实变函数

SHIBIANHANSHU

何 穗 刘敏思 喻小培 编

SCIENCEP

设 $f(x)$，$f_n(x)$ $(n\geqslant1)$ 是 E 上的可测函数，如果

(1) $f_n(x)\to f(x)$，a. e. 于 E；

(2) 存在 E 上的 Lebesgue 可积函数 $g(x)$，使

$$|f_n(x)|\leqslant g(x),\ a.\ e.\text{于 }E.$$

则 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n\geqslant1)$ 在 E 上 Lebesgue 可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

科学出版社
www.sciencep.com

实变函数

何　穗　刘敏思　喻小培　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是为高等院校数学与应用数学专业编写的教材，主要内容包括集合及其基数、欧氏空间中的点集、点集的测度、可测函数、Lebesgue 积分及其性质、积分极限的三大定理、重积分化为累次积分的 Fubini 定理、Lebesgue 微分定理. 每章中都附有一定数量的思考题和练习题，适宜于教学使用.

本书适合高等院校数学及相关专业学生使用，也可供有关研究人员、科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

实变函数/何穗，刘敏思，喻小培编. - 北京：科学出版社，2006
ISBN 7-03-016983-2

I.实… II.①何…②刘…③喻… III.实变函数 - 高等学校 - 教材
IV.O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 016490 号

责任编辑：冯贵层／责任校对：王望容
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 3 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2006 年 3 月第一次印刷 印张：8 3/4
印数：1~4 000 字数：170 000

定价：16.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

本书是为高等师范院校数学与应用数学专业编写的实变函数课程的教材. 主要内容包括集合及其基数、欧氏空间中的点集、点集的测度、可测函数、Lebesgue积分及其性质、积分极限的三大定理、重积分化为累次积分的 Fubini 定理、Lebesgue微分定理.

实变函数是数学与应用数学专业的一门专业基础理论课，它的中心任务是建立 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论. 运用集合论的思想方法分析、解决问题贯穿于全课程，由于这一特点，这门课程一直是教与学较难的课程. 为了便于教与学，我们力图从学生实际出发，由浅入深编写了这本教材. 编写过程中我们注意了以下几点：

1. 既注重基本理论的科学性，又充分考虑内容的启发性；

2. 既保持理论体系的相对完整性和深度，又力求深入浅出，循序渐进，便于学生自学；

3. 既注意观点与方法的现代性，又尽量与数学分析的有关内容相衔接，以便学生加深对数学分析理论的认识.

教材中我们对某些定理的条件的必要性安排了反例，在每章中都附有一定数量的思考题和练习题，其中大部分习题为基本练习题，适宜于学生独立完成，也有少量的较难习题可在教师指导下完成. 本书第一章由喻小培编写，第二章和第三章由刘敏思编写，第四章和第五章由何穗编写，全书由何穗统稿.

在本书的编写过程中，得到了华中师范大学数学与统计学学院领导和老师们的鼓励及大力支持，特此深表谢意.

尽管在编写本书过程中作了较大努力，但由于编者水平有限，肯定存在不少疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正.

编　者

2005 年 10 月

目　录

第一章　集　合

本章介绍集合的一般理论，主要包括集合的概念及运算、集合的对等与基数(势)、可数集与不可数集、$\mathbf{R}^n$ 中的开集、闭集与完全(备)集.

§1　集合的运算

一、集合的概念

集合是数学中最原始的概念之一，一般不加以精确定义. 概括地说，集合是指把具有某种特征或满足一定性质的所有对象或事物视为一个整体时，这一整体就称为集合，而这些事物或对象称为该集合的元素.

例如，自然数全体组成一个集合，常记为 $\mathbf{N}$；有理数全体组成一个集合常记为 $\mathbf{Q}$；实数全体构成一个集合，常记为 $\mathbf{R}^1$；定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体构成一个集合，常记为 $C[a,b]$ 等等.

一般地，集合的符号常用大写字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z,\cdots$ 表示，集合中的元素常用小写字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z,\cdots$ 表示.

设 X 是一个集合，若 a 为 X 的元素则记为 $a\in X$，$a\notin X$ 表示 a 不是 X 的元素. 对一个集合 X 来说，某事物或对象 a 要么是 X 的元素，要么不是 X 的元素，二者必具其一.

