1990 数学

高考复习资料

一九八〇年高考复习资料

数　学

江西省中小学教材编写组编

·

江西人民出版社出版

（南昌百花洲3号）

江西新华印刷厂印刷　江西省新华书店发行

·

开本 787×1092 1/32　印张 21 1/2　字数 50.2 万

1980年2月第1版　1980年2月第1次印刷

印数 1—150,000

书号：7110·215　定价：1.69 元

说　　明

本书是根据部颁《一九八〇年高等学校招生考试复习大纲》数学部分的要求，在我组编写的《1979年高考复习资料——数学》一书的基础上，广泛征求了各方面读者意见后进行修订而成的。

根据《考纲》的要求，复习重点应放在透彻理解基本知识，掌握分析问题和解决问题的方法上。书中所列基本知识内容，要结合课本进行复习，务必明了其推导过程和相互关系；书中所举的例题应当切实掌握。为了帮助考生沟通不同部分的知识和方法，并能综合运用它们来分析问题和解决问题，在书末编选了91个综合题，并作了解答。

根据部分教师的意见，本书编入了少量超过1980年《考纲》的内容（如排列、组合和二项式定理等）作为参考，这些内容都加了“*”号，应届考生可以不复习。

参加本书修改和审定工作的有彭声铭、戴奇兴、骆志远、许鸿厥、邓志揆、陆明仁、杨圣宏和章　立、林仁逊、许国刚等同志。

由于修改时间仓促，本书难免有缺点和错误，请读者批评指正。

在修订过程中，我们得到各地、市、县文教局和有关学校的大力支持，谨此致谢。

江西省中小学教材编写组

一九七九年十二月

目　录

代　数

平　面　几　何

立　体　几　何

三　　角

平面解析几何

综合题及解答

代　　数

第一章　数

一　实　　数

1.1　整数

正整数（自然数）、零、负整数总称为整数。

整数中，能被 2 整除的称为偶数，其余的称为奇数。若 n 为整数，则 $2n$ 是偶数，$2n+1$ 是奇数。n 为整数，也可记为 $n \in J$。

1.2　有理数

整数和分数总称为有理数。

每一个有理数都可以表示为既约分数 $\frac{n}{m}$ 的形式，其中 m、n 为互质的整数，且 $m \neq 0$。

每一个既约分数都可以化为有限小数或无限循环小数；反之，每一个有限小数或者无限循环小数也可以化为既约分数。例如，

$$0.\dot{1}\dot{2}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}, \qquad 0.45\dot{2}\dot{1}=\frac{4521-45}{9900}=\frac{373}{825}.$$

1.3　实数和数轴

1．无理数：无限不循环小数叫做无理数。

2. 实数：有理数和无理数总称为实数。

3. 数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。

4. 实数与数轴上的点一一对应：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应，这就叫做实数和数轴上的点成一一对应。

5. 相反的数：在数轴上原点的两旁，离开原点距离相等的两点所表示的两个数，叫做互为相反的数。零的相反数是零。例如 $2\frac{1}{2}$ 和 $-2\frac{1}{2}$；$\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$ 是互为相反的数。

6. 实数的绝对值：

$$|a|=\begin{cases} a\ (\text{当 } a>0 \text{ 时})；\\ 0\ (\text{当 } a=0 \text{ 时})；\\ -a\ (\text{当 } a<0 \text{ 时})。\end{cases}$$

