



数学基础知识丛书

复 数

陈 利 国

江 苏 人 民 出 版 社



复 数

陈 利 国

江 苏 人 民 出 版 社

陈利国

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
扬州印刷厂印刷

1979年8月第1版

1979年8月第1次印刷

印数 1—80,000册

书号 13100·031 定价 0.35 元

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分五部分，第一部分介绍集合的概念和数集扩张的原则并循此将实数集扩张而得复数集，第二部分用平面向量给复数及其运算以几何解释，第三部分着重说明复数开方永可施行及复数不能比较大小的新性质，最后两部分介绍复数的一些应用，对扩张中的两个理论问题——扩张的最小性与唯一性作了论述，还就进一步扩张复数集的可能性问题给了结论。

目 录

一、复数集	1
§ 1 集合、一一对应	2
1. 集合的概念	2
2. 一一对应	4
§ 2 数集扩张的原则	5
§ 3 复数集——实数集添加“ i ”后的扩张	8
1. 实数集为什么还要进一步扩张?	8
2. 新数集将是怎样的? ——扩张前的猜想	10
3. 复数集的建立	11
二、平面向量与复数	32
§ 4 向量、向量的线性运算	32
1. 向量及其几何表示	32
2. 向量的线性运算	34
3. 向量的共线与共面	38
4. 基向量、维	42
§ 5 平面向量与复数	43
1. 一维向量与实数	43
2. 复数的几何表示	44
3. 复数加(减)法与数乘的几何意义	45
4. 复数乘除法的几何意义	47
5. 复数的乘方, 棣莫弗定理	55
6. 复数的指数形式	58
7. 模的性质	58

三、复数集的新性质	64
§ 6 开方运算永远可以施行	64
1. 复数的开方法则	64
2. n 次方根之间的关系、 n 次单位根、原根	68
3. 附注	72
§ 7 复数不能比较大小	74
1. 一般次序	74
2. 数目次序	77
3. 复数不能比较大小	78
四、复数应用举例	80
§ 8 复数在几何上的一些应用	80
1. 距离公式与定比分点公式	81
2. 两条直线的交角	83
3. 曲线与方程	86
4. 平面区域的表示	87
5. 一些例子	88
§ 9 求和 $\sum_{j=1}^n A_j \sin(\omega x + \varphi_j)$	92
§ 10 复数在交流电路计算中的应用	97
1. 只含电感的交流电路	98
2. 只含电容的交流电路	99
五、复数理论研究的几个问题	104
§ 11 几个有关的基本概念	105
1. 代数运算	105
2. 数域、域、子域	106
3. 同构对应	115
§ 12 关于扩张的最小性与唯一性	118
1. 扩张的最小性	118
2. 扩张的唯一性	119

§ 13 复数域还能进一步扩张吗?	123
1. 从运算的需要看, 复数域还要扩张吗?	123
2. 从解方程的需要看, 复数域还要扩张吗?	126
3. 关于复数集进一步扩张的一些结论	126
附录一 欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 的一个证明	131
附录二 习题、总复习题 解答与提示	134

一、复 数 集

数是数学研究最基本的对象之一，它是用来表示客观世界存在的量的。随着人类社会实践水平的逐步提高，数的概念不断发展与扩张着。正如我们已经知道的那样，为了数物、计数得到了自然数的概念；由测量、分配等需要产生了分数的概念；为了表示相反意义的量引入了负数；为了度量连续量引进了无理数。这样数的概念一步步扩大到了实数的范围。然而，我们即将看到，数的概念的扩张还没有结束，我们还需要引入一种新的数——虚数，它与原有的实数一起，构成了数的一个更大的范围——复数。