表示一个集合通常有两种方法：一种是穷举法，即将该集合的所有元素都列举出来. 例如

$$A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\right\},$$

又如

$$\mathbf{N}=\{1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n,\cdots\}.$$

另一种是描述法，将具有某种性质 p 的元素全体记为

$$Z=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如

$$B=\{x\mid x^2=2\}.$$

例 1　$\varnothing$ 表示空集，即该集合中无元素；

$\{a\}$ 表示单元素集；

$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 表示 n 个元素集合；

$\{x\mid |x-2|<\delta\}$ $(\delta>0)$ 表示实数轴上开区间 $(2-\delta,2+\delta)$.

定义 1　设有两个集合 A,B，若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集或 B

包含 A，记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

若 $A \subset B$，且存在 $x \in B$ 满足 $x \notin A$，则称 A 是 B 的真子集. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等或相同，记为 $A = B$. 显然 $A \subset A$，$\varnothing \subset A$.

例 2 设 $y = f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实值函数，c 为某一实数，集合

$$E[x \mid f(x) \leqslant c] = \{x \in E \mid f(x) \leqslant c\}$$

表示满足 $f(x) \leqslant c$ 且属于 E 的 x 全体.

例 3 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^1$，且 $\mathbf{N}$ 为 $\mathbf{Q}$ 的真子集，$\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{R}^1$ 的真子集.

例 4 设 A 是任一集合，集合 $2^A = \{B \mid B \subset A\}$ 为 A 的一切子集构成的集合，称为 A 的幂集. 显然 2^A 是非空的.

定义 2 设 Λ 是一个非空集合，对于每个 $\alpha \in \Lambda$，指定一个集合 A_α，于是得到许多集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

特别地，若 $\Lambda = \mathbf{N}$，则称 $\{A_n\}$ 为集合列（简称集列）.

二、集合的运算

定义 3 设 A, B 是两个集合.

(1) 称集合

$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$$

为 A 与 B 的并集，即由 A 与 B 的全部元素构成的集合；

(2) 称集合

$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$$

为 A 与 B 的交集，即由 A 与 B 的公共元素构成的集合. 若 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 互不相交；如果 $A \cap B \neq \varnothing$，则称 A 与 B 相交.

例 5 若 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上实值函数，a, b, c 为实数且 $a \leqslant b$，$c \geqslant 0$，则

$$E[x \mid a \leqslant f(x) \leqslant b] = E[x \mid f(x) \geqslant a] \cap E[x \mid f(x) \leqslant b],$$

$$E[x \mid |f(x)| > c] = E[x \mid f(x) > c] \cup E[x \mid f(x) < -c].$$

关于集合的交和并的运算可推广到任意多个集合的情形，设有集合族 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$，定义其并集与交集分别为：

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \triangleq \{x \mid \exists \alpha \in \Lambda, 使 x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \triangleq \{x \mid x \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

特别地，当 $\Lambda = \mathbf{N}$ 时，记

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists n \in \mathbf{N}, 使 x \in A_n\}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbf{N}, x \in A_n\}.$$

例 6 设 $A_n = (n-1, n]$，$n = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, +\infty), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing.$$

例 7 设 $x_0 \in \mathbf{R}^1$, $A_n = \left\{x \,\middle|\, |x - x_0| < \dfrac{1}{n}, x \in \mathbf{R}^1\right\}$, $n = 1,2,\cdots$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (x_0 - 1, x_0 + 1), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}.$$

定理 1 (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

更一般地有

(4) $A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$;

(5) $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cup B_\alpha)$;

(6) 设$\{A_n\}$ 和$\{B_n\}$ 为两集列,有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

证明 仅证(5).

若 $x_0 \in A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right)$,则 $x_0 \in A$ 或 $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$. 若 $x_0 \in A$,有 $\forall \alpha \in \Lambda, x_0 \in A \cup B_\alpha$,从而 $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cup B_\alpha)$;若 $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$,则 $\forall \alpha \in \Lambda$ 有 $x_0 \in B_\alpha$,故 $x_0 \in A \cup B_\alpha (\forall \alpha \in \Lambda)$,从而 $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$.

