

数学

高考复习资料

一九八〇年高考复习资料

数 学

江西省中小学教材编写组编

江西人民出版社出版
(南昌百花洲3号)

江西新华印刷厂印刷 江西省新华书店发行

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 $21 \frac{1}{2}$ 字数 50.2 万
1980 年 2 月第 1 版 1980 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—150,000

书号: 7110·215 定价: 1.69 元

说 明

本书是根据部颁《一九八〇年高等学校招生考试复习大纲》数学部分的要求，在我组编写的《1979年高考复习资料——数学》一书的基础上，广泛征求了各方面读者意见后进行修订而成的。

根据《考纲》的要求，复习重点应放在透彻理解基本知识，掌握分析问题和解决问题的方法上。书中所列基本知识内容，要结合课本进行复习，务必明了其推导过程和相互关系；书中所举的例题应当切实掌握。为了帮助考生沟通不同部分的知识和方法，并能综合运用它们来分析问题和解决问题，在书末编选了91个综合题，并作了解答。

根据部分教师的意见，本书编入了少量超过1980年《考纲》的内容（如排列、组合和二项式定理等）作为参考，这些内容都加了“*”号，应届考生可以不复习。

参加本书修改和审定工作的有彭声铭、戴奇兴、骆志远、许鸿厥、邓志揆、陆明仁、杨圣宏和章立、林仁逊、许国刚等同志。

由于修改时间仓促，本书难免有缺点和错误，请读者批评指正。

在修订过程中，我们得到各地、市、县文教局和有关学校的大力支持，谨此致谢。

江西省中小学教材编写组

一九七九年十二月

目 录

代 数

第一章	数	(1)
一	实数	(1)
二	复数	(7)
第二章	代数式	(26)
一	代数式	(26)
二	整式	(26)
三	分式	(29)
四	根式	(30)
第三章	因式分解	(52)
第四章	方程与方程组	(66)
一	方程	(66)
二	方程组	(91)
三	列方程或方程组解应用题	(108)
第五章	不等式	(124)
一	不等式及其性质	(124)
二	不等式的解法	(125)
第六章	指数与对数	(143)
一	指数	(143)
二	对数	(143)
三	常用对数	(145)
四	指数方程与对数方程	(146)

第七章	函数及其图象	(162)
一	有关函数的基本知识.....	(162)
二	几种函数的图象和性质.....	(164)
第八章	数列	(189)
一	数列的概念.....	(189)
二	等差数列.....	(190)
三	等比数列.....	(191)
* 四	极限.....	(192)
第九章	排列、组合和二项式定理	(209)
* 一	排列、组合.....	(209)
* 二	数学归纳法.....	(218)
* 三	二项式定理.....	(222)

平 面 几 何

第一部分	基本知识	(230)
第一章	直线	(230)
一	相交线.....	(230)
二	平行线.....	(232)
第二章	多边形	(234)
一	三角形.....	(234)
二	四边形.....	(240)
三	多边形.....	(243)
第三章	圆	(244)
一	圆的基本概念.....	(244)
二	圆与直线的关系.....	(245)
三	圆与圆的关系.....	(249)
四	圆与三角形的关系.....	(250)

五	圆与多边形的关系	(251)
六	有关圆的计算公式	(253)
七	作含有已知角的弓形弧	(254)
第二部分 例题与复习题		(255)
一	证明	(255)
二	计算	(307)
三	轨迹与作图	(316)

立 体 几 何

第一章	直线和平面	(327)
一	平面的基本性质	(327)
二	直线、平面间的位置关系	(328)
三	两直线平行、垂直的定理	(331)
四	直线和平面平行、垂直的定理	(334)
五	两平面平行、垂直的定理	(335)
六	等量定理	(337)
第二章	棱柱、棱锥和棱台	(350)
一	棱柱、棱锥和棱台的概念	(350)
二	棱柱、棱锥和棱台的表面积与体积	(353)
第三章	圆柱、圆锥、圆台和球	(365)
一	圆柱、圆锥、圆台和球的概念	(365)
二	圆柱、圆锥、圆台和球的表面积与体积	(370)

三 角

第一章	任意角的三角函数	(381)
一	角的概念	(381)

