21世纪高等教育系列规划教材
21SHIJI GAODENG JIAOYU XILIEGUIHUA JIAOCAI

概率论与数理统计

刘新平 贺瑞缠 主编

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等教育系列规划教材

概率论与数理统计

主　编　刘新平　贺瑞缠
副主编　李红文　杨开春　查淑玲　朱科科

西 北 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/ 刘新平,贺瑞缠主编. —西安:
西北大学出版社,2006. 2
ISBN 7-5604-2103-2

I. 概... II. ①刘... ②贺... III. ①概率论②数理
统计 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 005484 号

书　　名 概率论与数理统计
主　　编 刘新平　贺瑞缠
出版发行 西北大学出版社
通信地址 西安市太白北路 229 号　邮编　710069　电话　029－88302590
经　　销 新华书店经销
印　　刷 陕西向阳印务有限公司
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 15.5
字　　数 250 千字
版　　次 2006 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-5604-2103-2/O·131
定　　价 20.00 元

前言

能力培养和素质教育被确立为高等教育的目标. 数学教育在实现这一目标中的重要作用被普遍认同. 人们熟知数学是知识,是工具,其实它还是一种语言,有独特的思维模式,含丰富的方法技术. 它也是一种素养,一种文化. 而这一切,在不同数学门类中虽共性颇多,但各数学门类内的独到之处也甚丰. 随机数学作为数学的一大门类,就其研究对象、思想方法及应用范围等多方面而言,其培养和教育作用为其它数学门类所不能涵盖. 严格地说,客观世界中的现象及相互关系几乎全具有随机性,确定型的对象或关系只可认为是随机现象和关系的相应特例,或人们在研究过程中的理想化认同. 概率论、数理统计、随机过程是学习和应用随机数学的基础,而且它们自身也有非常广泛的作用,而且独到之处更令人对数学刮目相看. 由此看到,理工类学生、人文类学生,抑或每一个人都应该接受随机数学方面的教育.

为了给计划学习随机数学基础但又课时较少的学生提供一本能兼顾两者,又尽可能充分地反映随机数学的基本思想方法和技巧,还能启发读者用随机数学的思想和知识解决实际问题的自觉性,且可读性也较好的教材,西北大学、陕西师范大学、西安文理学院、宝鸡文理学院、渭南师范学院、解放军第二炮兵工程学院等院校的多位资深教师,集各自多年从事概率论与数理统计课程教学的经验,切磋再三,共同努力,使此书问世于读者面前. 我们衷心希望本书能实现前述目的;衷心希望阅读本书的读者,在已有数学知识和能力的基础上能得到长足的长进;衷心希望本书在传授随机数学基础知识的同时,能对读者的抽象思维和逻辑思维能力及综合运用所学知识分析问题、解决问题等能力的培养和提高产生显著效果.

本书由概率论基础(模块1)、数理统计基础(模块2)和随机过程简介(模块3)三个模块组成,其中后两个模块相对独立.若因某种条件限制而不能全部学习时,读者可根据需要单独学习模块1,或组合学习模块1及模块2,或组合学习模块1及模块3.书中前两个模块,其内容选裁遵循高等院校理工综合类专业本课程的基本要求,随机过程简介一章的内容可供部分专业选学.我们在每章末均选配了A、B两类习题,其中A类是学习本书的最基本练习,B类为选作题.建议希望更扎实地掌握随机数学基础的读者查阅同类书籍,多作习题,扩大习题的练习量.

本书由陕西师范大学刘新平教授和西北大学贺瑞缠副教授主编.编写大纲和编写风格设计由贺瑞缠起草并经全体编者多次讨论定稿.编写分工如下:宝鸡文理学院朱科科编写第一章,西安文理学院冉凯编写第二章,西安文理学院杨开春编写第三章,渭南师范学院查淑玲编写第四章,解放军第二炮兵工程学院李红文编写第五、六章,西安文理学院张运良编写第七章,陕西师范大学刘新平教授编写第八章,西北大学贺瑞缠编写第九、十章.初稿完成后,由主编刘新平和贺瑞缠校审了全书.我们感谢西北大学出版社李宝宁先生,他在本书的策划、组稿、校核和出版方面功不可没.