反之,若 $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cup B_\alpha)$,则 $\forall \alpha \in \Lambda$ 有 $x_0 \in A \cup B_\alpha$,即 $x_0 \in A$ 或 $x_0 \in B_\alpha$. 若 $x_0 \in A$,有 $x_0 \in A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right)$;若 $x_0 \notin A$,有 $\forall \alpha \in \Lambda, x_0 \in B_\alpha$,则 $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$, 从而 $x_0 \in A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right)$.

所以 $A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cup B_\alpha)$.

定义 4 设 A,B 是两个集合,称集合

$$A \setminus B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

是 A 与 B 的差集,即在集合 A 中而不在集合 B 中的一切元素构成的集合. 如果 $B \subset A$,则称 $A \setminus B$ 为 B 相对于 A 的补集或余集. 通常在讨论问题的范围内,所涉及的集合总是某个给定集合 X 的子集,称 X 为全集,简称集合

$$B^c = X \setminus B$$

为 B 的补集或余集,B^c 也可简记为

$$B^c = \{x \mid x \notin B\}.$$

容易证明集合的差集和余集有下列性质.

定理 2 (1) $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \varnothing$, $(A^c)^c = A$, $X^c = \varnothing$, $\varnothing^c = X$;

(2) $A \setminus B = A \cap B^c$;

(3) 若 $A \subset B$, 则 $A^c \supset B^c$;

(4) 若 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A \subset B^c$;

(5) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$, $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

定理 3 (D Morgan 法则)

(1) $X \backslash \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} (X \backslash A_\alpha)$;

(2) $X \backslash \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} (X \backslash A_\alpha)$.

特别地,若 X 为全集,有

(3) $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$;

(4) $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$.

证明 仅证(3),其余留作习题. 任取 $x \in \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c$,则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$,即对一切 $\alpha \in \Lambda$ 有 $x \notin A_\alpha$,也即对一切 $\alpha \in \Lambda$,有 $x \in A_\alpha^c$,故 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$;反之若 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$,即对一切$\alpha \in \Lambda$ 有 $x \notin A_\alpha$,从而 $x \notin \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)$,即 $x \in \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c$.

定义 5 设 X 和 Y 是两个集合,称集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

是 X 与 Y 的直积集,简称 X 与 Y 的直积,其中$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ 是指 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$. 一般地,可定义任意多个集合的直积:

$$\prod_{k=1}^{n} X_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in X_k, k = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} X_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_k \in X_k, k \in \mathbf{N}\},$$

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \mid x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}.$$

例 8 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbf{R}^1, i = 1, 2\}$;

$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \cdots \times \mathbf{R}^1}_{n} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}^1, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为 n 维欧氏空间;

$\mathbf{Q}^n = \underbrace{\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \cdots \times \mathbf{Q}}_{n} = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n) \mid r_i \in \mathbf{Q}, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中有理点集;

$\mathbf{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \mid x_i \in \mathbf{R}^1, i \in \mathbf{N}\}$.

三、集合列的极限集

定义 6 设$\{A_k\}$ 是一列集合,分别称集合

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} A_k \triangleq \{x \mid 存在无穷多个 k, 使 x \in A_k\},$$

$$\underline{\lim_{k \to \infty}} A_k \triangleq \{x \mid 只有有限个 k, 使 x \notin A_k\}$$

是集合列$\{A_k\}$的上极限集与下极限集.

如果$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$，则称集列$\{A_k\}$有极限或是收敛的，记此极限为

$$\lim_{k\to\infty}A_k\left(=\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k\right).$$

显然：

(1) $x\in\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$的充分必要条件是存在$\{A_k\}$的子集列$\{A_{k_i}\}$，使$x\in A_{k_i}$，$i=1,2,\cdots$；

(2) $x\in\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$的充分必要条件是存在$\mathbf{N}>0$，当$k>\mathbf{N}$时，$x\in A_k$；

(3) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\subset\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\subset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

例 9 定义集列$\{A_k\}$如下：

$$A_k=\begin{cases}\left[0,\ 2-\dfrac{1}{2n-1}\right], & k=2n-1,\\ \left[0,\ 1+\dfrac{1}{2n}\right], & k=2n\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

则$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=[0,2)$，$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=[0,1]$，且集列$\{A_k\}$不收敛或$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$不存在.

证明 对任意$x\in[0,2)$，存在A_{2n-1}，使$x\in A_{2n-1}\left(当 n\geqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4-2x}\right)$，故$x\in\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$. 又$A_k\subset[0,2)$，$k=1,2,\cdots$，从而$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=[0,2)$.