二	三角函数的定义	(382)
三	同角三角函数间的关系	(384)
四	诱导公式	(385)
五	三角函数的图象和性质	(387)
第二章	复角三角函数	(406)
一	两角和与差的三角函数	(406)
二	倍角的三角函数	(406)
三	半角的三角函数	(407)
四	三角函数的和积互化	(407)
第三章	反三角函数与简单的三角方程	(430)
一	反三角函数	(430)
二	简单的三角方程	(432)
第四章	解三角形	(449)
一	三角形的边角关系与三角形的解法	(449)
二	解三角形的应用	(451)

平面解析几何

第一章	曲线与方程	(476)
一	平面直角坐标系	(476)
二	曲线与方程	(478)
第二章	直线	(488)
第三章	二次曲线	(506)
一	圆	(506)
二	椭圆	(508)
三	双曲线	(510)
四	抛物线	(512)
第四章	坐标变换	(548)

一	坐标变换.....	(548)
二	二元二次方程的讨论.....	(550)
三	二元二次方程的化简.....	(551)
第五章	极坐标.....	(569)
第六章	参数方程.....	(580)

综 合 题 及 解 答

综合题及解答.....	(595)
-------------	-------

代 数

第一章 数

一 实 数

1.1 整数

正整数（自然数）、零、负整数总称为整数。

整数中，能被 2 整除的称为偶数，其余的称为奇数。若 n 为整数，则 $2n$ 是偶数， $2n+1$ 是奇数。 n 为整数，也可记为 $n \in J$ 。

1.2 有理数

整数和分数总称为有理数。

每一个有理数都可以表示为既约分数 $\frac{n}{m}$ 的形式，其中 m 、 n 为互质的整数，且 $m \neq 0$ 。

每一个既约分数都可以化为有限小数或无限循环小数；反之，每一个有限小数或者无限循环小数也可以化为既约分数。例如，

$$0.\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}, \quad 0.45\dot{2}\dot{1} = \frac{4521 - 45}{9900} = \frac{373}{825}.$$

1.3 实数和数轴

1. 无理数：无限不循环小数叫做无理数。

2. 实数：有理数和无理数总称为实数。

3. 数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。

4. 实数与数轴上的点一一对应：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应，这就叫做实数和数轴上的点成一一对应。

5. 相反的数：在数轴上原点的两旁，离开原点距离相等的两点所表示的两个数，叫做互为相反的数。零的相反数是零。

例如 $2\frac{1}{2}$ 和 $-2\frac{1}{2}$ ； $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$ 是互为相反的数。

6. 实数的绝对值：

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a > 0 \text{ 时})； \\ 0 & (\text{当 } a = 0 \text{ 时})； \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时})。 \end{cases}$$

7. 实数大小的比较：

数轴上的点越往右，它所表示的数就越大，也就是：

- (1) 正数大于零和负数；
- (2) 负数小于零；
- (3) 两个正数，绝对值大的较大；
- (4) 两个负数，绝对值大的反而小。

1.4 有理数的运算

1. 运算法则

(1) 加法：

- ① 同号两数相加，取相同的符号，把绝对值相加；
- ② 异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并从较大

