

南京邮电大学《高等数学》教研室 编写

高等数学 同步练习册

(上册)



清华大学出版社

高等数学

同步练习册

(上册)

南京邮电大学《高等数学》教研室 编写

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本练习册是南京邮电大学所编《高等数学》教材的配套教学用书,与教材体系相同,与教学内容紧密衔接,基本点、重点、难点突出,题型难易程度适中,题目典型,题量适当,注重基本概念、基本定理、基本运算,适当配有提高题,以训练学生的解题技巧。

本练习册分为上下册,内容包括:极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理等 13 章的习题及期中、期末模拟考试题各四套。

本练习册适用于工科高等院校的本科生。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习册.上/南京邮电大学《高等数学》教研组编写. —北京:清华大学出版社,2006.10

ISBN 7-302-13631-9

I. 高… II. 南… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 093493 号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 客 户 服 务:010-62776969

责任编辑:梁 颖

印 刷 者:北京市清华园胶印厂

装 订 者:三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印张:7 字数:173千字

版 次:2006年10月第1版 2006年10月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-13631-9/0·565

印 数:1~5000

定 价:12.00元

前 言

本练习册是南京邮电大学所编《高等数学》教材的配套教学用书,具有与教材体系相同,与教学内容紧密衔接,基本点、重点、难点突出,题型难易程度适中,题目典型,题量适当的特点。本练习册选题注重基本概念、基本定理、基本运算,适当配有提高题,以训练学生的解题技巧。通过对该练习册上习题的分析、解答和论证,学生能有目标地进行课后练习,巩固课堂所学内容。

本练习册分为上下册,内容包括:极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数与留数定理等 13 章的习题及期中、期末模拟试题各四套。

本练习册的形式为学生的作业本,一方面由于比较规范,便于任课教师批改;另一方面,减轻了学生抄作业题的负担,同时也便于作业本的保留。

本练习册适用于工科高等院校的本科生。

本练习册第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 9 章、第 10 章、第 13 章由王雪红编写,第 4 章、第 5 章、第 6 章、第 7 章、第 8 章、第 11 章、第 12 章由欧阳金丽编写,全书由欧阳金丽统稿。

本练习册已在南京邮电大学使用两届,受到师生好评。王建民、邱中华、王晓平、宋洪雪、严珍珍等老师对练习册提出了很多宝贵意见;南京邮电大学教务处、数理学院对本练习册的编写与出版给予了大力支持,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,错误在所难免,恳请老师、同学不吝指正,我们不胜感激。

编 者

2006 年 6 月于南京

目 录

第 1 章 极限与连续	1	3.3 泰勒公式	39
1.1 函数	1	3.4 函数的单调性和极值	41
1.2 数列的极限	2	3.5 函数图形的描绘	43
1.3 函数的极限	3	3.6 总习题	45
1.4 无穷小与无穷大	4	第 4 章 不定积分	51
1.5 极限运算法则	5	4.1 不定积分的概念与性质	51
1.6 极限存在准则 两个重要极限	7	4.2 换元积分法	52
1.7 无穷小的比较	9	4.2.1 第一类换元法	52
1.8 函数的连续性与间断点	11	4.2.2 第二类换元法	53
1.9 连续函数的运算 闭区间上连续函数性质	13	4.3 分部积分法	55
1.10 总习题	15	4.4 有理函数和可化为有理函数的积分	56
第 2 章 导数与微分	21	4.5 总习题	57
2.1 导数定义	21	第 5 章 定积分及应用	61
2.2 求导法则	23	5.1 定积分的概念	61
2.3 高阶导数及相关变化率	27	5.2 定积分的性质	61
2.4 微分	29	5.3 微积分基本定理	63
2.5 总习题	30	5.4 定积分换元积分法和分部积分法	65
第 3 章 中值定理与导数应用	35	5.4.1 定积分的换元积分法	65
3.1 中值定理	35	5.4.2 定积分的分部积分法	67
3.2 洛必塔法则	37	5.5 广义积分	69