对任意$x\in[0,1]$，由$\{A_k\}$的定义知$x\in A_k$，$k=1,2,\cdots$，故$x\in\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$.

又显然$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\subset[0,2)$，对任意$x\in[0,2)\setminus[0,1]=(1,2)$，存在$x\notin A_{2n}$ $\left(当 n\geqslant\dfrac{1}{2x-2}+1\right)$，故$x\notin\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$，从而$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=[0,1]$.

因为$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=[0,2)\neq[0,1]=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$，故集列$\{A_k\}$不收敛或$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$不存在.

定理 4 设集列$\{A_k\}$，则

(1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$；

(2) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$.

证明 仅证(1)，(2)留作习题.

事实上，若$x_0\in\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$，则存在无穷多个$k$，使$x_0\in A_k$，即对任意自然数$n$，存在$k_0>n$，使$x_0\in A_{k_0}$，故$x_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ $(\forall n\in\mathbf{N})$，从而$x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$；反之若$x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，即$\forall n\in\mathbf{N}$，$x_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，从而有无穷多个$k$，使$x_0\in A_k$.

例 10 设$\{A_k\}$为一集列，E是任一集合，则

(1) $E\setminus\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$；

(2) $E\setminus \varliminf_{k\to\infty} A_k = \varlimsup_{k\to\infty}(E\setminus A_k)$.

证明 由 De. Morgan 法则及定理 4 即得.

例 11 设 E,F 为集合,作集列

$$A_k = \begin{cases} E, & k = 2n-1, \\ F, & k = 2n \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

由上、下极限集的定义有

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = E \cup F, \quad \varliminf_{k\to\infty} A_k = E \cap F.$$

于是,集列$\{A_k\}$收敛的充分必要条件是:

$$E \cup F = \varlimsup_{k\to\infty} A_k = \varliminf_{k\to\infty} A_k = E \cap F,$$

也即 $E = F$.

定义 7 设$\{A_k\}$是一集列,若 $A_k \supset A_{k+1}$(或 $A_k \subset A_{k+1}$),$k = 1,2,\cdots$,则称$\{A_k\}$是单调递减(或单调递增)集列.单调递减与单调递增集列统称为单调集列.

定理 5 (1) 若$\{A_k\}$是单调递增集列,则$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$;

(2) 若$\{A_k\}$是单调递减集列,则$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

即单调集列是收敛的.

证明 仅证(1),(2) 留作习题.

因为$\{A_k\}$是单调递增集列,所以对任何 $n \in \mathbf{N}$,有

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n,$$

从而

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$\varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

故$\{A_k\}$收敛,且$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

例 12 设 $A_k = \{k,k+1,k+2,\cdots\}$ $(k = 1,2,\cdots)$,则 $A_k \supset A_{k+1}$ $(k = 1,2,\cdots)$,即$\{A_k\}$是单调递减集列,从而

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing.$$

例 13 设 $A_k = [0,k]$ $(k = 1,2,\cdots)$,则 $A_k \subset A_{k+1}$ $(k = 1,2,\cdots)$,即$\{A_k\}$是单调递增集列,故

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [0, +\infty).$$

四、集类

设 X 为给定的集合,以 X 的某些子集为元素所成之集称为 X 上的集类.集类

通常可用大写花体字母表示,例如 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$,$\cdots$.

定义 8 设X为一个集合,$\mathscr{F}$是 X 上的一个非空集类,如果对任何 $E_1,E_2\in\mathscr{F}$,都有

$$E_1\cup E_2\in\mathscr{F},\quad E_1\backslash E_2\in\mathscr{F},$$

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个环. 特别地,如果还有 $X\in\mathscr{F}$,则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个代数,或 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个域.

如果对任何一列 $E_k\in\mathscr{F}$ $(k=1,2,\cdots)$,均有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathscr{F},\quad E_1\backslash E_2\in\mathscr{F},$$

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的 σ 环. 如果还有 $X\in\mathscr{F}$,则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的 σ 代数,或 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个 σ 域.