的绝对值减去较小的绝对值；

③相反的两个数相加得零；

④零加任何数仍得这个数。

(2) 减法：转化为加法，即

$$a - b = a + (-b).$$

(3) 乘法与除法：

①同号两数相乘（或除），取“+”号，把绝对值相乘（或除）；

②异号两数相乘（或除），取“-”号，把绝对值相乘（或除）；

③零乘以任何数得零；

④零除以任何不为零的数得零，零作除数无意义。

(4) 乘方：因数相同的乘法运算。如，

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \uparrow a}.$$

2. 运算定律

(1) 交换律： $a + b = b + a$ ；

$$ab = ba.$$

(2) 结合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$ ；

$$(ab)c = a(bc).$$

(3) 乘法对加法的分配律：

$$a(b + c) = ab + ac;$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

3. 运算顺序

先算乘方、开方；再算乘、除；最后算加、减。如果有括号，就先算括号里的数。在同一级运算中，按照从左到右的顺序运算。

例1 求最小的自然数的50次方与最大的负整数的51次方的差。

解： $\because 1^{50} - (-1)^{51} = 1 - (-1) = 2$ 。

$\therefore$ 最小的自然数的50次方与最大的负整数的51次方的差是2。

注：在自然数中，最小的数是1，没有最大的数；在负整数中，最大的数是-1，没有最小的数；在实数中，既没有最小的数也没有最大的数。

例2 计算：

$$-12 \div (-1)^{2n+1} + 0^n \div 147\sqrt{2} - |2^4 - (-29) \times (-2)| \\ \times (3^2 - 2^3) \quad (n \text{ 是自然数}).$$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= -12 \div (-1) + 0 - |16 - 58| \times (9 - 8) \\ &= 12 - 42 = -30. \end{aligned}$$

注： n 为自然数时， $(-1)^{2n} = 1$ ， $(-1)^{2n+1} = -1$ ， $1^n = 1$ ， $0^n = 0$ 。

例3 计算：

$$\left[-2^2 - \left(-\frac{2}{3} \right)^2 \times (-1)^7 \times 3^2 \right]^3 - [-0.5 + 13.5 \div (-3)^3]^2.$$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \left[-4 - \frac{4}{9} \times (-9) \right]^3 - \left[-\frac{1}{2} + \frac{27}{2} \times \left(-\frac{1}{27} \right) \right]^2 \\ &= (-4 + 4)^3 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

注：在有理数运算的问题中，如果既有分数又有小数，一般将小数化为分数，计算较简便。下面的换算必须熟记：

$$0.5 = \frac{1}{2}, \quad 0.25 = \frac{1}{4}, \quad 0.75 = \frac{3}{4}, \quad 0.125 = \frac{1}{8}.$$

例4 求证 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则 $\sqrt{2}$ 必定可以表示为 $\frac{n}{m}$ (m 、 n 是互质的整数，且 $m \neq 0$) 的形式。

$$\text{由 } \sqrt{2} = \frac{n}{m} \text{ 两边平方得 } 2 = \frac{n^2}{m^2},$$

$$\therefore n^2 = 2m^2. \quad (1)$$

可知 n^2 是偶数， n 必定是偶数。令 $n = 2k$ (k 是整数) 代入 (1) 得

$$(2k)^2 = 2m^2,$$

$$\therefore m^2 = 2k^2.$$

可知 m^2 是偶数， m 必定是偶数。

m 、 n 都是偶数就有公约数 2，与假设矛盾。因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

注：本题使用的方法是反证法。一般地，证明用根式或对数式表示的数是无理数时，可以采用反证法。

例 5 比较 $|a|$ 和 $-2a$ 的大小。

答：若 $a > 0$ ，则 $|a| > -2a$ ；

若 $a = 0$ ，则 $|a| = -2a$ ；

若 $a < 0$ ，则 $|a| < -2a$ 。

注：要比较带绝对值符号的两个代数式的值的大小，必须根据绝对值概念，区分情况加以讨论。

例 6 求 $x^2 - y^2 = 35$ 的正整数解。

解： $\because x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$,

$$35 = 1 \times 35 = 5 \times 7,$$

$\therefore$ 解原方程可化为解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} x + y = 35, \\ x - y = 1. \end{cases} \quad \text{解之, 得 } \begin{cases} x = 18, \\ y = 17. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 5. \end{cases} \quad \text{解之, 得 } \begin{cases} x = 6, \\ y = 1. \end{cases}$$

注：如果本题改为求整数解，就有八组解。

例7 设 n 是整数，试证： $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1$ 也是整数，并且用 3 除时余 2。

$$\begin{aligned}\text{证明：} & n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1 \\ &= n^3 + n^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \\ &= n^2(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - 1.\end{aligned}$$

$\because n$ 是整数， $\therefore n^2(n+1)$ 是整数， $\because n$ 、 $(n+1)$ 是连续的两个整数， $\therefore \frac{1}{2}n(n+1)$ 必定是整数，

$\therefore n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1$ 也是整数。

$$\begin{aligned}\text{又 } & n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1 \\ &= n^2(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - 3 + 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) - 3 + 2 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)[(n+2) + (n-1)] - 3 + 2 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{2} - 3 + 2.\end{aligned}$$