7. 实数大小的比较：

数轴上的点越往右，它所表示的数就越大，也就是：

(1) 正数大于零和负数；

(2) 负数小于零；

(3) 两个正数，绝对值大的较大；

(4) 两个负数，绝对值大的反而小。

1.4 有理数的运算

1. 运算法则

(1) 加法：

①同号两数相加，取相同的符号，把绝对值相加；

②异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并从较大

的绝对值减去较小的绝对值；

③相反的两个数相加得零；

④零加任何数仍得这个数。

（2）减法：转化为加法，即

$$a-b=a+(-b).$$

（3）乘法与除法：

①同号两数相乘（或除），取“+”号，把绝对值相乘（或除）；

②异号两数相乘（或除），取“-”号，把绝对值相乘（或除）；

③零乘以任何数得零；

④零除以任何不为零的数得零，零作除数无意义。

（4）乘方：因数相同的乘法运算．如，

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}.$$

2．运算定律

（1）交换律：$a+b=b+a$；

$$ab=ba.$$

（2）结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

$$(ab)c=a(bc).$$

（3）乘法对加法的分配律：

$$a(b+c)=ab+ac;$$

$$(a+b)c=ac+bc.$$

3．运算顺序

先算乘方、开方；再算乘、除；最后算加、减．如果有括号，就先算括号里的数．在同一级运算中，按照从左到右的顺序运算．

例 1　求最小的自然数的 50 次方与最大的负整数的 51 次方的差。

解：$\because$　$1^{50}-(-1)^{51}=1-(-1)=2$。

$\therefore$　最小的自然数的 50 次方与最大的负整数的 51 次方的差是 2 。

注：在自然数中，最小的数是 1 ，没有最大的数；在负整数中，最大的数是 -1 ，没有最小的数；在实数中，既没有最小的数也没有最大的数。

例 2　计算：

$$-12\div(-1)^{2n+1}+0^{n}\div 147\sqrt{2}-|2^{4}-(-29)\times(-2)|\times(3^{2}-2^{3})$$ （n 是自然数）。

解：原式 $=-12\div(-1)+0-|16-58|\times(9-8)$

$=12-42=-30$.

注：n 为自然数时，$(-1)^{2n}=1,(-1)^{2n+1}=-1$，$1^{n}=1$，$0^{n}=0$。

例 3　计算：

$$\left[-2^{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\times(-1)^{7}\times 3^{2}\right]^{3}-[-0.5+13.5\div(-3)^{3}]^{2}.$$

解：原式 $=\left[-4-\frac{4}{9}\times(-9)\right]^{3}-\left[-\frac{1}{2}+\frac{27}{2}\times\left(-\frac{1}{27}\right)\right]^{2}$

$=(-4+4)^{3}-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^{2}$

$=0-1=-1$.

注：在有理数运算的问题中，如果既有分数又有小数，一般将小数化为分数，计算较简便．下面的换算必须熟记：

$$0.5=\frac{1}{2},\quad 0.25=\frac{1}{4},\quad 0.75=\frac{3}{4},\ 0.125=\frac{1}{8}.$$

例 4　求证 $\sqrt{2}$ 不是有理数。

证明：假设$\sqrt{2}$是有理数，则$\sqrt{2}$必定可以表示为$\frac{n}{m}$(m、n是互质的整数，且$m\neq0$)的形式。

由$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$两边平方得$2=\frac{n^2}{m^2}$，

$$\therefore \quad n^2=2m^2。\qquad (1)$$

可知n^2是偶数，n必定是偶数。令$n=2k$(k是整数)代入(1)得

$$(2k)^2=2m^2,$$

$$\therefore \quad m^2=2k^2。$$

可知m^2是偶数，m必定是偶数。

m、n都是偶数就有公约数2，与假设矛盾。因此$\sqrt{2}$不是有理数。

注：本题使用的方法是反证法。一般地，证明用根式或对数式表示的数是无理数时，可以采用反证法。

例 5　比较$|a|$和$-2a$的大小。

答：若$a>0$，则$|a|>-2a$；

若$a=0$，则$|a|=-2a$；

若$a<0$，则$|a|<-2a$。

注：要比较带绝对值符号的两个代数式的值的大小，必须根据绝对值概念，区分情况加以讨论。

例 6　求$x^2-y^2=35$的正整数解。

解：$\because \quad x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，

$$35=1\times35=5\times7,$$

$\therefore$　解原方程可化为解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+y=35,\\x-y=1.\end{cases}$　　解之，得$\begin{cases}x=18,\\y=17.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x+y=7,\\x-y=5.\end{cases}$　　解之，得$\begin{cases}x=6,\\y=1.\end{cases}$