虚数从哪里来的呢？虚数产生于负数开平方。然而，正如恩格斯所指出的“负数应当是某数的平方，这也是矛盾，因为任何一个负数自乘就得出正的平方。因此， -1 的平方根不仅是矛盾，而且甚至是荒谬的矛盾，是真正的背理。”*由于这种矛盾的深刻性与形而上学对数学的影响，在历史上虚数迟迟没有得到承认。开始时，数学家们断言“负数没有平方根”，将矛盾掩盖起来，把新数拒之于数学大门之外。到了十六世纪，卡丹在论述三次方程时，又遇到了负数开平方问题，并且他发现如果把负数的平方根按实数的运算法则进行运算的话，不会产生矛盾。即便如此，当时还认为这种数是“虚假的”、“幻想的”、“不可思议的”等等。直到后来，经过达朗贝尔、欧拉、外塞尔等人的工作，把实

*恩格斯《反杜林论》119页，1970年版。

数与虚数结合起来，得到复数的概念，并用平面上的点来表示复数后，这种新数才站住了脚跟，并在以后得到了蓬勃的发展。现在，复数与复变函数的理论已经越来越深入地渗透到现代数学的很多分支，越来越广泛地应用于现代科学技术的众多方面。

§1 集合、一一对应

我们已学过很多有关数的知识，但很少研究单个的数。孤立地研究一个数，例如 8，是不会得出什么的。然而，将一个数与其它的数联系起来时，就能发现其丰富多采的性质。例如，将 8 与其它数联系起来时，就可以看到 $8 = 1 + 7 = 9 - 1 = 5 + 3$ ， $8 = 2 \times 4 = 2^3$ ，……等等。这样不仅能了解“8”与其它数的关系，而且从这些关系中也才能了解“8”这个数本身。因此，研究数的时候，总是将具有某种性质的数联系在一起，作为一个整体来考察。这实际上就要涉及到一个基本概念：集合。

1. 集合的概念

具有某种特性的对象的全体，叫做一个**集合**，或简称**集**。构成集合的对象叫做**集合的元素**。

例如，某校高二（一）班所有的学生构成一个集合；与定点的距离等于定长的所有点构成集合；全体自然数、全体整数、全体有理数、全体实数也各自构成集合，分别叫做自然数集、整数集、有理数集、实数集。

应该指出，集合是一个不定义的基本概念。上面的叙述仅是集合意义的一种说明。

今后，用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素。例如自然数

集、整数集、有理数集、实数集通常分别记为 N 、 Z 、 R 、 D 。

集合可以用花括弧将所有元素括起来的方式来表示，例如，三个元素 a, b, c 的集合 A ，可表成 $A = \{a, b, c\}$ ；自然数集 N 可表成 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ，其中 $\dots$ 表示未写出的元素。

集合也可以用在花括弧内说明元素特性的方式来表示。例如，等比数列 $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ 中的数构成的集合，其元素的特性是每个元素都可由公式 aq^{n-1} 表示，这集合可记为 $\{aq^{n-1} | n \text{ 是自然数}\}$ ；一切形如 $a + b\sqrt{2}$ 的数，其中 a, b 是有理数，这个集合可记为 $\{a + b\sqrt{2} | a, b \text{ 是有理数}\}$ 。

任何一个对象，对于一个集合 A 来说，或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，二者必居其一。若 a 是集合 A 的元素，就称为 a 属于 A ，记作 $a \in A$ （ $\in$ 读作“属于”）；若 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$ （ $\notin$ 读作“不属于”）。例如， $\frac{2}{3} \in R$ ， $\sqrt{2} \notin R$ 。

一个集所含的元素如果是有限个，就叫做有限集，否则就叫做无限集。为方便起见，不含任何元素的集合也叫做集，称为空集，记作 $\emptyset$ 。例如， $x^2 + 1 = 0$ 的实数根的集合是空集。

定义1. A 与 B 两个集合，若 A 的所有元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的一个子集，而 B 称为 A 的一个扩集，记作

$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ （读作 A 包含于 B 内，或 B 包含 A ）。

例1. 自然数集是整数集的子集： $N \subseteq Z$ 。

例2. $A = \{2, 3\}$ ， B 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的所有根构成的集，容易验证， A 的两个元素2与3都是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$