$\because n(n+1)(n+2)$ 和 $(n-1)n(n+1)$ 都是三个连续整数的积，也就都能被 6 整除，

$\therefore \frac{n(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{2} - 3$ 能被 3 整除，

$\therefore n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1$ 被 3 除时余 2。

注：两个连续整数中，必有一个能被 2 整除，它们的积能被 2 整除；三个连续整数中，必有一个数能被 3 整除，它们的积能被 $2 \cdot 3$ 整除；四个连续整数中，必有一个数能被 4 整除，它们的积能被 $2 \cdot 3 \cdot 4$ 整除，……

二 复 数

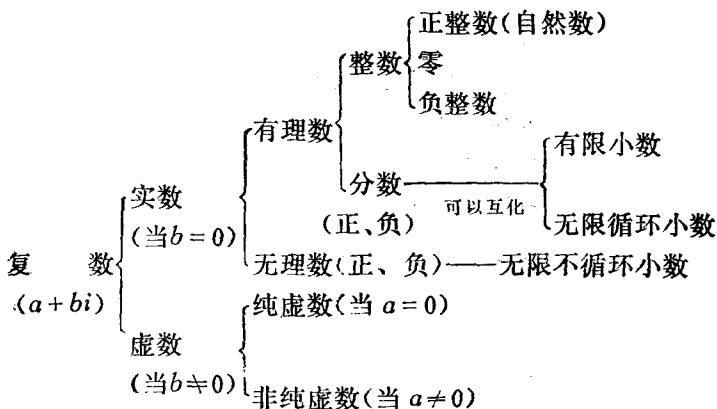
1.5 复数的基本概念

1. 虚数单位

在实数范围(实数集)，方程 $x^2 = -1$ 无解，为了解方程的需要，人们引进一个新数 i ，称为虚数单位， i 具有性质： $i^2 = -1$ ，并规定 i 可以和实数在一起进行通常的四则运算。

i 的幂具有性质： $i^{4k} = 1$ ； $i^{4k+1} = i$ ； $i^{4k+2} = -1$ ； $i^{4k+3} = -i$ (k 是整数)。

2. 复数 形如 $a+bi$ (a, b 是实数) 的数叫做复数。



复数 $a+bi$ 和复平面内的点 $M(a, b)$ 有一一对应的关系，也和向量 $\overrightarrow{OM}$ (以原点 O 为起点， M 为终点的向量) 有一一对应的关系。

3. 复数的代数式，三角表示式和指数式

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

$$|a + bi| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (r \text{ 是模数或绝对值});$$

确定幅角的公式
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r}, \\ \sin \theta = \frac{b}{r}. \end{cases}$$

幅角的主值区间 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，幅角的一般式是 $2k\pi + \theta$ (k 是整数)。

4. 复数的相等

$$(1) \quad a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2; \end{cases}$$

$$(2) \quad r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = r_2, \\ \theta_1 = 2k\pi + \theta_2 \quad (k \text{ 为整数}). \end{cases}$$

5. 复数 $z = a + bi$ 与 $\bar{z} = a - bi$ 互为共轭复数。

$$(1) \quad (a + bi) + (a - bi) = 2a;$$

$$(2) \quad (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2;$$

$$(3) \quad |a + bi| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.6 复数的运算

1. 加、减法

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i.$$

2. 乘法

$$\begin{aligned}
 (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i; \\
 r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
 &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]; \\
 r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.
 \end{aligned}$$

3. 除法

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \quad (a_2 + b_2 i \neq 0); \\
 \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\
 &\quad (r_2 \neq 0); \\
 \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (r_2 \neq 0).
 \end{aligned}$$

4. 乘方

(1) 运用二项式定理;

(2) 运用棣美弗定理

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

5. 开方

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right) \\
 &\quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned}$$

注: (1) 复数运算的结果还是一个复数. 在实数集中成立的运算律, 在复数集中仍然成立. 但在复数集中成立的一些性质, 如 n 次方根有 n 个值, 一元 n 次方程有 n 个根, 在实数集却不成立.

(2) 实数有有理数、无理数及正数、负数的区别, 对虚数来说, 就没有这样的区别. 两个不全是实数的复数就不能规定它们的大小.

(3) 除熟练掌握以上内容外, 还要会用几何方法求两个复