注：如果本题改为求整数解，就有八组解。

例 7　设 n 是整数，试证：$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$ 也是整数，并且用 3 除时余 2。

证明：$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$

$$=n^3+n^2+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$$

$$=n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)-1.$$

$\because$ n 是整数，$\therefore n^2(n+1)$ 是整数，$\because$ n、$(n+1)$ 是连续的两个整数，$\therefore \frac{1}{2}n(n+1)$ 必定是整数，

$\therefore$ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$ 也是整数。

又 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$

$$=n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)-3+2$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-3+2$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)[(n+2)+(n-1)]-3+2$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{2}-3+2.$$

$\because$ $n(n+1)(n+2)$ 和 $(n-1)n(n+1)$ 都是三个连续整数的积，也就都能被 6 整除，

$\therefore$ $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{2}-3$ 能被 3 整除，

$\therefore$ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$ 被 3 除时余 2。

注：两个连续整数中，必有一个能被 2 整除，它们的积能被 2 整除；三个连续整数中，必有一个数能被 3 整除，它们的积能被 2·3 整除；四个连续整数中，必有一个数能被 4 整除，它们的积能被 2 • 3 • 4 整除，……

二 复 数

1.5 复数的基本概念

1．虚数单位

在实数范围(实数集)，方程 $x^2=-1$ 无解，为了解方程的需要，人们引进一个新数 i，称为虚数单位，i 具有性质：$i^2=-1$，并规定 i 可以和实数在一起进行通常的四则运算。

i 的幂具有性质：$i^{4k}=1$；$i^{4k+1}=i$；$i^{4k+2}=-1$；$i^{4k+3}=-i$（k 是整数）。

2．复数 形如 $a+bi$(a，b 是实数)的数叫做复数。

- 复 数 $(a+bi)$
  - 实数（当 $b=0$）
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数(自然数)
        - 零
        - 负整数
      - 分数（正、负）——可以互化——
        - 有限小数
        - 无限循环小数
    - 无理数(正、负)——无限不循环小数
  - 虚数（当 $b\neq0$）
    - 纯虚数(当 $a=0$)
    - 非纯虚数(当 $a\neq0$)

复数 $a+bi$ 和复平面内的点 $M(a, b)$ 有一一对应的关系，也和向量 $\overrightarrow{OM}$（以原点 O 为起点，M 为终点的向量）有一一对应的关系。

3. 复数的代数式，三角表示式和指数式

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}.$$

$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$（r 是模数或绝对值）；

确定幅角的公式 $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r},\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$

幅角的主值区间 $0\leqslant\theta<2\pi$，幅角的一般式是 $2k\pi+\theta$（k 是整数）。

4. 复数的相等

(1) $a_1+b_1i=a_2+b_2i \longleftrightarrow \begin{cases}a_1=a_2,\\ b_1=b_2;\end{cases}$

(2) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \longleftrightarrow$
$\begin{cases}r_1=r_2,\\ \theta_1=2k\pi+\theta_2\end{cases}$（$k$ 为整数）。

5. 复数 $z=a+bi$ 与 $\bar{z}=a-bi$ 互为共轭复数。

(1) $(a+bi)+(a-bi)=2a$；

(2) $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$；

(3) $|a+bi|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

1.6 复数的运算

1. 加、减法

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

2. 乘法

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i;$$

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)];$$

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

3。除法

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \quad (a_2+b_2i\neq 0);$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$(r_2\neq 0)$;

$$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (r_2\neq 0).$$

4。乘方

（1）运用二项式定理；

（2）运用棣美弗定理

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

5。开方

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

注：（1）复数运算的结果还是一个复数．在实数集中成立的运算律，在复数集中仍然成立．但在复数集中成立的一些性质，如 n 次方根有 n 个值，一元 n 次方程有 n 个根，在实数集却不成立．

（2）实数有有理数、无理数及正数、负数的区别，对虚数来说，就没有这样的区别．两个不全是实数的复数就不能规定它们的大小．

（3）除熟练掌握以上内容外，还要会用几何方法求两个复