的根，所以 $A \subseteq B$ 。易知 B 也是由 2, 3 两个数组成的。本例说明一个集和它的子集可以有一样的元素。

定义2. A 与 B 两个集合，若 $A \subseteq B$ ，但 B 中至少有一个元素不属于 A ，则称 A 为 B 的一个真子集，而 B 称为 A 的一个真扩集，记作

$A \subset B$ 或 $B \supset A$ （读作 A 真包含于 B 内，或 B 真包含 A ）。

例1中的 N 是 Z 的真子集： $N \subset Z$ ；例2中的 A 不是 B 的真子集。

定义3. 两个集合 A 和 B ，若 $A \subseteq B$ ， $B \subseteq A$ ，则两个集合叫做相等，记作

$$\underline{A = B}.$$

例2中的 A 与 B 就是相等的两个集合。

2. 一一对应

一一对应的概念并不陌生，在学习实数时，已经谈论过数轴上的点与所有实数之间的一一对应。这里数轴上的点是一个集合，所有的实数是另一个集合，点与数之间的一一对应就是两个集合的一一对应。下面，我们给出确切的定义。

定义4. 设 A 与 B 是两个集。若有法则 φ ，使 A 的任一元素 a ，有 B 的唯一元素 b 与之对应，则法则 φ 叫做从集 A 到集 B 的一个对应， b 叫做元素 a 的象。

以后，用符号 $\varphi: a \rightarrow b$ 表示 b 是元素 a 的象。

定义5. 设 A 与 B 是两个集，若 φ 是从集 A 到集 B 的一个对应，且满足条件：

(1) A 的不同元素的象也不相同（异元异象）；

(2) B 的每一个元素都是 A 的某一个元素的象，

则 φ 叫做 A 与 B 间的一个一一对应。

A 与 B 间的一个一一对应 φ ，常用符号 $\varphi: a \leftrightarrow b$ 表示。

一一对应的上述定义似乎很抽象，其实并不难理解。举例来说，电影院的座位与观众在某种“坐法”下是否一一对应，只要看在这种“坐法”下，每个观众是否都有唯一的一个座位（每人一位）；每个座位上是否一定坐一个观众（坐位不空）；不同的观众坐的位子是否都不同（异人异位）。如果在这种“坐法”下，能做到“每人一位”，“坐位不空”，“异人异位”，则座位与观众之间自然是一一对应的。而这种“坐法”也就是座位与观众之间的一个一一对应。

例3. A 是整数集， B 是偶数集， $\varphi: n \rightarrow 2n$ 是从 A 到 B 的一个对应。显然， φ 还是 A 与 B 间的一个一一对应。

例4. $A = \text{整数集}$ ， $B = \text{非负整数集}$ ，则 $\varphi: n \rightarrow |n|$ 是 A 到 B 的一个对应，但不是 A 与 B 之间的一一对应，因为 n 与 $-n$ 对应着同一个象 $|n|$ ，异元异象的性质不满足。

例5. $A = B = \text{自然数集}$ ，则 $\varphi: n \rightarrow n+1$ 不是 A 与 B 之间的一一对应，因为 B 中的元素1，不是 A 中任何元素的象。

§ 2 数集扩张的原则

我们已经指出，人类对于数的认识不是一下子达到今天这样深刻的程度的，而是经历了一个逐步扩张的过程。数集的扩张从根本上来说，是由旧数集与发展到一定高度的实践之间不相适应的矛盾引起的。当人类的分配、测量等实践活动精细到需要把计量单位再分得细一些的时候，自然数就不够用了，（正）分数作为一种新数应运而生。当实践活动的范围越来越宽广，随之对量的认识越来越多样，认识了相反意

义的量并需要表示、计算它们时，算术里学的数（以后除零外，简称算术数）就不够了，原有的算术数概念必须加以扩张。在发现了不可公度线段的存在时，有理数又不够用了，无理数出现了，有理数集扩张到了实数集。