虽然我们欲尽力编好本书,但限于编者水平,书中错误和失误在所难免,恳请同仁、读者批评指正,以利于我们改进.

编者

2006年1月

目录

目录

目录

第一章　随机事件及其概率

第一节　概率统计发展简述

自然现象包罗万象，变化无穷，其中某些自然现象的发生有不确定性，比如地震、海啸、飞机失事、摸彩中奖等. 对这些现象传统数学研究方法显得力不从心，概率论就是研究这些不确定现象的一种数学方法.

概率论大致起源于17世纪，开始研究的对象是赌博问题，建立了概率的概念和模型，以及一些计算公式. 随着西方资本主义的兴起、大工业的发展和向外的扩张，更多的不确定性问题出现了，比如投资的回报与风险、火炮的射击精度等问题. 这些问题促进了概率论的发展，18世纪概率论的发展很快，建立了概率论的极限理论，以强有力的微积分工具处理概率问题，实现了从组合技巧向分析方法的过渡，开辟了概率论发展的新时期.

19世纪末，概率论在统计物理等领域的应用提出了对概率论基础进行解释的需要. 由于概率论的逻辑基础不严密，无论是自身发展还是实际需要都要求对概率论的逻辑基础作出严密的考察. 以苏联数学家柯尔莫戈罗夫为代表的一批数学家经过努力，在20世纪30年代左右建立了概率的公理化定义，使概率论有了严密的数学基础. 公理化定义的建立使现代概率论取得了一系列理论突破，主要是在随机过程的研究中.

在二次世界大战中概率论的应用有很大的发展，产生了许多新的数理统计方法，解决了非常多的实际问题，这个时期也产生了建立在概率论基础上的一个新学科：控制论.

二次大战以后，由于计算机的产生，使许多因数据庞大而无法用概率论方法解决的问题有了解决的可能，进一步促进了概率论的发展和应用. 现在无论是经济生活还是社会发展，无论是信息技术还是生物工程中，到处都有概率统计的理论与方

法的应用. 许多概率论的软件也应运而生,为我们应用概率统计技术提供了极大的方便. 在科学技术飞速发展的今天,学习概率统计知识是十分必要的.

第二节　随机试验、随机事件及样本空间

在自然科学和社会经济现象的研究中,我们经常遇到这样一种现象:在一定的条件实现后,它有几种可能的结果,但事先不能确定哪一种结果发生,而事后是明确的. 这一类现象我们称为随机现象. 例如,足球比赛用掷一枚硬币来决定谁先发球. 硬币的正面向上,事先不能确定,因而哪个队先发球也不能确定,但掷后是确定的. 用一种新药对一组病人治疗,有效的人数事先不能确定,它有好多种可能的结果,但事后有效人数是明确的. 购买某种股票,明天它的涨跌不能确定,但第二天便见分晓.

随机现象在一次观察中其结果不能确定,但在相同条件下大量重复观察或试验时某种结果的出现又有一定的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

一、随机试验

为了研究随机现象在相同条件下大量重复观察时所呈现出来的这种规律性,我们规定具有如下特点的观察或试验为随机试验:

(1) 在相同条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的结果事先不能确定,但事后是明确的;

(3) 事先知道试验可能出现的不同结果(未必有限).

例如,在福利彩票的抽奖中,从标号0—35的36个乒乓球中随意抽取一个,则抽一次有36种可能结果,事先不能确定抽出哪一个,事后是明确的. 在相同条件下,重复抽7次,产生中奖号码.

又如,电话程控交换机在早上8:00—9:00接到的信号次数,每天都可在相同条件下重复观察,事先不知道有多少信号,但事后明确.

随机试验简称试验,用字母 E 或 E_1,E_2 等表示.

二、随机事件

把随机试验的每一个观察结果称为一个随机事件，简称事件，一般用 A、B、$C\cdots$ 表示，也可以用语言描述加花括号来表示.