5.6 定积分的几何应用	70	6.6 方向导数与梯度	84
5.7 定积分的物理应用	71	6.7 多元函数极值及求法	85
5.8 总习题	72	6.8 总习题	86
第 6 章 多元函数微分法及其应用	77	高等数学(上)期中模拟试卷(一)	89
6.1 多元函数概念	77	高等数学(上)期中模拟试卷(二)	93
6.2 偏导数与全微分	78	高等数学(上)期末模拟试卷(一)	97
6.3 多元复合函数求导法	79	高等数学(上)期末模拟试卷(二)	101
6.4 隐函数求导法	80		
6.5 多元函数微分学的几何应用	83		

第1章 极限与连续

1.1 函 数

1. 填空题

(1) 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = \sqrt{x}$, 则当 $x < 0$ 时

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(4) 函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 的奇偶性为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(5) 设 $g(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$, 则其反函数 $g^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(6) 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$;

(7) 设 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(8) 函数 $f(x) = x \cos x$ 和 $g(x) = 1 + \sin^2 x + \cos 3x$ 两者中 $\underline{\hspace{2cm}}$ 是周期函数, 其最小正周期 $T = \underline{\hspace{2cm}}$;

(9) 设函数 $f(x) = 2^x$, $g(x) = 5x + 1$, 则 $g[f(x) + x] = \underline{\hspace{2cm}}$;

(10) 若 $y = f(u) = e^u$, $u = g(v) = -v^2$, $v = h(w) = \sin w$, $w =$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}, \text{ 则复合函数 } y = f(g(h(\varphi(x)))) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1, g(x) = \ln x, \text{ 求 } f[g(x)]. \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$$

3. 设 $f(x) = \min \{2x + 5, x^2, -x + 6\}$, 试给出 $f(x)$ 的分段表达式, 画出 $f(x)$ 的图形, 并求 $\max f(x)$ 。

1.2 数列的极限

1. 选择题

(1) 下列命题中正确的是 ()

- (A) 发散数列必然无界 (B) 两个发散数列之和必然发散
(C) 两个无界数列之和必然发散 (D) 收敛数列必然有界

(2) 下列数列中收敛的是 ()

- (A) $x_n = (-1)^n$ (B) $x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$
(C) $x_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ (D) $x_n = e^n \sin n\pi$

(3) 下列说法中与“ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ”等价的是 ()

- (A) 随着 n 的增大, x_n 越来越接近常数 A
(B) 点 A 的无论多么小的邻域内都有数列 $\{x_n\}$ 中无穷多个点
(C) 数列 $\{x_n\}$ 中所有的点都落在 A 的某个邻域内
(D) 无论正数 ϵ 有多么小, 点 A 的 ϵ 邻域之外至多只有数列 $\{x_n\}$ 中有限多个点

2. 用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \frac{3}{4}$ 。

3. 求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})$

4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 而数列 $\{y_n\}$ 有界, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 。

1.3 函数的极限

1. 填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有界的 _____

条件;

(2) $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____

条件。

2. 用定义证明: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$ 。

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} & x < -2, \\ 0 & x = -2, \\ 2x + 5 & x > -2, \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 。

4. 试用数列极限和函数极限的关系定理证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。

5. 证明: 若 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在且都等于 a , 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ 。

1.4 无穷小与无穷大

1. 选择题

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 均为无穷小量, 下列变量中 $x \rightarrow x_0$ 时可能不是无穷小量的是 ()

- (A) $3\alpha(x) - 4\beta(x)$ (B) $2\alpha(x) + 3\beta(x)$
 (C) $\alpha(x)\beta(x)$ (D) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ($\beta(x) \neq 0$)

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量且恒不为 0, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时下列函数必为无穷大量的是 ()

- (A) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (B) $\frac{g(x)}{f(x)}$
 (C) $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$ (D) $\frac{1}{f(x)} - e^{g(x)}$

(3) 下列命题正确的是 ()

- (A) 无界量必为无穷大量 (B) 无穷大量的和必为无穷大量
 (C) 无穷大量必为无界量 (D) 两个无界量的乘积必为无界量

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时 $(f(x) - A)$ 为无穷小量的 ()