当一种数集与发展了的实践相矛盾时，就说明这数集自身有某种程度的不完善。这种不完善常常反映为数集内部存在着某种矛盾。例如，自然数集与把计量单位再加细分的实践需要之间的矛盾，反映到自然数集内部，便是除法运算不能永远施行，即两个自然数相除，商不一定是自然数，或者说自然数集关于除法运算不封闭。运算上的这种矛盾也反映到解方程方面来，例如，方程 $3x = 2$ 在自然数集中没有解。又如，算术数的集合与表示相反意义的量的实践需要之间的矛盾，反映到算术数集合内部，便是减法运算不能永远施行，即两个算术数相减，其差不一定是算术数，或者说算术数集合关于减法运算不封闭。这种矛盾反映到解方程方面，诸如 $x + 3 = 2$ 这样的方程在算术数集中没有解。同样，引起无理数产生的客观矛盾反映到有理数集内部，便是有理数集关于极限运算不封闭，例如，2开平方得到的逐次不足近似值1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …, 是单调上升上有界的有理数序列，但在有理数集中没有极限。

一种数集与发展了的实践之间不相适应时，我们采取什么态度呢？由于每种数集都是在一定高度的实践基础上产生的，它可以描写客观世界的某些量，因此不须一脚踢开原有的数集，而可以在旧数集的基础上增添一些新数来适应实践的需要，即不是抛弃旧数集，而是扩张旧数集。

当然，扩张数集并非仅仅是简单地添加一些新数。例如，从自然数集扩张到(正)分数集时，诚然首先要添加新数

——分数，分数与原来的自然数一起组成了一个新的数集。然而这仅是扩张的开始。我们不能把自然数与新数机械地堆积在一起就算完了，而需要将自然数与分数有机地联系起来，使新数集成为一个有机整体，而自然数集不过是其一个子集。我们把自然数看成分母为1的分数，就是要将旧数与新数沟通起来。然而，要使新数集真正有意义，就必须在新数集中定义新数之间的相等、大小等关系，定义加法与乘法这两种基本运算（这种定义往往是在实践基础上总结出来的）；由于我们不是抛弃而是扩张自然数集，所以在作上述定义时，要照顾到原来自然数集中的相应定义，不要使新旧定义相冲突（在实践基础上总结出来的运算法则，能做到这一点），即把自然数作为分数来确定它们的相等、大小等关系，进行加法与乘法运算，要和原来自然数集中的结果相一致，而且自然数集中运算的主要性质（运算律等）在分数集中继续成立。最后，还须检验一下扩张的目的有无达到，即在分数集中除法是否封闭，方程 $ax=b$ ($a, b \in N$) 在分数集中是否恒有解。只有这样以后，才能说我们已经扩张了自然数集，认识与实践之间的矛盾在这个阶段上得到了解决，自然数集自身存在的除法不封闭的矛盾得到了克服。

自然数集扩张到(正)分数集是数的概念的第一次扩张。尽管历史上数的概念的产生有着交错的情况（例如，无理数的概念出现了，而对负数则还未完全认识），但第一次扩张中贯穿的对旧数集“批判地继承”的这种精神，也适用于数集的历次扩张。将这种“批判地继承”的精神具体化，就是数集扩张的原则。

一般说来，若数集 A 由某种需要将其扩张到数集 B 时，扩张应该遵循下面的原则：

(1) 数集 A 是数集 B 的子集;

(2) 数集 B 中定义一些基本关系(例如相等)和运算,且 A 的元素作为 B 的元素来说,这样的定义与原先在 A 中已有的意义相一致,数集 A 中的一些主要性质(运算律等)在 B 中仍能保持;

(3) 数集 B 解决了数集 A 所不能解决的某种矛盾,即 A 中不能永远施行的某种运算在数集 B 中应能施行。*

下面,我们将按这样的扩张原则,继续扩张实数集。

§3 复数集——实数集添加“ i ”后的扩张

1. 实数集为什么还要进一步扩张?