例 14 设 X 为一非空集合,则 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,X\}$,$\mathscr{F}_1=\{A\mid A\subset X\}$ 均为 σ 域,且对 X 上的任一 σ 域 $\mathscr{F}$,有

$$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_1.$$

例 15 设 X 为任一集合,则 X 的所有的有限子集(包含空集 $\varnothing$) 所成的集类 $\mathscr{A}$ 为一个环,当且仅当 X 为有限集时,$\mathscr{A}$ 为代数.

定理 6 若 $\mathscr{F}$ 为环,则

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$;

(2) 任意 $E_1,E_2\in\mathscr{F}$,有 $E_1\cap E_2\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $\mathscr{F}_\alpha$ $(\alpha\in\Lambda)$ 是 X 上的环(或代数),则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$ 是 X 上的环(或代数).

证明 (1) 因为环 $\mathscr{F}$ 为非空集类,所以存在 $E\in\mathscr{F}$,根据环的定义有 $E\backslash E=\varnothing\in\mathscr{F}$;

(2) 因为 $E_1\cap E_2=(E_1\cup E_2)\backslash(E_1\backslash E_2)\backslash(E_2\backslash E_1)$,故 $E_1\cap E_2\in\mathscr{F}$;

(3) 设 $E_1,E_2\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$,而任意 $\alpha\in\Lambda$,$E_1,E_2\in\mathscr{F}_\alpha$,由 $\mathscr{F}_\alpha$ 是环,故任意 $\alpha\in\Lambda$

$$E_1\cup E_2\in\mathscr{F}_\alpha,\quad E_1\backslash E_2\in\mathscr{F}_\alpha,$$

从而

$$E_1\cup E_2\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha,\quad E_1\backslash E_2\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha,$$

即 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$ 是一个环. 特别地,如果 $\mathscr{F}_\alpha$ 是代数($\forall\alpha\in\Lambda$),即 $X\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$,因此 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$ 为代数.

定理 7 设 $\mathscr{F}$ 为 σ 环,则

(1) $\mathscr{F}$ 为环;

(2) 对任意 $E_n\in\mathscr{F}$,$n=1,2,\cdots$,有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{F}$;

(3) 对任意 $E_n\in\mathscr{F}$,$n=1,2,\cdots$,有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n\in\mathscr{F}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n\in\mathscr{F}$;

(4) 设 F_α $(\alpha\in\Lambda)$ 为 X 上的 σ 环(或 σ 代数),则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{F}_\alpha$ 也是 X 上的 σ 环(或 σ 代数).

证明 (1) 因$\mathscr{F}$为非空集类,故$\varnothing \in \mathscr{F}$. 因为$\varnothing \in \mathscr{F}$,设$E_i = \varnothing, i = 3,4,\cdots$,由于$\mathscr{F}$是$\sigma$环,则$E_1 \cup E_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{F}$,从而$\mathscr{F}$是一个环;

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \setminus E_n) \in \mathscr{F}$;

(3) 根据定理 4 和$\mathscr{F}$为σ环,知

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}, \quad \varliminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathscr{F};$$

(4) 留给读者证明.

例 16 设$\mathscr{R}_0$是由$\mathbf{R}^1$中有限个左开右闭的有限区间的并集$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$全体组成的集类,则$\mathscr{R}_0$是一个环,但不是$\sigma$环.

证明 对任意$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i], B = \bigcup_{i=1}^{m} (\alpha_i, \beta_i] \in \mathscr{R}_0$,有

$$A \cup B = (\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} (\alpha_i, \beta_i]) \in \mathscr{R}_0,$$

又$\varnothing = (a, a] \in \mathscr{R}_0$. 任意$(a,b], (\alpha,\beta]$的差集$(a,b]\setminus(\alpha,\beta]$只可能有以下3种情况,即空集、左开右闭的区间、两个不相交的左开右闭区间的并,从而$(a,b]\setminus(\alpha,\beta] \in \mathscr{R}_0$,于是

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (\alpha_i, \beta_i] = \bigcup_{i=1}^{n} ((a_i, b_i] \setminus (\alpha_1, \beta_1]) \setminus \bigcup_{j=2}^{m} (\alpha_j, \beta_j].$$

从$\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \setminus (\alpha_1, \beta_i] \in \mathscr{R}_0$和归纳法知$A \setminus B \in \mathscr{R}_0$.

由$\mathbf{R}^1$不可能表成有限个左开右闭的有限区间的并,因此$\mathscr{R}_0$不是σ环,也不是代数.

