如果它满足下述条件：

(1) 它是对初值敏感的，即存在 $\delta>0$，使得对于任何 $x\in\chi$ 与 x 的任何一个邻域 B，存在 $y\in B$ 和自然数 k，满足

$$|F^k(x)-F^k(y)|>\delta;$$

(2) 它是拓扑传递的，即对任何两个开集 $U,V\in\chi$，存在自然数 k，使得 $F^k(U)\cap V\neq\varnothing$；

(3) 它在 χ 中有稠密的周期轨道。

数学家还研究了 Devaney 混沌三条性质之间的内在联系，证明了条件(1)和(2)一起可以推出条件(3)[Banks *et al.*, 1992]。此外，在特定条件下可以验证 Devaney 意义下的混沌定义强于 Li-Yorke 意义下的混沌定义[Huang & Ye, 2002]。

第2章

离散时间系统反馈混沌化:Chen-Lai 算法

2.1 问题的描述

考虑 n 维非线性离散时间动力系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{u}_k, \tag{2.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}_k \in \mathscr{R}^n$ 为系统的状态,$\boldsymbol{f}_k$ 为 n 维连续可微映射。考虑如下的控制问题:设计控制器 u_k 使得受控系统是混沌的,即受控系统为全局有界且具有正的 Lyapunov 指数,并且满足常用的混沌的数学判据(例如,上一章中讨论的 Li-Yorke 定义或 Devaney 定义)。

考虑简单的线性状态反馈

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{x}_k, \tag{2.2}$$

其中,$\boldsymbol{B}_k \in \mathscr{R}^{n\times n}$ 为待定矩阵,则受控系统为

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{x}_k。\tag{2.3}$$

受控系统(2.3)的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}_j(z) = \boldsymbol{f}_j'(z) + \boldsymbol{B}_j。\tag{2.4}$$

记

$$\boldsymbol{T}_j := \boldsymbol{T}_j(x_0, \cdots, x_j) = \boldsymbol{J}_j(x_j)\boldsymbol{J}_{j-1}(x_{j-1})\cdots\boldsymbol{J}_1(x_1)\boldsymbol{J}_0(x_0)。\tag{2.5}$$

再记

$$\mu_i^j = \mu_i(\boldsymbol{T}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_j)$$

为第 j 个乘积矩阵 $\boldsymbol{T}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_j$ 的第 i 个特征值。根据定义,受控系统(2.3)的第 i 个 Lyapunov 指数为[Oseledec, 1968;Holzfuss & Parlitz, 1991]

$$\lambda_i(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\ln|\mu_i[\boldsymbol{T}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_j]|, \quad i = 1, \cdots, n。\tag{2.6}$$

现要求设计反馈增益矩阵 $\{\boldsymbol{B}_k\}_{k=0}^{\infty}$ 使得受控系统的 Lyapunov 指数均为正,即

$$0 < c \leqslant \lambda_i(\boldsymbol{x}_0) < \infty, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2.7}$$

其中 c 为预先给定常数。当然，事实上只要其中一个 Lyapunov 指数为正就足够了。

考虑到具体实现，还要求控制增益矩阵一致有界，即，

$$\sup_{0\leqslant k<\infty}\|\boldsymbol{B}_k\|\leqslant M<\infty, \tag{2.8}$$

其中，M 为一常数，$\|\cdot\|$ 为谱范数，即矩阵的最大奇异值。将证明(2.8)式是可以满足的，只要$\{\boldsymbol{f}_k'(\boldsymbol{x}_k)\}$一致有界，即存在常数 N，使得

$$\sup_{0\leqslant k<\infty}\|\boldsymbol{f}_k'(\boldsymbol{x}_k)\|\leqslant N<\infty。 \tag{2.9}$$

2.2 Chen-Lai 算法

下面的算法由陈关荣和赖德健于 1996 年提出[Chen & Lai, 1996, 1997, 1998]。

给定初始状态 x_0，对于控制系统

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{x}_0, \tag{2.10}$$

计算其 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}_0'(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{B}_0, \tag{2.11}$$

并记 $\boldsymbol{T}_0=\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{x}_0)$。取 $\boldsymbol{B}_0=\sigma_0\boldsymbol{I}$ 并选取常数 $\sigma_0>0$ 使得矩阵$[\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]$有限且对角占优。

对 $k=0,1,2,\cdots$，考虑控制系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{x}_k, \tag{2.12}$$

式中 $\boldsymbol{B}_k=\sigma_k\boldsymbol{I}$ 已由前一步求得。

现作如下计算：

步骤 1　计算 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}_k(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}_k'(\boldsymbol{x}_k)+\sigma_k\boldsymbol{I}, \tag{2.13}$$

记 $\boldsymbol{T}_k=\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{T}_{k-1}$。

步骤 2　选取常数 $\sigma_k>0$，使得矩阵

$$[\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}]-\mathrm{e}^{2kc}I$$

有限且对角占优，其中常数 $c>0$ 满足(2.7)式。（下面将证明这一要求是可以满足的。）

步骤 3　对控制系统采用如下的模运算：

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{x}_k\quad(\mathrm{mod}\ 1)。 \tag{2.14}$$

上述算法的前两个步骤使受控系统的 Lyapunov 指数严格为正，从而系统轨道在所有方向上扩张。满足步骤 1 和 2 的一个简单的控制器是

$$u_k = B_k x_k = \sigma_k x_k, \quad \sigma_k = N + e^c。 \tag{2.15}$$

第三步的模运算使整个轨道全局有界。下面将验证这两种效果的混合,使得系统轨道在有界区域内产生混沌行为。

2.3 混沌验证:正的 Lyapunov 指数

首先验证如下两个关系式[Chen & Lai, 1996]:

(1) $[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1}>0$;

(2) $[\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k]-e^{2kc}[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]\geqslant 0$。

事实上,只需验证以上两式在 $k=0$ 和 1 时成立,再由数学归纳法可推得结论。

在 $k=0$ 时,控制系统为

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{x}_0。$$

设计控制增益矩阵 $\boldsymbol{B}_0=\sigma_0\boldsymbol{I}$,其中,正常数 σ_0 满足如下正定性要求:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{J}_0\boldsymbol{J}_0^{\mathrm{T}} \\
&= [\boldsymbol{f}_0'(x_0)+\sigma_0\boldsymbol{I}_n][\boldsymbol{f}_0'(\boldsymbol{x}_0)+\sigma_0\boldsymbol{I}_n]^{\mathrm{T}} \\
&= [\boldsymbol{f}_0'(\boldsymbol{x}_0)][\boldsymbol{f}_0'(\boldsymbol{x}_0)]^{\mathrm{T}}+\sigma_0([\boldsymbol{f}_0'(\boldsymbol{x}_0)]+[\boldsymbol{f}_0'(\boldsymbol{x}_0)]^{\mathrm{T}})+\sigma_0^2\boldsymbol{I}_n \\
&> 0。
\end{aligned}$$

如果选取常数 $\sigma_0>0$,使得矩阵$[\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]$有限且对角占优,那么,上述正定性要求即可满足。从而

$$[\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]>0, \quad [\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]^{-1}>0。$$

在 $k=1$ 时,控制系统为

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}_1。$$

设计控制增益矩阵 $\boldsymbol{B}_1=\sigma_1\boldsymbol{I}$,其中常数 $\sigma_1>0$ 满足如下非负定要求:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_1 - e^{2c}[\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]^{-1} &= [\boldsymbol{f}_1'(\boldsymbol{x}_1)+\sigma_1\boldsymbol{I}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}_1'(\boldsymbol{x}_1)+\sigma_1\boldsymbol{I}]-e^{2c}[\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]^{-1} \\
&= [\boldsymbol{f}_1'(\boldsymbol{x}_1)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}_1'(\boldsymbol{x}_1)]+\sigma_1([\boldsymbol{f}_1'(\boldsymbol{x}_1)]^{\mathrm{T}}+[\boldsymbol{f}_1'(\boldsymbol{x}_1)]) \\
&\quad +\sigma_1^2\boldsymbol{I}-e^{2c}[\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]^{-1} \\
&\geqslant 0。
\end{aligned}$$

只要选取常数 $\sigma_1>0$,使得矩阵

$$[\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}]-e^{2c}\boldsymbol{I}$$

有限且对角占优,那么,上述非负定要求即可满足。从而有

$$\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_1 \geqslant e^{2c}[\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}]^{-1}>0,$$

即有

$$[\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}]^{-1}>0。$$

在第 k 步，只要选取 $\sigma_k>0$，使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k-\mathrm{e}^{2c}[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1} &= [\boldsymbol{f}_k{}'(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{f}_k{}'(\boldsymbol{x}_k)]+\sigma_k([\boldsymbol{f}_k{}'(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}} \\ &\quad +[\boldsymbol{f}_k{}'(\boldsymbol{x}_k)])+\sigma_k^2\boldsymbol{I}-\mathrm{e}^{2kc}[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1} \\ &\geqslant 0。\end{aligned}$$

从而可得，对 $k\geqslant 1$ 有

① $[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1}>0$；

② $[\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k]-\mathrm{e}^{2kc}[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1}\geqslant 0$；

并进而有

③ $[\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k]>0$。

下面引理给出线性代数中的一个结果[Rao，1973]。

引理 2.1 假设对称矩阵 A 和 B 满足

$$\boldsymbol{A}>0,\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\geqslant 0,$$

则特征方程

$$\det[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}]=0 \tag{2.16}$$

的根均不小于 1。

在上述引理中取

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k,\quad \boldsymbol{B}=\mathrm{e}^{2kc}[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1},$$

则特征方程

$$\det[\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_k-\lambda\mathrm{e}^{2kc}[\boldsymbol{T}_{k-1}\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1}]=0$$

的根均不小于 1。于是特征方程

$$\mathrm{e}^{2kc}\cdot\det[\boldsymbol{T}_{k-1}^{\mathrm{T}}]^{-1}\cdot\det[\mathrm{e}^{-2kc}\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k-\lambda\boldsymbol{I}]\cdot\det[\boldsymbol{T}_{k-1}]^{-1}=0$$

的根均不小于 1。进而特征方程

$$\det[\mathrm{e}^{-2kc}\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k-\lambda\boldsymbol{I}]=0$$

的根均不小于 1，这表明矩阵 $[\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k]$ 的特征值均不小于 e^{2kc}。于是对所有 $i=1,\cdots,n$，受控系统的 Lyapunov 指数满足

$$\lambda_i=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\ln|\mu_i(\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k)|\geqslant\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\ln(\mathrm{e}^{2kc})=c>0。\tag{2.17}$$

下面验证控制器

$$\{\boldsymbol{u}_k=\sigma_k\boldsymbol{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$$

的一致有界性，即存在常数 M 使得

$$\sup_{0\leqslant k<\infty}|\sigma_k|\leqslant M<\infty。$$

注意到

$$[\boldsymbol{T}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k]\geqslant\mathrm{e}^{2kc}\boldsymbol{I}>0,$$

从而