随机事件又可以分为基本事件和复合事件. 基本事件指不能再分解的事件，复合事件指由若干基本事件组成的事件. 例如，掷一枚骰子，"数字 1 出现" 是基本事件，"偶数出现" 是复合事件，因为它可以分解为"数字2出现" 和"数字4出现" 以及"数字6出现" 三个基本事件. 但要注意，区分基本事件是和试验目的相联系的，不能绝对化.

在每一次试验中都必然发生的事件称为必然事件，记为 Ω，在每次试验中都不发生的事件称为不可能事件，记成$\varnothing$.

例如，"在常温常压下，水在 100℃ 会沸腾" 是必然事件，"人在地球上会飞" 是不可能事件.

在福利彩票摇奖时，"数字 $i(i=0,1,2,\cdots,35)$ 出现" 是随机事件，我们记成 A_0，$A_1,A_2,\cdots,A_{35}$. A_i 是基本事件，但研究彩票中奖时，我们关心是否中奖，我们把彩票分为中奖彩票和不中奖彩票，这时，"中奖彩票" 是基本事件.

程控交换机收到的信号数 $1,2,3,\cdots$ 是随机事件，"收到 K 个信号" 是基本事件. 这时基本事件数的上限不能确定.

三、样本空间

一个随机试验 E 所产生的基本事件的集合称为样本空间，记为 Ω，Ω 中的点即基本事件，称为样本点，记为 ω.

例如，从标号 $0,1,2,\cdots,9$ 的球中任取一个，令基本事件 $\omega_i=\{$取得 i 号球$\}$，$i=1,2,\cdots,9$ 则 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_9\}$.

程控交换机接到的信号数字 $1,2,\cdots$ 令 $\omega_i=\{$收到信号为 i 次$\}$，$i=1,2,\cdots$ 则 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

测量某地的水温，令 $t=\{$测得的水温为 t℃$\}$，则 $\Omega=[0,100]$.

随机事件必然是基本事件或由基本事件组合而成的复合事件，所以随机事件可

以表示为样本空间的子集，随机事件的特征可以通过样本空间的子集来刻画.

第三节　事件之间的关系和运算

概率论的任务之一是研究随机事件的规律性，我们希望通过对较简单的随机事件的研究去了解更复杂随机事件的规律，这就需要研究随机事件之间的关系和随机事件之间的运算.

一、事件之间的关系和运算

1. 事件的包含和相等

设 A、B 为两事件，若事件 A 发生必导致事件 B 发生，即 A 中每个事件必在 B 中，则称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记成 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

例如，掷一枚骰子，事件 i 表示 i 向上，则 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$，若 $A = \{2\}$，$B = \{$偶数向上$\}$，则 $A \subset B$.

若事件 A 包含于事件 B 并且事件 B 包含于事件 A，则称事件 A 与 B 相等，记成 $A = B$.

2. 事件的和(并)

设 A、B 为两事件，事件 A 或 B 至少一个发生是一个事件，称这个事件为事件 A 与 B 的和(并)事件，记成 $A \cup B$.

例如，从标号 $1,2,3,\cdots,10$ 的球中任取一个，$A = \{$球的标号为偶数$\}$，$B = \{$球的标号 $\leqslant 3\}$，则 $A \cup B = \{$球的标号为 $1,2,3,4,6,8,10\}$

一般地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生一个是事件，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记成 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$"，我们用 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示"无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少发生一个.

3. 事件的积(交)

设 A、B 是两事件，事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的积(交)，记成 $A \cap B$(简记为 AB).

例如，从标号 $1,2,\cdots,10$ 的乒乓球中任取一个，事件 i 表示抽到第 i 号球，$A = \{$取到偶数号球$\}$，$B = \{$取到球的号数小于等于 $3\}$，则 $A = \{2,4,6,8,10\}$，$B = \{1,$

$2,3\}, A \cap B = \{2\}$.

一般地,n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生,称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积(交),记成 $A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n$ 或$(A_1 A_2 \cdots A_n)$ 简记成 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$,对于无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的情况,$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2 \cdots$ 同时发生.