定理 8 设$\mathscr{A}$是由X的某些子集构成的集类,则存在惟一的环(或代数,或σ环或σ代数)$\mathscr{F}$,使

(1) $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$;

(2) 任何包含$\mathscr{A}$的环(或代数,或σ环代数)$\mathscr{F}^*$,必有$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^*$(也即$\mathscr{F}$是包含$\mathscr{A}$的最小环(或代数,或$\sigma$环,或$\sigma$代数).

证明 X的所有子集构成集类$\mathscr{F}_1$是一个环,且$\mathscr{A} \subset \mathscr{F}_1$,设环族

$$\mu = \{\mathscr{R} \mid \mathscr{A} \subset \mathscr{R} \subset \mathscr{F}_1, \mathscr{R}\text{为环}\},$$

根据定理 6,$\mathscr{F} = \bigcap_{\mathscr{R}\in\mu} \mathscr{R}$为环. 显然有$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^*$,由$\mathscr{F}$的定义知(2) 成立.

如果还存在环$\mathscr{F}^*$也满足(1)、(2),则$\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}$. 又$\mathscr{F}$也满足(1)、(2),故$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^*$,从而$\mathscr{F}^* = \mathscr{F}$,也即满足(1)、(2) 的环是惟一的.

类似可证其他结论.

定义 9 定理 8 中的环(或代数,或σ环,或σ代数)$\mathscr{F}$称为由集类$\mathscr{A}$所张成(或生成)的环(或代数,或σ环,或σ代数),并用$\mathscr{F}(\mathscr{A})$(或$\mathscr{R}(\mathscr{A})$,或$\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{A})$,或$\mathscr{R}_\sigma(\mathscr{A})$)来表示.

例 17 设 X 为一非空集合，$\mathscr{A}$ 为 X 的单点集全体所成的集类，则由集类 $\mathscr{A}$ 所张成的环 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 是 X 的有限子集(包括空集) 全体. 若 X 为有限集，则 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 也是代数、σ 环、σ 代数，即

$$\mathscr{F}(\mathscr{A}) = \mathscr{R}(\mathscr{A}) = \mathscr{F}_\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{A}).$$

若 $X = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$，$\mathscr{A}$ 为 X 的单点集全体所成的集类，则由集类 $\mathscr{A}$ 所张成的环 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 是 X 的有限子集(包括空集) 全体，但 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 不是代数，因为 $X = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 不属于 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. 因为 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \in \mathscr{F}_\sigma(\mathscr{A})$，故

$$\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{R}_\sigma(\mathscr{A}) = 2^A = \{A \mid A \subset X\}.$$

§2 集合的势

一、映射

定义 1 设 X, Y 为两个非空集合，如果对每个 $x \in X$，均存在惟一 $y \in Y$ 与之对应，则称这种对应为映射(或变换). 若用 T 来表示这种对应，则记为

$$T: X \to Y$$
$$x \mapsto y = Tx,$$

称 T 是从 X 到 Y 中的映射，称 $y = Tx$ 为在映射 T 下的(映) 像，称 x 为 y 的一个原像. 设 $A \subset X$，称 $T(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\}$ 为 A 在映射 T 下的像集(记 $T(\varnothing) = \varnothing$)；设 $B \subset Y$，称 $T^{-1}(B) = \{x \in X \mid Tx \in B\}$ 为 B 在 T 下的原像集(记 $T^{-1}(\varnothing) = \varnothing$).

如果对任何 $y \in Y$，存在 $x \in X$，使 $y = Tx$，则称 T 为从 X 到 Y 的满射或从 X 到 Y 上的映射.

如果对任何 $Tx_1, Tx_2 \in Y$ 且 $Tx_1 = Tx_2$ 必有 $x_1 = x_2$，则称 T 为从 X 到 Y 的单射.

如果 T 既是满射又是单射，则称 T 是双射或 T 是 X 到 Y 的一一映射，也称 X 与 Y 之间存在一一对应. 此时也存在 Y 到 X 的映射，即对任何 $y \in Y$，存在惟一 $x \in X$，使 $y = Tx$，称这种映射为 T 的逆映射，记为

$$T^{-1}: Y \to X$$
$$y \mapsto x = T^{-1}y.$$

显然，T^{-1} 是 Y 到 X 的一一映射.