数集扩张到实数集后,自然会提出下列问题:实数集还要不要进一步扩张?能不能进一步扩张?等等。这些问题下面将逐步解决。现在首先来看“要不要”的问题。

如§2所述,“要不要”的问题是实数集自身还有什么不完善相联系的。我们知道,在实数集中加、减、乘(因而还有乘方)、除这几种运算永远可以施行(在除的情形,0不能做除数)。开方这一运算,情况就不是这样:非负数开方是可以施行的,负数开奇次方也是可以施行的;负数开偶次方就不可施行。最简单的例子就是-1不能开平方,因为任何实数的平方总是非负数,所以在实数集中没有负数的平方根。相应地,在实数集中象 $x^2 + 1 = 0$ 这样极简单的方程也是不可解的。实数集的这种不完善,说明实数集有进一步扩张的必要。

然而,在历史上,由于当时实践水平的限制与形而上学

*为了使扩张完全确定,还应附加另一个原则,关于这一原则放到第五段中去说明。

的影响，对于这种必要性没有足够的重视，反而采取了消极的态度，认定负数不能开平方。以后，随着生产实践的发展，与体积直接有关的三次方程的研究深入进行了，并且对于如下的实系数三次方程

$$x^3 + px + q = 0$$

得到了一般的求根公式（卡丹公式*）：

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

但是，当 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ 时，使用卡丹公式求根就面临负数开平方的问题。例如，方程

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

按卡丹公式有

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}},$$

这里就出现负数开平方这一当时认为不可能的运算。但另一方面，容易知道这个三次方程有三个实数根**。事实上，

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 &= x^3 - x - 6x + 6 \\ &= x(x^2 - 1) - 6(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3), \end{aligned}$$

因此，1，2，-3是这个三次方程的三个实根。

这种情况，使当时的数学家感到困惑：何以通过“不可能的运算”，却表达了完全现实的结果呢？为此，数学家们曾化了很大力量，千方百计想排除卡丹公式中这种“不可

*卡丹公式的得来可参见一般的高等代数教程。

** n 次多项式最多只有 n 个根，因此，这三次方程除这三个实根外，再无其它根。

能的运算”，企图能利用实根式，即在根号下仅出现实数的根式来表示三次方程的根。然而，所有这些努力都失败了，后来才证明这种表示恰恰是不可能的。可见，剩下的唯一可走的道路，就是扩张实数集，使负数开平方成为可能。

2. 新数集将是怎样的？——扩张前的猜想

为了使负数开平方成为可能，就要将实数集扩张到一个新数集。这个新数集将是怎样的呢？

假定实数集按预定的目的进一步扩张实现了，那末按数集扩张的原则，可知

(1) 新数集应该包含实数集；

(2) 新数集中方程 $x^2 + 1 = 0$ 应该有解，即新数集必含有平方后等于 -1 的数。这个数当然不是实数，而是应该增添的一个新数，若以 i 表示它，则有

$$i^2 = -1.$$

(3) 实数集中的两个基本运算——加法与乘法，在新数集中应有定义，且保持在实数集中的运算规律。因而，实数与 i 应可以相加、相乘，运算的结果唯一且仍在新数集中，即新数集在包含 i 的同时，还应含有一切乘积 bi (b 是实数)，一切形如 $a + bi$ (a, b 是实数) 的和，而且将这种数相加与相乘，按加法与乘法的运算律，应有

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\(a + bi)(c + di) &= (ac + adi) + (bci + bdi^2) \\&= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

(4) 新数集中任意两个形如 $a + bi$ 与 $c + di$ 的数，当且仅当 $a = c, b = d$ 时才相等。

其实，当 $a = c, b = d$ 时，由加法与乘法运算的唯一性，易知有