4. 互不相容事件

设 A、B 是两事件,若 A 和 B 不能同时发生,即 $A \cap B = \varnothing$,则称 A 与 B 是互不相容事件或互斥事件,例如以上的取乒乓球试验,$A = \{$取得偶数球$\}$,$B = \{$取得 1 号球$\}$,$AB = \varnothing$,则 A 与 B 互不相容. 事件 A 与 B 互不相容时,A 与 B 的和记成 $A + B$. 同样,n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,即这 n 个事件中任意两个事件都互不相容,即 $A_i A_j = \varnothing, \{i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n\}$,$n$ 个互不相容事件的和记成 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

5. 对立事件(互逆事件)

设 A、B 为两事件,Ω 是样本空间,事件 A 与 B 的和是必然事件,且 A 与 B 的积是不可能事件,则称事件 A 是事件 B 的对立事件(或 B 是 A 的对立事件),记成 $B = \overline{A}(A = \overline{B})$.

例如,掷一枚硬币,$A = \{$正面向上$\}$,$B = \{$反面向上$\}$,则 A 与 B 至少一个发生,但 A 与 B 不能同时发生,所以 A 是 B 的对立事件.

注意 A 与 B 对立,就有 $AB = \varnothing$,这时必有 A 与 B 互斥,但 A 与 B 互斥未必 A 与 B 对立,因为这时未必有 $A \cup B = \Omega$,例如,从标号 $1, 2, \cdots, 10$ 的乒乓球中任意取一个,$A = \{$取到 2 号球$\}$,$B = \{$取到 3 号球$\}$,则 $AB = \varnothing$,所以 A 与 B 互斥. 但 $A \cup B \neq \Omega$,所以 B 不是 A 的对立事件.

6. 事件的差

设 A、B 为二事件,事件 A 发生而 B 不发生是一个事件,称为事件 A 和 B 的差事件,记成 $A - B$. 例如从标号 $1, 2, \cdots, 10$ 的球中任取一个,$A = \{$取得偶数号球$\}$,$B = \{$取得标号小于 5 的球$\}$,则 $A - B = \{$取得标号 6,8,10 的球$\}$.

利用差事件,A 的对立事件 $\overline{A}$ 可以表示为 $\overline{A} = \Omega - A$.

二、事件运算的性质

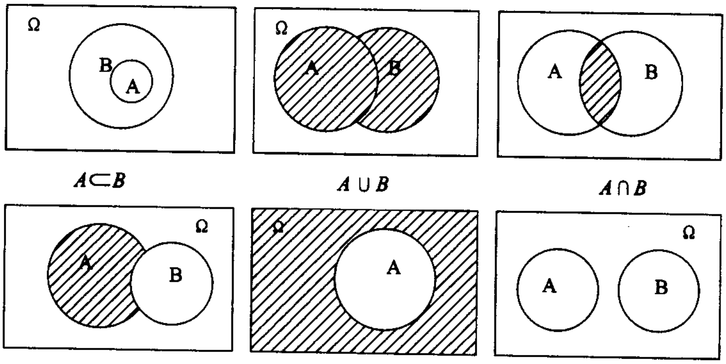
我们注意到事件的运算和集合的运算有类似之处,样本空间可以理解为全集,

基本事件可以理解为集合的元素，则事件的和、积、差运算可以理解为集合的并、交、差运算，对立事件可以理解为集合的补集，互斥事件可以理解为集合的交，是空集.为便于对照，现把集合所得有关结论和事件的运算对应列成下表.

表 1.1

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	ω 是 Ω 中的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 A 包含于集合 B	事件 A 包含于事件 B
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与 B 之并	事件 A 与 B 至少发生一个
$A \cap B$	集合 A 与 B 之交	事件 A 与 B 同时发生
$\overline{A}$	集合 A 的补集	事件 A 的逆事件
$A - B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而 B 不发生
$A \cap B = \varnothing$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互斥

我们可以用平面上的几何图形来表示集合的运算，因此，也可以用几何图形表示事件的运算，如图 1.1.



$A \subset B$　　$A \cup B$　　$A \cap B$

$A-B$　　$\overline{A}$　　$A \cap B=\phi$

图 1.1

事件的运算和集合的运算相似，则集合运算的某些性质事件运算也应具有，主要有以下法则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad (AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC),\quad A\cup(BC)=(AB)\cup(AC)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}\quad (\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i})$.