特别地，如果 Y 为数域(实数域或复数域)，则称 T 为函数. 当 $Y = \mathbf{R}^1$ 时，称 T 为实值函数.

显然，如果 T 为单射，则映射 T 是 X 到 $T(X)$ 的一一映射.

例 1 设 $X = [a, b]$，$Y = [c, d]$，定义映射

$$y = f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c,$$

则 f 是从 X 到 Y 的一一映射.

例 2 设 $X=Y=\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,k,\cdots\}$ 是自然数集，定义映射

$$T: X \to X$$
$$k \mapsto 2k,$$

则映射 T 是 X 到 X 的单射，不是 X 到 X 的满射. T 是 X 到 $T(X)=\{2,4,\cdots,2k$ $\cdots\}$ 的一一映射.

定理 1 设 $T: X \to Y$ 为映射，则

(1) 当 $A_1 \subset A_2 \subset X$ 时，有 $T(A_1) \subset T(A_2)$；

(2) $T(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} TA_\alpha \ (A_\alpha \subset X, \alpha \in \Lambda)$；

(3) $T(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} TA_\alpha \ (A_\alpha \subset X, \alpha \in \Lambda)$；

(4) 当 $B_1 \subset B_2 \subset Y$ 时，有 $T^{-1}(B_1) \subset T^{-1}(B_2)$；

(5) $T^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} T^{-1}(B_\alpha) \ (B_\alpha \subset Y, \alpha \in \Lambda)$；

(6) $T^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} T^{-1}(B_\alpha) \ (B_\alpha \subset Y, \alpha \in \Lambda)$；

(7) $T^{-1}(B^c) = (T^{-1}(B))^c \ (B \subset Y)$.

证明 仅证(6)，其余留作习题.

任取 $x \in T^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha)$，则存在 $y \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$，使 $y=T(x)$. 于是，对任意 $\alpha \in \Lambda$ 有 $y \in B_\alpha$，从而，对任意 $\alpha \in \Lambda$，有 $x \in T^{-1}(B_\alpha)$，也即 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} T^{-1}(B_\alpha)$，于是

$$T^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T^{-1}(B_\alpha).$$

另一方面，任取 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} T^{-1}(B_\alpha)$，则对任意 $\alpha \in \Lambda$，$x \in T^{-1}(B_\alpha)$. 由映射的定义知，存在惟一 $y \in B_\alpha$，使 $y=T(x)$，由 α 的任意性，故 $x \in T^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha)$，即

$$T^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) \supset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T^{-1}(B_\alpha),$$

从而

$$T^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T^{-1}(B_\alpha).$$

思考题

1. 等式 $T(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} TA_\alpha \ (A_\alpha \in X, \alpha \in \Lambda)$ 是否成立？

2. 若 $A \subset X$，是否有 $T^{-1}(T(A)) = A$ 成立？

3. 若 $B \subset Y$，是否有 $T(T^{-1}(B)) = B$ 成立？

定义 2 设

$$T_1: X \to Y,\ T_2: Y \to W,$$

则由

$$Tx = T_2(T_1 x) \quad (x \in X),$$

定义映射 $T: X \to W$，称为 T_2 与 T_1 的复合映射，记为 $T = T_2 \circ T_1$.

二、集合的势

定义 3 设 A 和 B 为两集合，若存在从 A 到 B 的一一映射，则称集合 A 与 B 对等，记为 $A \sim B$. 规定空集与其自身对等.

对等关系有如下基本性质：

(1) 反身性：$A \sim A$；

(2) 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

(3) 传递性：若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$；

(4) 设

$$\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}, \quad \{B_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\},$$

其中 $\{A_\alpha\}$ 两两互不相交，$\{B_\alpha\}$ 两两互不相交. 若任意 $\alpha \in \Lambda$，有 $A_\alpha \sim B_\alpha$，则

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \sim \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha.$$

例 3 自然数集 $\mathbf{N}$ 与正偶数集 $\mathbf{Y}$ 对等. 因为映射

$$\begin{aligned} T: \mathbf{N} &\to \mathbf{Y} \\ k &\mapsto 2k \end{aligned}$$

是从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的一一映射.

例 4 $(0,1) \sim \mathbf{R}$. 因为映射

$$f(x) = \tan\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right)$$

是从 $(0,1)$ 到 $\mathbf{R}$ 的一一映射.