- (A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

(5) 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是 ()

- (A) $\frac{|x|}{x} - 1$ ($x \rightarrow 0$) (B) $\frac{1}{(x-1)^3} - 1$ ($x \rightarrow 1$)
 (C) $e^{1/x}$ ($x \rightarrow 0^+$) (D) $e^{1/x}$ ($x \rightarrow 0^-$)

2. 用定义证明: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量。

3. 用定义证明: $g(x) = \frac{1+2x}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大量。

1.5 极限运算法则

1. 填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{(x-1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^3 - 8x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 选择题

(1) 下列结论正确的是 ()

- (A) 两个无穷大之和为无穷大
 (B) 有限个无穷小之和为无穷小
 (C) 无穷多个无穷小之和为无穷小
 (D) 两个无穷小之商为无穷小

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = B$, 则下列结论正确的是 ()

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \frac{B}{A}$
 (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$
 (C) $A=0$ 时必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$
 (D) $A \neq 0$ 时必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \frac{B}{A}$

3. 计算下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 8}{n^3 - 1} \sin(n!)$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{4+x}-2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x^2+x-2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0, \text{求 } a \text{ 和 } b \text{ 的值。}$$

1.6 极限存在准则 两个重要极限

1. 填空题

(1) 数列 $\{x_n\}$ 单调有界是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在的 _____ 条件;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t \sin tx}{\sin 2x} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{x+1} = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 计算下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} \quad (x \neq 0)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{2}{x} + \frac{\sin 3x}{x} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{x+2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{1/(x-3)}$$

3. 用极限准则证明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = \frac{1}{2}$$

(2) 数列 $x_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = \sqrt{3+x_n} (n=1, 2, \cdots)$ 的极限存在。

1.7 无穷小的比较

1. 选择题

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\sqrt{1+x^2}-1$ 等价的无穷小是 ()

- (A) x (B) x^2 (C) $2x^2$ (D) $\frac{x^2}{2}$

(2) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时成立的是 ()

- (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小
 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但不等价无穷小
 (C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小
 (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(3) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量阶数最高的是 ()

- (A) $1-\cos\sqrt{x}$ (B) $\sqrt{x}+x^4$
 (C) $x\sin\sqrt{x}$ (D) $x\sqrt{x+\sqrt{x}}$

(4) 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ 都是无穷小, 且 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$

$\beta(x) \propto \gamma(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\gamma(x)} =$ ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) ∞

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1-\cos x^2$ 是关于 x 的 () 阶无穷小

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

(6) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$ 是关于 x 的 () 阶无穷小

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$

2. 计算下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^2}{x \tan x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt{1+x^2}-1)(e^{\sin x}-1)}$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin 2x)}{e^{3x} - 1}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

3. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$, 求 a, b 的值。

1.8 函数的连续性与间断点

1. 填空题

(1) 对于函数 $f(x) = \frac{x}{1 - e^{x/(1-x)}}$, $x=1$ 是其_____间断点, $x=0$ 是其_____间断点;

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则

$k = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 对于函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$, $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 以及 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 是其可去间断点, $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 是无穷间断点;

(4) 对于函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$, $x=0$ 是其_____间断点, $x=-1$ 是其_____间断点, $x=1$ 是其_____间断点;

(5) 函数 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 与可去间断点 $x=1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 选择题

(1) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, $g(x)$ 在 x_0 处间断, 则下列函数中在 x_0 处必定间断的是 ()

(A) $f(x) + g(x)$

(B) $f(x)g(x)$

(C) $\frac{f(x)}{g(x)}$

(D) $\frac{|g(x)|}{f(x)}$

(2) $x=0$ 是函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 的 ()

(A) 可去间断点

(B) 跳跃间断点

(C) 无穷间断点

(D) 振荡间断点

(3) $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{1/x}}$ 的 ()

(A) 可去间断点

(B) 跳跃间断点

(C) 无穷间断点

(D) 振荡间断点

(4) 下列函数在 $x=0$ 处不连续的是 ()

(A) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ e^x & x \leq 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(5) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则 ()

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点

(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点

(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点