这里仅证明$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

设$\omega\in\overline{A\cup B}$，即$\omega\notin A\cup B$，即$\omega$不属于$A$与$B$中任一个，即$\omega$不属于$A$也不属于$B$，即$\omega\in\overline{A}\cdot\overline{B}$，所以$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cdot\overline{B}$，反之$\omega\in\overline{A}\cdot\overline{B}$，即$\omega\in\overline{A}$且$\omega\in\overline{B}$，即$\omega\notin A$且$\omega\notin B$，即$\omega$不属于$A$、$B$中任一个，即$\omega\notin A\cup B$，即$\omega\in\overline{A\cup B}$，所以，$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\overline{B}$，综合即得$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

我们用集合论的语言证明了$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，对于其余各式类似可以证明.

将一个事件分解成若干事件之和或积的方法在概率论中经常应用，另外事件互不相容概念在应用中经常出现，读者应对这些概念认真体会，准确把握. 以下一些等式在实际中是经常用到的.

$$A\cup A=A,\qquad A\cup\Omega=\Omega,\qquad A\cup\varnothing=A,$$

$$AA=A,\qquad A\Omega=A,\qquad A\varnothing=\varnothing,$$

$$A-B=A-AB=A\overline{B},\qquad A\cup B=A+B\overline{A}.$$

例1 A、B、C是三个事件，$A-(B-C)=(A-B)\cup C$，证明C是A的子事件.

证明 因为

$$\begin{aligned}A-(B-C)&=A-(B\overline{C})=A(\overline{B\overline{C}})=A(\overline{B}\cup\overline{\overline{C}}\\&=A(\overline{B}\cup C)=A\overline{B}\cup AC.\end{aligned}$$

又因为
$$(A-B)\cup C=(A\overline{B})\cup C$$
所以$AC=C$，即C是A的子事件.

例2 一批产品中有合格品也有次品，从中有放回的抽取（将产品抽出观察后放回）三件产品，以$A_i(i=1,2,3)$表示第i次抽到次品，以事件的集合表示下列情况：

(1) 前两次至少抽到一件次品；　　(2) 只有第一次抽到次品；

(3) 三次都抽到次品； (4) 至少有一次抽到次品；

(5) 只有一次抽到次品； (6) 没有抽到次品.

解 (1)$A_1 \cup A_2$， (2)$A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3}$， (3)$A_1A_2A_3$

(4)$A_1 \cup A_2 \cup A_3$， (5)$A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，

(6) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ 或$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

第四节 频率与概率

一、频率及其稳定性

对某一随机现象在相同的条件下观察了 n 次，事件 A 发生了 μ_n 次，我们定义事件 A 发生的频率为

$$f(A) = \frac{\text{事件 }A\text{ 发生的次数}}{\text{观察的总次数}} = \frac{\mu_n}{n} \tag{1-1}$$

而 μ_n 称为事件 A 发生的频数.

频率具有以下性质：

(1)$0 \leqslant f(A) \leqslant 1$；

(2) 必然事件的频率等于 1，不可能事件的频率等于 0；

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则

$$f(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n).$$

现就 $n = 2$ 的情形证明(3). 设在 n 次试验中事件 A_1 发生了 μ_1 次，事件 A_2 发生了 μ_2 次，因此 $f(A_1) = \dfrac{\mu_1}{n}$，$f(A_2) = \dfrac{\mu_2}{n}$. 因 A_1, A_2 互不相容，因此事件 $A_1 \cup A_2$ 发生了 $\mu_1 + \mu_2$ 次，$A_1 \cup A_2$ 发生的频率

$$f(A_1 \cup A_2) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{n} = \frac{\mu_1}{n} + \frac{\mu_2}{n} = f(A_1) + f(A_2).$$

频率 $f(A)$ 和试验的次数有关，和事件 A 的性质也有关，但在试验次数 n 增大时事件 A 发生的频率呈现某种稳定性，即频率趋近于某一常数. 例如，关于掷硬币的试验，在试验次数越来越大时，正面向上事件 A 发生的频率趋近于$\dfrac{1}{2}$. 见表 1.2. 表中 n