例 5 设集合 A 和集合 B 是有限集，则 $A \sim B$ 的充要条件是集合 A 与集合 B 有相同的元素个数.

证明 **必要性** 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，若 $A \sim B$，则存在从 A 到 B 的一一映射

$$\begin{aligned} T: A &\to B \\ a_i &\mapsto T(a_i) \ (i = 1, 2, \cdots, k), \end{aligned}$$

于是，$B = \{T(a_1), T(a_2), \cdots, T(a_k)\}$，因此集合 A 与集合 B 有相同的元素个数.

充分性 若集合 A 与集合 B 有相同的元素个数，不妨设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$，作映射

$$\begin{aligned} T: A &\to B \\ a_i &\mapsto b_i, \end{aligned}$$

显然，T 是 A 到 B 的一一映射，即 $A \sim B$.

定义 4 如果 $A \sim B$，则称 A 与 B 有相同的势或基数，记为 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$（其中 $\overline{\overline{A}}$ 表示 A 的势或基数）.

显然，凡是互相对等的一切集合均具有相同的基数.

定义 5 设集合 A 与 B，记 $\overline{\overline{A}} = \alpha, \overline{\overline{B}} = \beta$. 如果 $A \sim B_1 \subset B$，则称 α 不大于 β，

记为

$$\overline{\overline{A}} = \alpha \leqslant \beta = \overline{\overline{B}};$$

如果 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\alpha \neq \beta$，则称 α 小于 β，记为

$$\overline{\overline{A}} = \alpha < \beta = \overline{\overline{B}}.$$

现在我们来给出有限集和无限集的定义. 设 A 是一个集合，如果存在自然数 n，使得 $A \sim \{1,2,\cdots,n\}$，则称 A 为有限集，且用同一符号 n 记 A 的基数；若一个集合不是有限集，则称为无限集.

对于有限集来说，其基数可以看作是集合中元素的个数，而对于无限集来说，其基数表示所有对等集合共同的属性，此时集合元素的“个数”的概念已不再有意义. 在这个意义下，我们可以说集合的势或基数是有限集的元素个数的推广，它反映出一切对等集所具有的共性.

显然，若 $A_1 \subset A$，则 $\overline{\overline{A_1}} \leqslant \overline{\overline{A}}$.

例 6 设集合 A 和 B，若

(1) 映射 T 是从 A 到 B 的单射，则 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$；

(2) 映射 T 是从 A 到 B 的满射，则 $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$.

证明 (1) 因为 T 是从 A 到 B 的单射，所以 T 是从 A 到 $T(A)$ 的一一映射，从而 $A \sim T(A) \subset B$，由定义 5 知，$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$；

(2) 留作习题.

例 7 设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$，$\{B_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$，其中 $\{B_\alpha\}$ 两两互不相交. 若任意 $\alpha \in \Lambda$，有 $A_\alpha \sim B_\alpha$，则 $\overline{\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}} \leqslant \overline{\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha}}$.

引理 若 $A_2 \subset A_1 \subset A$，且 $A \sim A_2$，则 $A \sim A_1 \sim A_2$.

证明 因为 $A \sim A_2$，所以存在双射

$$f: A \leftrightarrow A_2,$$

于是

$$A_1 \sim f(A_1) \subset A_2，记\ A_3 = f(A_1) \quad (因\ A_1 \subset A),$$
$$A_2 \sim f(A_2) \subset A_3，记\ A_4 = f(A_2) \quad (因\ A_2 \subset A_1).$$

按此方法继续下去，一般地，有

$$A_{2n-1} \sim f(A_{2n-1}) \subset A_{2n}，记\ A_{2n+1} = f(A_{2n-1}) \quad (因\ A_{2n-1} \subset A_{2n-2}),$$
$$A_{2n} \sim f(A_{2n}) \subset A_{2n+1}，记\ A_{2n+2} = f(A_{2n}) \quad (因\ A_{2n} \subset A_{2n-1}),$$
$$\cdots\cdots$$

于是得到一列单调递减集列

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

显然

$$A \sim A_2, A_1 \sim A_3, A_2 \sim A_4, \cdots$$
$$A - A_1 \sim A_2 - A_3, A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4, \cdots$$
$$A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5, A_3 - A_4 \sim A_5 - A_6, \cdots$$